Монография «Линейная алгебра в задачах экономики» предназначена в помощь изучающим линейную алгебру в приложениях к решению типовых экономических задач. Она содержит как теоретический материал, изложение которого снабжено необходимыми доказательствами и иллюстрируется примерами, решенными «вручную» и с применением компьютера, так и алгоритмы исследования и решения систем линейных алгебраических уравнений, алгоритмы решения задач линейного программирования. Автор надеется, что книга окажется полезной студентам, преподавателям вузов и общеобразовательных учебных заведений, аспирантам и всем интересующимся решением экономических задач различными методами и способами.

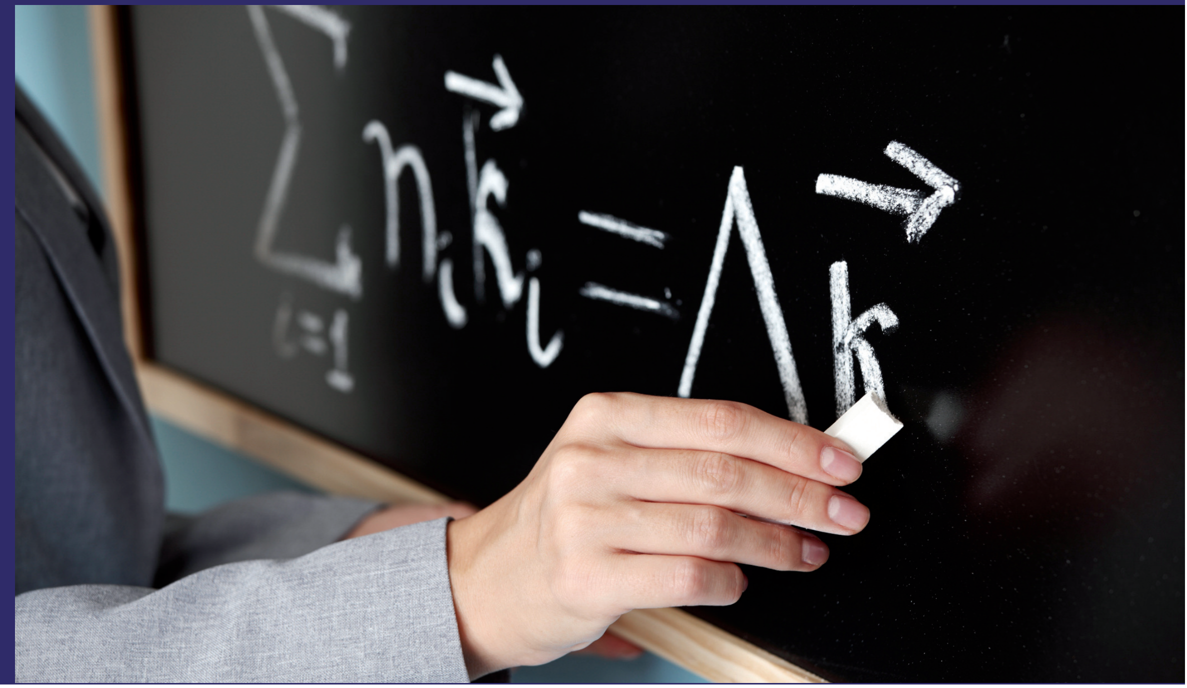
Татьяна Тарбокова

Тарбокова Татьяна Васильевна окончила физико-математическую школу при НГУ, Томский государственный университет, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики Национального исследовательского Томского политехнического университета, Томск, Россия

978-3-659-18762-9

Линейная алгебра в задачах экономики

Тарбокова



Татьяна Тарбокова

Линейная алгебра в задачах экономики

Линейная алгебра и линейное программирование

LAP LAMBERT Academic Publishing

Татьяна Тарбокова

Линейная алгебра в задачах экономики

Татьяна Тарбокова

Линейная алгебра в задачах экономики

Линейная алгебра и линейное программирование

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum/Imprint (nur für Deutschland/only for Germany)
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: www.ingimage.com

Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland
Telefon +49 681 3720-310, Telefax +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

Herstellung in Deutschland:
Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin
Books on Demand GmbH, Norderstedt
Reha GmbH, Saarbrücken
Amazon Distribution GmbH, Leipzig
ISBN: 978-3-659-18762-9

Только для России и стран СНГ
Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу http://dnb.d-nb.de.
Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Издатель: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany
Телефон +49 681 3720-310, Факс +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

Напечатано в России
ISBN: 978-3-659-18762-9

Содержание 5

Введение

Целью изучения дисциплины «Линейная алгебра в задачах экономики» является развитие математической интуиции студентов, воспитание их математической культуры, умения логически мыслить, оперировать абстрактными объектами. Овладение необходимым математическим аппаратом дисциплины «Линейная алгебра в задачах экономики» позволит студентам анализировать, моделировать, решать прикладные экономические и другие профессиональные задачи.

Практические приложения дисциплины «Линейная алгебра в задачах экономики» призваны способствовать воспитанию у студентов отношения к математике как инструменту исследования и решения прикладных профессиональных задач, формированию навыков самостоятельной работы, необходимых для использования полученных знаний при изучении специальных дисциплин и в дальнейшей практической деятельности.

В книге рассматриваются начала линейной алгебры и линейного программирования. При этом излагаются только те вопросы, которые необходимы для понимания теории и методов линейного программирования и решения других задач экономического содержания средствами линейной алгебры.

В первой главе монографии определяются понятия матриц, определителей, систем линейных уравнений. Рассматриваются различные виды матриц и действия с ними, разные способы вычисления определителей и методы решения систем линейных алгебраических уравнений, которые иллюстрируются примерами, решаемыми «вручную» и на компьютере при помощи системы MATHCAD. Дается описание моделей Леонтьева: многоотраслевой экономики, продуктивной модели Леонтьева, вектора полных затрат и модели равновесных цен, снабженное примерами применения этих моделей.

Вторая глава посвящена изучению линейных пространств, линейной зависимости и независимости системы векторов, определению понятий размерности линейного пространства, базиса и координат вектора. Изучение модели международной торговли приводит к необходимости определения и применения собственных векторов и собственных значений матрицы. Постановка задачи линейного программирования иллюстрируется построением математических моделей простейших экономических задач. Рассматриваются графический и симплекс-метод решения задач линейного программирования, двойственность в линейном программировании, решение транспортной задачи. Все перечисленные задачи снабжены примерами их решений, как без применения компьютера, так и средствами системы MATHCAD.

Работа получила положительные рецензии доктора физико-математических наук, профессора Томского государственного университета (ТГУ) Гулько С.П. и кандидата физико-математических наук, доцента кафедры общей математики ТГУ Галановой Н.Ю.

Глава 1. Системы линейных уравнений

1.1. Предисловие к главе 1

Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений тесно связано с применением теории матриц и определителей.

Матрицы впервые были введены в математику Кэли в 1875 г. Матричные обозначения компактны, удобны и весьма полезны при выполнении, например, линейных преобразований. Интерес к теории матриц возрос после того, как в 1925 г. Гейзенберг, Борн и другие использовали их в задачах квантовой механики. Развитие компьютерных технологий, легко осуществляющих основные матричные операции, сообщило дополнительный толчок активному использованию матриц в различных областях знаний. Матрицы нашли широкое применение в решении практических задач, связанных с экономическими расчетами.

Учение об определителях возникло в связи с решением систем линейных алгебраических уравнений, т.е. систем уравнений, в которые неизвестные входят в первой степени и между собой не перемножаются. Задача состояла в том, чтобы дать общие выражения для значений переменных, удовлетворяющих заданной системе линейных уравнений.

Понятие определителя впервые дано Лейбницем в 1693 г. в связи с исключением переменных из системы трёх линейных уравнений с двумя переменными. В 1750 г. в связи с решением системы n линейных уравнений с n переменными Крамер дал решения, которые до сих пор носят название «правила Крамера».

Разработкой теории определителей занимались Безу, Вандермонд, Лаплас, Гаусс, Бинэ, Коши, Якоби. Название «детерминант» (определитель) ввёл Гаусс (1801 г.). Коши ввел современное обозначение определителя в виде таблицы с n строками и n столбцами.

Определители в математике широко распространены. Теория определителей дает удобное обозначение в формулах при доказательствах, а также в практических расчетах. В настоящее время нет почти ни одной отрасли математики, в которой определители не имели бы приложений.

1.2. Понятие матрицы. Виды матриц

Определение матрицы	**Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов некоторого множества (например, чисел или функций), имеющая m строк и n столбцов. Элементы a_{ij}, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Условимся, что первый индекс i элемента a_{ij} соответствует номеру строки, второй индекс j – номеру столбца, в котором расположен элемент a_{ij}.

Матрицы могут обозначаться следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad A = (a_{ij}), (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n});$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A = (a_{ij}), (i, j = \overline{1,n}).$$

Например, матрица $A_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ имеет размер 3×2 (три строки, два столбца), а элемент $a_{12}=-1$ (в первой строке, втором столбце).

Определение видов матриц	**1**. Если $m=n,$ то матрицу называют *квадратной, порядка* n. **2**. Если $m\neq n,$ то матрицу называют *прямоугольной*. **3**. Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой* и обозначают O. **4**. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{kk} (где $k=\min\{m,n\}$) называются *элементами главной диагонали матрицы*. Квадратная матрица, у которой все элементы **вне** главной диагонали равны нулю, называется *диагональной:* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ .... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ **5**. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной*: $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Обозначают: $\boldsymbol{E}$ или $\mathbf{E}_n$. **6**. Пусть $A=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, ..., a_{n1}$ называются *элементами побочной диагонали матрицы*.

1.3. Операции над матрицами

Определение равных матриц	Две матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ считаются *равными*, если они одинакового размера, и элементы, расположенные в матрицах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{i\,j} = b_{i\,j}$.

Определение суммы двух матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ с одинаковым количеством m строк и n столбцов называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \;\; j = 1, 2, \ldots, n.).$$

Обозначение: $C = A + B$

Пример 1.1.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & -1+4 \\ -2-5 & -3+0 \\ 5+1 & 6-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** λ называется матрица, у которой **каждый** элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{pmatrix}.$$

Пример 1.2.

$$\lambda A = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 & -1 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 3 & -1 \cdot 1 & -1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение произведения матрицы-строки на матрицу-столбец

Произведением матрицы-строки, имеющей n столбцов и одну строку, на матрицу-столбец, имеющий столько же строк и один столбец, **называется матрица, состоящая из одного элемента,** который равен сумме произведений соответствующих элементов перемножаемых матриц: $A_{1 \times n} \cdot B_{n \times 1} = C_{1 \times 1}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}).$$

Пример 1.3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 3) = (16).$

Условие существования произведения двух матриц	Произведение матриц $A \cdot B$ существует только в тех случаях, **когда число <u>столбцов</u> матрицы** A **равно числу <u>строк</u> матрицы** B**,** то есть $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$. При этом матрица-произведение имеет число строк матрицы A и число столбцов матрицы B.

Можно сказать, что «ширина» матрицы A должна быть равна «высоте» матрицы B.

Определение согласованных матриц	Матрицы, **произведение которых существует** $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$, называются **согласованными**.

Понятно, что произведение матриц в общем случае не подчиняется коммутативному закону умножения: $AB \neq BA$.

Определение перестановочных матриц	Квадратные матрицы (размера $n \times n$), **произведение которых коммутативно:** $AB = BA$, называются перестановочными.

Определение произведения матриц	Произведением матрицы $A = (a_{ij})$, имеющей m строк и n столбцов, на матрицу $B = (b_{ij})$, имеющую n строк и p столбцов, называется матрица $C = (c_{ij})$, имеющая m строк и p столбцов, у которой элемент c_{ij} равен **сумме произведений элементов** i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B,

то есть **один элемент** c_{ij} в i-й строке и j-м столбце произведения матриц равен:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ j = 1, 2, \ldots, p. \end{pmatrix}.$$

Замечание. Правило умножения матриц можно легко запомнить, если сформулировать его в следующем виде: элемент c_{ij} матрицы $C = A \cdot B$, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца, есть скалярное произведение i-й вектор – строки матрицы A и j-го вектор – столбца матрицы B.

Пример 1.4.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 & 0 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 12 & 0 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 15 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 & 4 \cdot 10 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 12 & 4 \cdot 13 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 & 73 \\ 122 & 167 & 212 \end{pmatrix}.$$

Определение транспонированной матрицы	Замена строк матрицы её столбцами с сохранением порядка следования элементов называется **транспонированием** матрицы. Полученная при этом матрица обозначается A^T и называется транспонированной по отношению к матрице A.

Пример 1.5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$

Основное свойство транспонирования матриц: $(AB)^T = B^T A^T$.

1.4. Понятие определителя

Уравнение первой степени $ax + by = c$ относительно двух неизвестных x и y геометрически изображается прямой линией на плоскости. Такое алгебраическое уравнение первой степени называется линейным.

Система двух линейных уравнений относительно двух неизвестных изображается двумя прямыми. Решить такую систему графически – значит найти точку пересечения двух прямых.

В свою очередь, чтобы найти точку пересечения двух прямых линий на плоскости, надо решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Решение системы уравнений первой степени приводит к понятию определителя. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на a_{22}, а второе - на $(-a_{12})$, сложим уравнения, исключая неизвестную x_2, $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \left| \begin{matrix} a_{22} \\ -a_{12} \end{matrix} \right. +$

и получим: $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$.

Аналогичным образом, исключая неизвестную x_1, найдём:

$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$.

Если $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$, то получим решение системы:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}};$$

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Нетрудно заметить, по какому закону из коэффициентов системы уравнений составлены числители и знаменатели полученных решений. Для этого надо коэффициенты системы записать в виде матриц и составить разность произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Полученные числа $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ называются **определителями второго порядка квадратных матриц второго порядка**, а элементы соответствующих матриц – элементами определителя.

Аналогичным образом каждой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие число, называемое определителем этой матрицы.

Обозначается определитель (детерминант) квадратной матрицы A следующим образом: ΔA, $\det A$, $|A|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

1.5. Способы вычисления определителей

Определение определителя	**Определителем порядка** n квадратной матрицы n -го порядка будем называть **число**, соответствующее этой квадратной матрице.

Одним из способов вычисления определителей является **разложение определителя по элементам какой-либо его строки или столбца** с использованием понятия минора и алгебраического дополнения.

Определение минора M_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя** n**-го порядка**	**Минором** M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n–1)$-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием элементов i-й строки и j-го столбца.

Определение алгебраического дополнения A_{ij} **элемента** a_{ij} **определителя** n**-го порядка**	**Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{(i+j)}$: $$A_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij}.$$

Примем без доказательства теорему Лапласа: определитель порядка n может быть представлен в виде разложения этого определителя по элементам i-й строки:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} =$$
$$= a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

То есть ***определитель квадратной матрицы А порядка n равен сумме произведений элементов какой-либо i-й его строки на алгебраические дополнения этих элементов.***

Например, разложив определитель второго порядка по элементам первой строки

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, получим правило его вычисления.

Правило вычисления определителя 2-го порядка	**Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.**

Аналогичным образом можно разложить определитель по элементам любого его столбца. Так для определителя третьего порядка формула разложения определителя по элементам второго столбца получится следующей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\right) +$$

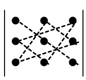
$$+ a_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\right) - a_{32}\left(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}\right) =$$

$$= -a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{32}a_{11}a_{23} +$$

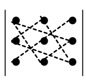
$$+ a_{32}a_{21}a_{13}.$$

Определители второго порядка получаются, если вычеркнуть в определителе третьего порядка второй столбец и, соответственно, сначала первую, потом вторую, потом третью строки.

Если собрать вместе слагаемые одинаковых знаков, **то получим правило треугольников для вычисления определителей третьего порядка:**



\+



−

+ произведения элементов берутся с тем же знаком,
— произведения элементов берутся с противоположным знаком.

Пример 1.6. Вычислим определитель D по правилу треугольников.

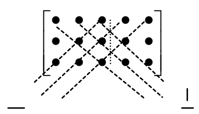
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 13\cdot 1 + 1\cdot 17\cdot 1 + (-1)\cdot 7\cdot(-7) - \left[1\cdot 13\cdot(-7) + (-1)\cdot 17\cdot 1 + 7\cdot 1\cdot 1\right] =$$

$$= 79 - (-101) = 180.$$

Для вычисления определителей третьего порядка применяют также **таблицу Саррюса.** Чтобы составить таблицу Саррюса, нужно к данному определителю третьего порядка дописать справа первый и второй столбцы. Потом взять **с тем же знаком произведения** элементов **главной диагонали** и элементов, расположенных на прямых, параллельных главной диагонали. ***Произведения*** элементов ***побочной диагонали*** и элементов, расположенных на прямых, параллельных побочной диагонали, *входят в определитель* ***с противоположным знаком***.

1 2 3 1 2 – столбцы.



Определители применяются в разнообразных теоретических и численных расчётах. Приводимые ниже **свойства определителей** облегчают их вычисление. Перечислим основные свойства определителей, не останавливаясь на их подробных доказательствах.

1.6. Свойства определителей

Свойство 1	**При транспонировании** матрицы её определитель не меняет своего значения, т.е $\det A = \det A^T$.

Действительно, при разложении определителя матрицы A, например, по элементам первой строки, а транспонированной A^T – по элементам первого столбца, получим одно и то же число.

Из свойства 1 следует, что любое утверждение, справедливое для строк, справедливо и для столбцов определителя.

Свойство 2 (антисимметрии)	**При перестановке двух строк** матрицы её определитель **меняет знак**.

Доказательство. Разложим исходный определитель D по элементам i-й строки:

$$D = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

Поменяв местами i-ю и $(i+1)$-ю строки определителя D, получим определитель D_1. Разложим определитель D_1 по элементам $(i+1)$-й строки (соответствующие элементы и миноры определителей D и D_1 при этом, очевидно, одинаковые):

$$\begin{aligned} D_1 &= a_{i1}(-1)^{i+1+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+1+2} M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+1+n} M_{in} = \\ &= (-1)\left[a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}\right] = -D. \end{aligned}$$

Итак, при перестановке двух соседних строк определитель меняет знак. Чтобы поменять местами i-ю и k-ю $(k > i)$ строки, надо поменять соседние строки $(k-i)+(k-i-1) = 2(k-i)-1$ нечётное число раз. При этом определитель также нечётное число раз сменит знак, то есть станет противоположного знака.

Свойство 3	Определитель матрицы, имеющей **две одинаковые** строки, равен **нулю**.

Доказательство. Поменяем местами две одинаковые строки определителя. По предыдущему свойству определитель должен сменить знак, но с другой стороны, поскольку переставлены одинаковые строки, определитель не должен измениться. Равенство $D = -D$ возможно в единственном случае, когда $D = 0$.

Свойство 4 (линейности)	Если все элементы i-й строки (столбца) матрицы A представлены в виде $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$, причем $j = 1, 2, ..., n$, то $\det A = \lambda \det B + \mu \det C$, где матрица B получена из матрицы A заменой i-й строки числами b_j, а C – числами c_j.

Пример 1.7. Применим 4-е свойство к определителю второго порядка со вторым столбцом, имеющим вид $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$:

$$\begin{vmatrix} -5 & 2\cdot 5 - 3\cdot 4 \\ 7 & 2\cdot 6 - 3\cdot 2 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 3\cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-65) - 3\cdot(-38) =$$

$$= -130 + 114 = -16 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Свойство 5 (следствие свойства 4)	**Общий множитель** строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Пример 1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$

Свойство 6 (следствие свойств 3 и 5)	Определитель матрицы, содержащей две **пропорциональные** строки (столбца), равен **нулю**.

Доказательство. Если вынести общий множитель строки за знак определителя, получим определитель с двумя одинаковыми строками, который по свойству 3 равен нулю.

Свойство 7 (следствие свойств 4 и 6)	Если к элементам одной из строк матрицы A прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженной на некоторое число, то получим матрицу с тем же определителем.

Доказательство. Вновь полученный определитель по свойству линейности 4 можно представить в виде суммы двух определителей, первый из которых будет исходным,

а второй – имеющий пропорциональные строки и по свойству 6 равный нулю.

Свойство 8 (следствие теоремы Лапласа)	Если **все элементы** некоторой строки матрицы равны **нулю**, то её определитель равен **нулю.**

Для **доказательства** достаточно разложить определитель по элементам нулевой строки.

Свойство 9	Определитель **произведения** двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Строгое определение определителя формулируется следующим образом.

Предварительно определим понятие инверсии.

Определение инверсии	Инверсией в перестановке из чисел называют «беспорядок», когда меньшее число расположено правее большего.

Так же можно определять число инверсий в перестановке из букв алфавита.

Пример 1.9. Число инверсий в перестановке (4, 3, 1, 5, 2) равно шести, так как тройка образует *одну* инверсию с четверкой;
единица образует *две* инверсии (с четверкой и тройкой);
двойка образует *три* инверсии (с четверкой, тройкой и пятеркой).

Определение определителя	**Определителем порядка** n квадратной матрицы n -го порядка называется **число**, соответствующее этой квадратной матрице, равное алгебраической сумме $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ (эн-факториал) всех возможных различных произведений её элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и из каждого столбца, в которой каждое произведение умножается на $(-1)^{s+t}$, где s – число инверсий в перестановке номеров строк, в которые входят сомножители, а t – число инверсий в перестановке из номеров столбцов.

1.7. Ранг матрицы.

Рассмотрим основную характеристику матрицы, называемую её рангом.

Определение минора порядка *k*	***Минором*** M_k ***порядка k*** матрицы A называется любой определитель k-го порядка этой матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых её «*к*» столбцов и любых её «*к*» строк

$$M_1 = a_{ij}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{sj} & a_{sk} \end{vmatrix}, \quad \textit{и т. д.}$$

$$i,\, s = 1,\ldots, m, \quad j, k = 1,\ldots, n$$

Пусть дана матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$.

Из данной матрицы можно выделить

16 миноров впервого порядка $a_{11},\, a_{12},\, ..., a_{44}$;

36 миноров второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$;

16 миноров третьего порядка и один минор четвёртого порядка.

Таким образом, общее число миноров первого, второго, третьего и четвёртого порядков для данной матрице составляет 69, а наибольшим порядком обладает минор четвёртого порядка. Вообще для матрицы $A_{m \times n}$

можно составлять миноры, порядок которых не превышает меньшее из чисел m и n.

Определение ранга матрицы

Рангом *r* матрицы A называется **наибольший порядок *r*** минора этой матрицы, отличного от нуля:

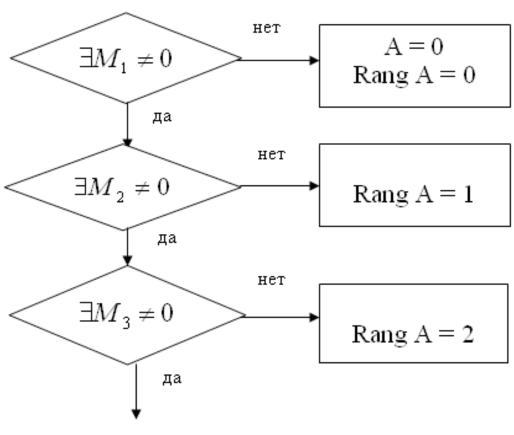
$$\exists M_r \neq 0, \forall M_k = 0 \text{ или } \overline{\exists} M_k, \quad k = r+1, r+2, ...$$

(существует минор порядка *r*, не равный нулю,
а все миноры более высоких порядков равны нулю
или не существуют).

Для нахождения ранга матрицы применяют метод окаймляющих миноров и метод элементарных преобразований матрицы.

1. Ранг матрицы можно находить **методом окаймляющих миноров.**

Схема 1



Матрица имеет нулевой ранг, если все её элементы равны нулю. Допустим, что матрица A имеет ненулевые элементы, из которых можно образовать минор второго порядка, не равный нулю**.** Тогда этот минор «окаймляют» оставшимися строчками и столбцами, обнаруживая минор третьего порядка, не равный нулю.

Если все окаймляющие миноры третьего порядка равны нулю, то ранг матрицы равен двум: $RangA = 2$.

Если найдётся минор третьего порядка, отличный от нуля, то этот минор третьего порядка «окаймляют» оставшимися строчками и столбцами, обнаруживая минор четвёртого прорядка, не равный нулю и т.д.

Наибольший порядок отличного от нуля минора матрицы A и будет равен рангу этой матрицы.

2. Ранг матрицы можно находить **приведением матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями**

Определение эквивалентных матриц	Матрицы, имеющие **одинаковые ранги**, называют эквивалентными. Обозначают эквивалентность матриц так: $A \sim B$.

Определение элементарных преобразований матриц	Элементарными преобразованиями матрицы называют 1) **транспонирование, 2) перестановку строк,** **3) умножение строки на любое число и сложение с соответствующими элементами другой строки,** **4) вычёркивание одинаковых и пропорциональных строк, кроме одной из них.**

Теорема	Элементарные преобразования не изменяют ранга матрицы.

Условимся называть **рабочей** строку, которая не изменяется на проводимом этапе элементарных преобразований матрицы.

Рабочая строка первая. Получим нули в первом столбце на местах всех элементов первого столбца за исключением элемента в первой строке a_{11}. Для этого ***умножим все элементы первой строки*** на такие числа, чтобы при сложении с элементами первого столбца остальных строк получить нули в первом столбце, за исключением элемента первой строки a_{11}.

Если элемент a_{11} не равен единице, можно поменять местами строки, записав первой ту, в которой a_{i1} равен единице.

Если все элементы первого столбца отличны от единицы, можно:

1) умножить первую строку матрицы на число, противоположное тому, на месте которого Вы хотите получить ноль; а строку, в которой хотите получить ноль, умножьте на элемент a_{11} в первой строке;
2) сложить соответствующие элементы умноженной первой строки и умноженной другой строки.

Пример 1.10. Найдём ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Получим нули в первом столбце. Для этого умножим первую строку на (– 5), вторую – на 3 и сложим соответствующие элементы. Потом умножим первую строку на (– 7), третью – на 3 и сложим соответствующие элементы.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 5 & -3 & 1 & \vdots & 3\\ 7 & 2 & -3 & \vdots & 6\end{bmatrix}\begin{matrix}(-5)(-7)\\ +\\ \ \end{matrix}\quad (3)\ \sim \begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\sim$$

Далее нужно получить нули во втором столбце ниже главной диагонали.

Рабочая строка вторая. Получаем нули во втором столбце ниже элемента a_{22}.

Умножим третью строку на (–14) и сложим с соответствующими элементами второй строки. (Или можно было поменять местами вторую и третью строки, чтобы на главной диагонали оказалась единица (см. (*)).

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\ \\ +(-14)\\ \ \end{matrix}\ \sim \begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix};$$

$$\left(\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & -14 & 13 & \vdots & -1\end{bmatrix}(-14)\sim\begin{bmatrix}3 & 1 & -2 & \vdots & 2\\ 0 & -1 & 5 & \vdots & 4\\ 0 & 0 & -57 & \vdots & -57\end{bmatrix}\right)\qquad (*)$$

$Rang\ A=3$, поскольку матрица имеет минор третьего порядка

$M_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & -14 & 13\\ 0 & 0 & -57\end{vmatrix}=3\cdot(-14)\cdot(-57)\neq 0$, а миноров четвёртого порядка для данной матрицы не существует (у неё только три строки).

З а м е ч а н и е. Полученная в скобках матрица (*) также эквивалентна исходной матрице A, то есть имеет тот же ранг.

1.8. Обратная матрица

Определение обратной матрицы	Обратной для матрицы A называется такая матрица A^{-1}, что их произведение равно единичной матрице: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Задача нахождения обратной матрицы находит применение в решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

Определение невырожденной и вырожденной матриц	Матрица, определитель которой **не равен нулю**, называется **невырожденной.** Матрица, определитель которой **равен нулю**, называется **вырожденной.**

Теорема существования обратной матрицы	Необходимым и достаточным условием существования матрицы A^{-1}, обратной матрице A, является **невырожденность** матрицы A.

Доказательство. Пусть матрица A имеет обратную A^{-1}, т.е. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Но определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц, т.е. $\det(A \cdot A^{-1}) = |A| \cdot |A^{-1}| = \det E = 1$, следовательно, $|A| \neq 0$. Необходимое условие доказано.

Достаточность примем без доказательства.

Чтобы найти обратную для A матрицу A^{-1}, можно действовать следующим образом:

1. Вычислить определитель матрицы A $(\det A \neq 0)$.

   Если $\det A = 0$, то матрица A не имеет обратной A^{-1}.

2. Составить присоединённую матрицу из алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы A: (A_{ij}).
3. Транспонировать присоединённую матрицу, то есть заменить строки на столбцы с такими же номерами: $(A_{ij})^T$.
4. Разделить транспонированную присоединённую матрицу на определитель матрицы A:

$$A^{-1} = \frac{(A_{ij})^T}{\det A} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T.$$

Пример 1.11. Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3 \neq 0$. **2.** $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Вспомните, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. $(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверим, правильно ли найдена обратная матрица:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\cdot 1+2\cdot 0 & 3\cdot(-2)+2\cdot 3\\ 0\cdot 1+0\cdot 1 & 0\cdot(-2)+1\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Пример 1.12. Пусть $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

Найдём для матрицы A обратную A^{-1}.

Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\text{, где}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$$

то есть матрица A – невырожденная, и, значит, существует обратная матрица A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}.$

Сделаем **проверку**:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Или $A^{-1}\cdot A=\dfrac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E,$

т.е. обратная матрица найдена верно.

Свойства матриц и определителей

Действие	**Матрица** $A_{m\times n}$ (**таблица** из m строк и n столбцов)	**Определитель** Δ **порядка** n (**число** для матрицы $A_{n\times n}$)
Транспонирование	$Rang(A) = Rang(A^T)$	Δ не изменяется
Перестановка двух строк	Ранг не изменяется	Δ меняет знак
Умножение одной строки на число $\lambda \neq 0$	Ранг не изменяется	Δ изменяется в λ раз (Δ умножается на число λ)
Умножение всех строк на число λ	A изменяется в λ раз (A умножается на число λ)	Δ изменяется в λ^n раз (Δ умножается на число λ^n)
Умножение одной строки на число λ и сложение с соответствующими элементами другой строки	Ранг не изменяется	Δ не изменяется
Получение нулевых и пропорциональных строк	Ранг не изменяется при вычёркивании всех нулевых и пропорциональных строк, кроме одной из ненулевых	$\Delta = 0$

1.9. Основные понятия теории систем линейных уравнений (СЛУ)

Определение СЛУ	Совокупность линейных алгебраических уравнений (все неизвестные входят в уравнения в первой степени и между собой не перемножаются) называется системой линейных уравнений.

Пример 1.13. Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Определение решения СЛУ	**Решением** системы линейных уравнений называется такая совокупность значений неизвестных, при подстановке которой вместо неизвестных каждое уравнение системы обращается в тождество.

Определение совместной и несовместной СЛУ	Система линейных уравнений называется **совместной,** если она имеет **хотя бы одно решение.** Система линейных уравнений называется **несовместной**, если она не имеет **ни одного решения**.

Определение основной матрицы системы	Матрица, составленная **из коэффициентов при неизвестных,** называется основной матрицей системы.

Определение расширенной матрицы системы	Матрица, полученная из основной **присоединением столбца свободных членов** $b_1, b_2, ..., b_m$, называется расширенной матрицей системы.

Пример 1.14. Для системы линейных уравнений
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

основная матрица системы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix},$$

расширенная матрица системы:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

1.10. Теорема Кронекера - Капелли

Ответ на вопрос о совместности или несовместности системы линейных уравнений дает теорема Кронекера - Капелли.

Теорема Кронекера–Капелли	Система линейных уравнений **совместна** тогда и только тогда, когда **ранг основной** матрицы системы **равен рангу расширенной** матрицы этой системы**.**

Пример 1.15. Исследуем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

на совместность.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 2 & 3 & \vdots & -1 \\ 1 & -3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ + \\ (-1)(-2) \end{array} \sim \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & \vdots & -8 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & -4 \\ 1 & -3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} + \\ (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & -4 \\ 1 & -3 & -2 & \vdots & 3 \end{bmatrix}.$$

Минор M_3 матрицы B, составленный из первого, второго столбцов и столбца свободных членов не равен нулю:

$$M_3(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0,$$

а миноров четвёртого порядка матрица B не имеет, поскольку у неё только три строки. Поэтому Rang $B = 3$.

Основная матрица системы A, записанная слева от пунктира в матрице B, теми же самыми преобразованиями приведена к виду: $A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

Минор $M_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$,

а минор $M_3(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

Других миноров третьего порядка матрица A не имеет. Следовательно, по определению ранга матрицы, ранг матрицы A равен двум: Rang A = 2.

Итак, Rang B = 3 ≠ Rang A = 2, и по теореме Кронекера – Капелли исследуемая система несовместна, то есть решений не имеет. На этом решение поставленной задачи заканчивается.

Пример 1.16. Исследуем на совместность **ещё одну систему** линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Найдём ранг расширенной матрицы B системы методом элементарных преобразований.

$$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & \vdots & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & \vdots & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(Вторую строку матрицы, эквивалентной матрице *B*, вычеркнули как пропорциональную третьей строке).

Очевидно, что последняя матрица, эквивалентная матрице *B*, имеет минор $M_3(B)$, не равный нулю, а миноров четвёртого порядка полученная матрица не имеет, поскольку у неё только три строки:

$$M_3(B)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы *B* равен трём. Следовательно, ранг матрицы *B* (по определению ранга матрицы) тоже равен трём: Rang *B* = 3. Этот же минор $M_3(B)$ является минором основной матрицы системы, то есть $M_3(B)=M_3(A)=1\neq 0$, значит, ранг основой матрицы системы тоже равен трём: $\mathrm{Rang}\,A=3$.

По теореме Кронекера – Капелли данная система совместна

$$\mathrm{Rang}A=\mathrm{Rang}B=r=3.$$

1.11. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Прямым ходом метода Гаусса **систему приводят к ступенчатому виду**, исключая последовательно неизвестные системы **элементарными преобразованиями над строками расширенной** матрицы. (Столбцы основной матрицы системы тоже можно переставлять, но при этом нужно соответственно изменить нумерацию переменных).

Пример 1.17. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ методом Гаусса.

Элементарными преобразованиями матрицу A приведём к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & -1 & \vdots & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1)(-1) \\ + \quad + \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ +\,(3) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 2 & 3 & \vdots & 2 \\ 0 & -3 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & -14 \end{array}\right];$$

Последней матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -2, \\ \qquad\quad -14x_3 = -14. \end{cases}$$

Обратным ходом метода Гаусса находим неизвестные x_1, x_2, x_3.

Обратный ход метода Гаусса заключается в следующем:

из последнего уравнения находим x_3: $x_3 = 1$,

Подставив найденное значение x_3 во второе уравнение, получаем неизвестное x_2: $-3x_2 - 2 \cdot 1 = -2 \Rightarrow x_2 = 0$.

Подставив найденные значения неизвестных x_3 и x_2

в первое уравнение,

находим неизвестное x_1:

$x_1 + 0 + 3 \cdot 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$.

Проверка. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2, \\ -1 - 0 + 1 = 0, \\ -1 + 3 \cdot 0 - 1 = -2. \end{cases}$

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

1.12. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Метод Гаусса позволяет найти решение системы линейных уравнений элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы системы. Метод Крамера связан с вычислением определителей.

Теорема Крамера	**Квадратная** система линейных уравнений имеет **единственное решение** тогда и только тогда, когда **определитель основной** матрицы этой системы **не равен нулю.**

В этом случае значения неизвестных находят по **правилу Крамера**.

Правило Крамера	***Неизвестное*** x_i равно **отношению определителя** Δ_i, в котором $i-$й столбец основной матрицы системы заменен столбцом свободных членов, и **определителя** основной матрицы системы Δ: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Пример 1.18. Решим систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$ методом Крамера.

Вычислим определитель основной матрицы системы по правилу треугольников:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 2\cdot1\cdot1 + 1\cdot3\cdot3 - (1\cdot(-1)\cdot3 + 2\cdot1\cdot(-1) + 3\cdot1\cdot1) = 14 \neq 0.$$

Заменим первый столбец основной матрицы системы свободными членами и определитель Δ_1 вычислим, применяя таблицу Саррюса:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & \vdots & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & \vdots & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta_1 = 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot 3 -$$
$$= [(-2) \cdot (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 \cdot 2] = -2 - 12 = -14.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-14}{14} = -1$.

Заменим второй столбец основной матрицы системы столбцом свободных членов

и определитель $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ вычислим, разложив по элементам второго столбца (так как в нем есть один ноль):

$$\Delta_2 = 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\big((-1) - 1 \cdot 1\big) + 0 + 2(1-3) = (-2)(-2) + 2(-2) = 0 .$$

Таким образом, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{0}{14} = 0$.

Заменим третий столбец основной матрицы системы столбцом свободных членов

и определитель $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ вычислим, получив предварительно нули во второй строке, сложив элементы первого и второго столбцов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -\big(3(-2) - 4 \cdot 2\big) = 14.$$

Следовательно, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{14}{14} = 1$.

Эта же система уравнений была решена методом Гаусса, где было получено точно такое же решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Определение базисного минора и базисных неизвестных	Любой, **не равный нулю** минор, имеющий **порядок ранга** основной и расширенной матриц системы, называется **базисным** минором, а неизвестные, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор – базисными неизвестными**.**
Определение свободных неизвестных	Неизвестные, коэффициенты при которых **не вошли** в базисный минор, называются свободными.

Пусть система совместна, что по теореме Кронекера – Капели означает равенство рангов основной и расширенной матриц системы, т.е. $RangA = RangB = r$. И пусть число неизвестных n больше ранга r: $RangA = RangB = r: \quad n > r$.

Приведём систему элементарными преобразованиями её строк

к ступенчатому виду. Выберем базисный минор (любой отличный от нуля минор порядка r)

и r базисных неизвестных, коэффициенты при которых **вошли** в базисный минор. Остальные неизвестные будем считать свободными, т.е. принимающими любые значения. Перенесём свободные неизвестные к свободным членам, а строки, не вошедшие в базисный минор, отбросим (получим «укороченную систему уравнений).

Определение общего решения СЛУ	Решение, в котором базисные неизвестные выражены через свободные, называется **общим решением** системы линейных уравнений.

Определение частного решения СЛУ	Решение, которое получается из общего, если свободные неизвестные равны произвольно заданным постоянным числам, называется **частным решением** системы линейных уравнений.

Общее решение системы линейных уравнений можно получить, руководствуясь, например, следующим **планом**:

а) выбрать базисный минор (обычно это минор, под главной диагональю которого – все нули);

б) перенести свободные неизвестные к свободным членам, то есть в правые части уравнений;

в) обратным ходом метода Гаусса выразить базисные неизвестные через свободные неизвестные, т.е. получить общее решение.

Пример 1.19. Исследуем систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

на совместность.

Приведём расширенную матрицу B системы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями её строк.

$$B=\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\6&-3&2&4&5&3\\6&-3&4&8&13&9\\4&-2&1&1&2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}(-3)(-3)(-2)\\+\\+\\+\end{array}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&-1&-2&-4&-3\\0&0&1&2&4&3\\0&0&-1&-3&-4&-3\end{array}\right]\begin{array}{l}\\\\+\\\\\end{array}\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}2&-1&1&2&3&2\\0&0&1&2&4&3\\0&0&0&-1&0&0\end{array}\right]$$

(вторую строку матрицы, эквивалентной матрице *B*, вычеркнули как пропорциональную третьей строке).

Очевидно, что последняя матрица, эквивалентная матрице *B*, имеет минор $M_3(B)$,

не равный нулю, а миноров четвёртого порядка полученная матрица не имеет, поскольку у неё только три строки:

$$M_3(B)=\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы B равен трём. Следовательно, ранг матрицы *B* (по определению ранга матрицы) тоже равен трём. Rang *B* = 3. Этот же минор $M_3(B)$ является минором основной матрицы системы, то есть $M_3(B)=M_3(A)=1\neq 0$, значит, ранг основой матрицы системы тоже равен трём: $\mathrm{Rang}\,A=3$.

По теореме Кронекера – Капелли данная система совместна $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = r = 3$. Кроме того, $r = 3 < 5 = n$

(n – число неизвестных данной системы).

Выберем минор $M_3(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ в качестве базисного минора, и поскольку он составлен из коэффициентов при неизвестных x_2, x_3, x_4, их и возьмём в качестве базисных неизвестных. Остальные – x_1 и x_5 тогда будут свободными.

Запишем систему уравнений, соответствующую матрице ступенчатого вида

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -x_4 = 0. \end{cases}$$

и перенесём свободные неизвестные x_1 и x_5 к свободным членам.

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 - 2x_1 - 3x_5, \\ \qquad x_3 + 2x_4 = 3 - 4x_5, \\ \qquad\qquad -x_4 = 0. \end{cases}$$

Откуда обратным ходом метода Гаусса получим общее решение: Из последнего уравнения укороченной системы получим $x_4 = 0$.

Из второго уравнения будем иметь:

$x_3 + 2 \cdot 0 = 3 - 4x_5; \qquad x_3 = 3 - 4x_5.$

Из первого уравнения найдём:

$$-x_2+(3-4x_5)+2\cdot 0=2-3x_5-2x_1; \quad -x_2=2-3x_5-2x_1-3+4x_5;$$

$x_2=1+2x_1-x_5$.

Проверкой убеждаемся, что система решена верно.

$$2x_1-(1+2x_1-x_5)+(3-4x_5)+2\cdot 0+3x_5=2,$$

$$6x_1-3(1+2x_1-x_5)+2(3-4x_5)+4\cdot 0+5x_5=3,$$

$$6x_1-3(1+2x_1-x_5)+4(3-4x_5)+8\cdot 0+13x_5=9,$$

$$4x_1-2(1+2x_1-x_5)+(3-4x_5)+0+2x_5=1.$$

Бесконечное множество частных решений можно получить из общего, задавая свободные неизвестные равными произвольным числам. Например, пусть $x_1=x_5=0$.

Тогда частное решение получится такое: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=0$, $x_5=0$.

1.13. Системы однородных линейных уравнений (СОЛУ)

Определение СОЛУ	Система линейных уравнений называется **однородной**, если **свободные члены** во всех уравнениях этой системы равны **нулю**. $AX=0$ – матричная запись СОЛУ.

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, поскольку имеет так называемое **тривиальное решение**, когда **все** неизвестные равны **нулю**: $X=0$, $\Rightarrow$ $A\cdot 0=0$.

Ранги основной и расширенной матриц системы однородных линейных уравнений всегда равны, так как вычеркивание нулевого столбца свободных членов не изменяет ранга матрицы, поэтому **по теореме Кронекера-Капели** СОЛУ всегда совместна.

Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система строк (столбцов, векторов, решений) $x_1, x_2, ..., x_n$ называется **линейно зависимой**, если их линейная комбинация равна нулю: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, когда **не все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ — нули, и называется **линейно независимой**, если их линейная комбинация равна нулю: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, когда **все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ — нули.

Определение ФСЧР СОЛУ	**Фундаментальной системой частных решений** системы однородных линейных уравнений называется **система линейно независимых частных решений**, число решений в которой равно числу свободных неизвестных системы.

Если n – число неизвестных системы, r – её ранг, то ФСЧР СОЛУ должна содержать $k = n - r$ линейно независимых частных решений.

Фундаментальную систему частных решений получают обычно, последовательно приравнивая свободные неизвестные элементам строк единичной матрицы E порядка $k = n - r$.

Пример 1.20.

Найдём общее решение и ФСЧР СОЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$Rang\, A = 3$.

Пусть базисным будет минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$,

образованный 1-м, 2-м, 4-м столбцами.

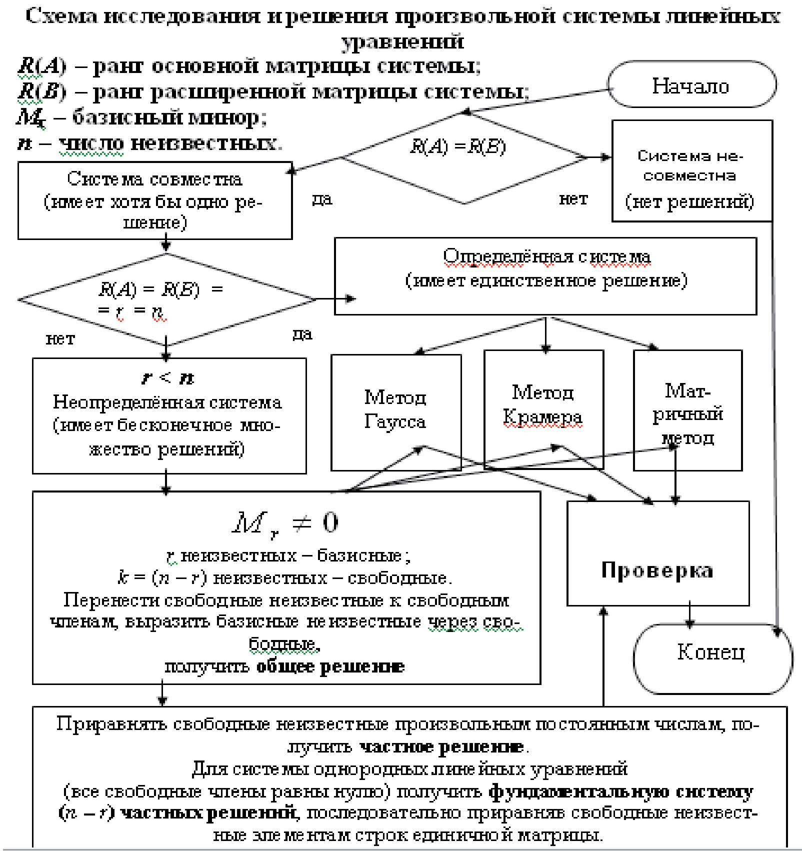
Значит, свободную неизвестную выбираем x_3.

Таким образом, $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = -x_3, \\ x_2 + x_4 = x_3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$

Обратным ходом метода Гаусса находим общее решение: $x_4 = 0; \quad x_2 = x_3; \quad x_1 = 0$.

ФСЧР содержит одно решение $(k = n - r = 4 - 3 = 1)$, которое можно получить, например, полагая $x_3 = 1$: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Проверку сделайте самостоятельно.



1.14. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим, как применяется обратная матрица для решения СЛУ.

Системy линейных уравнений можно записать в матричном виде, применяя умножение матриц $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $AX = B$.

Если умножить обе части этого матричного уравнения на обратную матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B; \qquad EX = A^{-1}B;$$

$$X = A^{-1}B,$$

то матрица – столбец X будет представлять собой решение системы линейных уравнений, которое можно найти умножением матрицы, обратной основной матрице системы A^{-1} на матрицу – столбец B:

$$X = A^{-1}B.$$

Такой метод решения квадратной системы линейных уравнений называется **матричным**.

Пример 1.21. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

матричным методом.

Выпишем основную матрицу системы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \ \det A = 12 \neq 0,$$

следовательно, система линейных уравнений $AX = B$ имеет единственное решение

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 8 \\ 7 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -12 \\ 36 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

$$2\cdot(-1)+3\cdot 3+5=12,$$
$$2\cdot(-1)+3+3\cdot 5=16,$$
$$3\cdot(-1)+2\cdot 3+5=8.$$

1.15. Примеры решения СЛУ средствами системы MathCAD

Пример 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений матричным методом

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 12 \quad B := \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(A) = 3$$

Система имеет единственное решение

$$X := A^{-1}\cdot B \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверка $\quad A\cdot X = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

Пример 2.

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ -1 & -6 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad B1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(A1) = 3$$

F - базисный минор.
1-я, 2-я, 3-я неизвестные - базисные,
4-я - свободная.
Переносим свободную неизвестную к свободным членам, получаем матрицу D(c).

$$F := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad |F| = -3$$

Общее решение X(c)

$$D(c) := \begin{pmatrix} 1+2\cdot c \\ 1 \\ 1+c \end{pmatrix} \quad X(c) := F^{-1}\cdot D(c) \quad X(c) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+c \\ \frac{-1}{3}-c \\ \frac{2}{3}+c \end{pmatrix}$$

$$c := 0 \quad X1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad A1\cdot X1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Пример 3.

$$A0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad |F1| = 0$$

$$\mathrm{rank}(A0) = 3$$

F1 не может быть базисным минором. Поищем другой.

$$F0 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |F0| = -2$$

Базисные неизвестные 1-я, 2-я, 4-я; свободные - 3-я, 5-я.

$$D0(u,v) := \begin{pmatrix} -u-2\cdot v \\ u-v \\ u-2\cdot v \end{pmatrix}$$

$$X0(u,v) := F0^{-1}\cdot D0(u,v) \quad X0(u,v) \rightarrow \begin{pmatrix} -v \\ u \\ -v \end{pmatrix}$$

Общее решение X0(u,v)

ФСЧР

$$X0(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X0(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$A0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A0\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.16. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Применим линейную алгебру для решения экономических задач.

Эффективное ведение хозяйства предполагает наличие *баланса* между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны – как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Для наглядного выражения взаимной связи между отраслями пользуются определённого вида таблицами, называемыми таблицами межотраслевого баланса. Идея таких таблиц была сформулирована в работах советских экономистов, а первая таблица опубликована ЦСУ в 1926 г. Однако вполне развитая математическая модель межотраслевого баланса, допускающая широкие возможности анализа, появилась позже (1936 г.) в трудах американского экономиста В. Леонтьева. (В 1925 г. В Леонтьев эмигрировал в США из СССР. В 1936 г. ему была присуждена Нобелевская премия за работы в области экономики). Рассмотрим наиболее простой вариант такой модели, сохраняющий, однако, её основное математическое содержание.

Предположим, что вся производящая сфера хозяйства разбита на некоторое число отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причём разные отрасли производят разные продукты. Разумеется, такое представление об отрасли является в значительной мере абстракцией, так как в реальной экономике отрасль определяется не только названием выпускаемого продукта, а многими другими факторами. Однако представление об отрасли в указанном выше смысле (как «чистой» отрасли) всё же полезно, так как оно позволяет провести анализ сложившейся технологической структуры хозяйства, изучить функционирование хозяйства «в первом приближении».

Итак, предполагаем, что имеется n различных отраслей $O_1, O_2, ..., O_n$, каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определённом промежутке времени $[T_0, T_1]$ и введём следующие обозначения:

x_i – общий объём продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый *валовой выпуск* отрасли i;

x_{ij} – объём продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i – объём продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере – объём *конечного потребления*. Этот объём составляет обычно 75% всей производственной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указанные величины можно свести в таблицу.

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
x_{11} x_{12} ... x_{1n} x_{21} x_{22} ... x_{2n} ... ... x_{n1} x_{n2} ... x_{nn}	y_1 y_2 ... y_n	x_1 x_2 ... x_n

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом $i = 1, 2, ..., n$ должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i,$$

означающее, что **валовой** выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное

$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$ и непроизводственное потребление, равное y_i. Будем назвать соотношения $x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i$ *соотношениями баланса.*

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т.п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевой балансы. Для определённости в дальнейшем будем иметь ввиду (если не оговорено противное) стоимостной баланс.

В Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики в послевоенный период, обратил внимание на важное обстоятельство.

А именно, величины $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это обусловлено примерным постоянством используемой технологии.

В соответствии со сказанным сделаем такое допущение: для выпуска любого объёма x_j продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объёму производимой продукции. Это положение постулирует, как говорят, *линейность* существующей технологии. Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек, например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль.

Итак, согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \qquad (i,\ j = 1, ..., n)$$

Коэффициенты a_{ij} называют *коэффициентами прямых затрат* (коэффициентами материалоёмкости).

В предположении линейности соотношения баланса принимают вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n1} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n,
\end{aligned}
$$

Или в матричной записи $X = AX + Y$, где

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.
$$

Матрица X называется *вектором валового выпуска*, матрица Y – *вектором конечного портебления*, а матрица A – *матрицей прямых заират*. Соотношение баланса называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов X и Y это соотношение называют также моделью Леонтьеа.

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода $[T_0, T_1]$ задаётся вектор Y конечного потребления. Требуется определить вектор X валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления. В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений модели Леонтьева с неизвестным вектором X при заданных матрице A и векторе Y. При этом нужно иметь ввиду следующие особенности системы соотношения баланса:

1. Все элементы матрицы A и вектора Y неотрицательны.(это вытекает из экономического смысла A и Y). Для краткости будем говорить о неотрицательности самой матрицы A и вектора Y и записывать это так: $A \geq 0, \quad Y \geq 0$.

2. Все элементы вектора X также должны быть неотрицательными: $X \geq 0$.

Замечание. Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае из соотношения баланса видно, что a_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ (1 руб.).

Таким образом, a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 руб. продукции отрасли j. Отсюда, между прочим, видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При таком подходе уже не необязательно рассматривать «чистые», т.е. однопродуктовые отрасли. Ведь и в случае многопродуктовых отраслей тоже можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск 1 руб. продукции другой отрасли; скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 руб. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы A (производство средств производства) в выпуск 1 руб. продукции группы B (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Найдём решение уравнения $X = AX + Y$.

Для этого перенесём матрицу AX в левую часть уравнения,

вынесем матрицу X за скобки: $(E - A)X = Y$

и умножим обе части уравнения на матрицу $(E - A)^{-1}$ слева:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

1.17. Продуктивная модель Леонтьева

Определение продуктивной матрицы	Матрица $A \geq 0$ называется **продуктивной**, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$ уравнения $X = AX + Y$. В этом случае модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется продуктивной.

Итак, модель Леонтьева продуктивна, если любой вектор $Y \geq 0$ конечного потребления можно получить при подходящем валовом выпуске $X \geq 0$.

Оказывается, нет необходимости требовать существования решения $X \geq 0$ уравнения $X = AX + Y$ для любого вектора $Y \geq 0$. Достаточно, чтобы такое решение существовало хотя бы для одного вектора $Y \geq 0$.

Приведём без доказательства теорему, называемую первым критерием продуктивности.

Условимся в дальнейшем писать $Y > 0$ и называть вектор Y положительным, если все его координаты строго положительны.

Теорема (1-й критерий продуктивности)	Если $A \geq 0$ и для некоторого положительного вектора Y^* уравнение $X^* = AX^* + Y^*$ имеет решение $X^* > 0$, то матрица A продуктивна.

Следующая теорема даёт более эффективное условие продуктивности, чем первый критерий продуктивности.

Теорема (2-й критерий продуктивности)	Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E-A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Доказательство. Если $(E-A)^{-1}$ существует и $(E-A)^{-1} \geq 0$, то из формулы $X = (E-A)^{-1} \cdot Y$ следует продуктивность матрицы X.

Обратно, пусть матрица A продуктивна. Рассмотрим следующие системы уравнений:

$(E-A) \cdot X = E_1; \quad (E-A) \cdot X = E_2; \ldots, \quad (E-A) \cdot X = E_n,$

где $E_1, E_2, \ldots, E_n$ – столбцы единичной матрицы.

Каждая из этих систем в силу продуктивности матрицы A имеет неотрицательное решение, т.е. существуют такие векторы (столбцы)

$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, \ldots, C_n \geq 0,$

что $(E-A) \cdot C_1 = E_1; \quad (E-A) \cdot C_2 = E_2; \ldots, \quad (E-A) \cdot C_n = E_n.$

Обозначим через C матрицу, составленную из столбцов $C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, \ldots, C_n \geq 0$. Тогда вместо n равенств $(E-A) \cdot C_1 = E_1; \quad (E-A) \cdot C_2 = E_2; \ldots, \quad (E-A) \cdot C_n = E_n$ можно написать одно: $(E-A) \cdot C = E$. Следовательно, матрица $(E-A)$ имеет обратную C, причём $C \geq 0$. Теорема доказана.

Пример 1.22. Исследуем на продуктивность матрицу $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

В данном случае $E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица $(E-A)^{-1}$ существует и равна $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}35 & 30\\ 45 & 40\end{pmatrix}$.

Очевидно, эта матрица неотрицательна, следовательно, продуктивна.

Продолжим анализ продуктивности модели Леонтьева.

Пусть q – некоторое число. Если ряд

$$1+q+q^2+...+q^n+...,$$

являющийся бесконечно убывающей геометрической прогрессией, сходится (условием этого является требование $|q|<1$),

то его сумма равна $S=\dfrac{1}{1-q}=(1-q)^{-1}$.

Убедимся, что аналогичное предложение имеет место при замене числа q матрицей A.

Лемма. Если ряд из матриц

$E+A+A^2+...+A^n+...$

сходится, то его сумма есть матрица $(E-A)^{-1}$.

Доказательство. Пусть ряд из матриц $E+A+A^2+...+A^n+...$сходится. Покажем, что матрица $(E-A)$ имеет обратную.

Допустим противное: матрица $(E-A)$ – вырожденная, и обратной матрицы $(E-A)^{-1}$ не существует. Рассмотрим тождество

$$(E+A+A^2+...+A^{k-1})(E-A)=E-A^k.$$

Уравнение $BX=0$ с вырожденной матрицей B обязательно имеет ненулевое решение. Следовательно, существует вектор $X\neq 0$, такой, что $(E-A)X=0$.

Поэтому

$$(E + A + A^2 + ... + A^{k-1})(E - A)X = 0 = (E - A^k)X \text{, или } X = A^k X .$$

Но $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ в силу необходимого условия сходимости ряда. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} A^k X = 0$, т.е. $X = 0$ вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает, что матрица $(E - A)$ имеет обратную $(E - A)^{-1}$.

Получим обратную матрицу $(E - A)^{-1}$.

$$(E + A + A^2 + ... + A^{k-1}) = (E - A^k)(E - A^k)^{-1}.$$

С учётом того, что $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, будем иметь

$$\lim_{k\to\infty} (E + A + A^2 + ... + A^{k-1}) = (E - A^k)^{-1}.$$

Итак, сумма ряда $E + A + A^2 + ... + A^n + ...$ существует и равна $(E - A)^{-1}$. Лемма доказана.

Теорема (3-й критерий продуктивности	Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда сходится бесконечный ряд $E + A + A^2 + ... + A^n + ...$

Доказательство. Пусть ряд $E + A + A^2 + ... + A^n + ...$ сходится. Согласно лемме его сумма равна $(E - A)^{-1}$. При этом сумма ряда будет неотрицательной, поскольку все члены ряда – неотрицательны. Итак, матрица $(E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна. Отсюда в соответствии
с 1-м критерием продуктивности следует продуктивность матрицы A.

Обратное утверждение (если матрица A продуктивна, то ряд $E + A + A^2 + ... + A^n + ...$ сходится) примем без доказательства.

Полученный 3-й критерий продуктивности матрицы A в ряде случаев может быть использован для проверки матрицы A на продуктивность. Покажем, например, что если сумма элементов любого столбца неотрицательной матрицы A меньше единицы (в стоимостной модели баланса это означает, что при любом $j = 1, 2, ..., n$ суммарный вклад всех отраслей в выпуск 1 руб. продукции отрасли j меньше единицы, т.е. отрасль j рентабельна), то матрица A продуктивна. Действительно, пусть q – наибольшая из указанных сумм, $q < 1$. Ясно, что тогда все элементы матрицы A не превосходят q. Из правила перемножения матриц следует, что любой элемент матрицы A^2 не превосходит q^2:

$$(A^2)_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + ... + a_{in}a_{nj} \le q(a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}) \le q^2.$$

Точно так же получим, что элементы матрицы A^3 не превосходят q^3 и т.д. Отсюда следует сходимость ряда $E + A + A^2 + ... + A^n + ...$, а значит, и продуктивность матрицы A.

Пример 1.23. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

сумма элементов каждого столбца матрицы A меньше единицы. Следовательно, матрица A продуктивна.

Аналогичным образом доказывается, что если в неотрицательной матрице A сумма элементов любой строки меньше единицы, то матрица A продуктивна.

Определение запаса продуктивности	Пусть A – неотрицательная продуктивная матрица. **Запасом продуктивности** матрицы A назовём такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1 + \alpha$ продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$ – не продуктивна.

Пример 1.24. Выясним, какой запас продуктивности имеет матрица $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,9 & 0,3 \end{pmatrix}$.

В данном случае

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - 0,2\lambda & -0,6\lambda \\ -0,9\lambda & 1 - 0,3\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$\Delta = \left| E - \lambda A \right| = (1 - 0,2\lambda)(1 - 0,3\lambda) - 0,54\lambda^2 = -0,48\lambda^2 - 0,5\lambda + 1$.

Обратной матрицей будет

$$(E - \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 - 0,3\lambda & 0,6\lambda \\ 0,9\lambda & 1 - 0,2\lambda \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности матрицы λA нужно, чтобы все элементы обратной матрицы были неотрицательны. Это возможно, если $\Delta > 0$, $1 - 0,2\lambda \geq 0$, $1 - 0,3\lambda \geq 0$. Приближенные корни уравнения $\Delta = 0$ равны $\lambda_1 = -2,06$ и $\lambda_2 = 1,015$, поэтому $(E - \lambda A)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda < 1,015$. При $\lambda < \lambda_2$ матрица λA будет продуктивной, при $\lambda = \lambda_2$ – нет. Запас продуктивности матрицы A равен $0,015$. Очевидно, матрица A находится где-то «на пределе» продуктивности.

Обычно матрицы A межотраслевого баланса обладают большим запасом продуктивности. Например, для межотраслевых балансов в бывшем СССР такой запас, как правило, был больше $0,4$. Рост производственных расходов (в частности, учет затрат на преодоление негативных воздействий производства на окружающую среду) вызывает увеличение элементов матрицы A и, как следствие, снижение ее запаса продуктивности.

1.18. Вектор полных затрат

Пусть $A \geq 0$. Равенство

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + ... + A^n + ...$$

справедливо в том и только в том случае, когда матрица A продуктивна. Это равенство имеет интересный экономический смысл. Чтобы убедиться в этом, с учетом формулы $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$ получим

$$X = Y + AY + A^2Y + ... + A^nY + ...$$

В чем смысл распадения вектора X на слагаемые Y, AY, A^2Y и т.д.?

Для получения валового выпуска X, обеспечивающего конечное потребление Y, нужно прежде всего произвести комбинацию товаров, описываемую вектором Y. Но этого мало, так как для получения Y надо затратить (а значит, сначала произвести) продукцию, описываемую вектором AY. Но и этого не достаточно в связи с тем, что для получения AY нужно произвести дополнительные затраты, описываемые вектором $A(AY) = A^2Y$ и т.д. В итоге приходим к заключению, что весь валовой выпуск X должен составляться из слагаемых Y, AY, A^2Y и т.д., что и зафиксировано в формуле. В соответствии с этим рассуждением сумму $Y + AY + A^2Y + ... + A^nY + ...$ называют вектором полных затрат, а сделанное выше заключение формулируют так: **вектор валового продукта совпадает с вектором полных затрат.**

Чтобы сделать это заключение более наглядным, рассмотрим **пример.**

Пусть речь идет о блоке трех промышленных отраслей:

1) металлургия;
2) производство электроэнергии;
3) угледобыча.

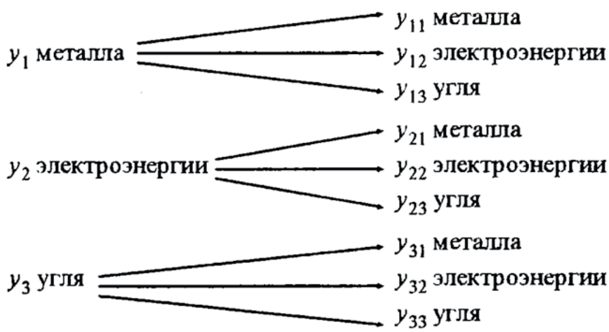
Для получения конечного выпуска $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ необходимо, прежде всего, произвести:

y_1 тонн металла;

y_2 кВт-ч электроэнергии;

y_3 тонн угля.

Но для производства y_1 тонн металла необходимо затратить (а значит, сначала произвести) какие-то количества металла, электроэнергии, угля. То же самое справедливо и в отношении производства y_2 кВт-ч электроэнергии и y_3 тонн угля:



В свою очередь, для производства y_{11} тонн металла необходимо затратить какое-то количество металла, электричества, угля и т.д. Таким образом, искомый валовой выпуск X представляет собой сумму затрат: 0-го порядка (вектор Y), 1-го порядка (вектор AY), 2-го порядка (вектор A^2Y и т.д.

1.19. Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева – так называемую модель равновесных цен. Пусть, как и прежде, A – матрица прямых затрат, X – вектор валового выпуска. Обозначим через P – вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли. Тогда, например, первая отрасль получит доход, равный p_1x_1. Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли – в объеме a_{21}, n-й отрасли – в объеме a_{n1} и т.д. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, обозначим V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1, получаем

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + v_1,$$

где $v_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Подобным же образом получаем для остальных отраслей

$$p_2 = (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n) + v_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n = (a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n) + v_n.$$

В матричной форме эти равенства можно записать $P = A^T P + W$, где W – вектор норм добавленной стоимости.

Очевидно, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева с той лишь разницей, что вектор валового продукта X заменен на вектор цен P, Y – на W, а A – на A^T.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющуюся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 1.25. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство.

Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$ – транспонированная матрица прямых затрат,

$W = (4;10;4)^T$ – вектор норм добавленной стоимости.

Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой

$$P = C^T W,$$

где $C^T = (E - A^T)^{-1}$ – транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$C^T = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $P = C^T W = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $W = (5{,}11;\, 10;\, 4)^T$, находим, что

$$P = C^T W = \begin{pmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5%, второй – на 3,5%, третьей – на 4,17%. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

Глава 2. Элементы линейного программирования

2.1. Предисловие к главе 2

Теория систем линейных неравенств и методов их решения подвергалась глубокой разработке во второй половине XX века. Это объясняется тем, что системы линейных неравенств и есть тот математический аппарат, на котором базируется анализ проблем линейного программирования и методы их решения.

Теория систем линейных неравенств возникла под влиянием работ М.В. Остроградского по аналитической механике, работ П.Л. Чебышева по теории приближения функций и Г.Ф. Воронова по теории чисел. Работы М.В. Остроградского были затем продолжены специалистами по аналитической механике. Идеи П.Л. Чебышева развивались Е.Я. Ремезом, В.К. Ивановым и др.

Геометрическое направление теории систем линейных неравенств (в отличие от экстремального направления) ведёт начало от Остроградского и Воронова и посвящено изучению геометрических свойств того выпуклого многогранника n-мерного пространства, который представляет собой решение системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m).$$

Результаты, относящиеся к этому направлению, тесно соприкасаются, в частности, с теорией выпуклых тел в n-мерном пространстве.

Исследованием таких математических проблем, имеющих первостепенную важность для теории линейного программирования, как теория выпуклых тел, системы линейных неравенств и др. занимались многие советские математики – А.Д. Александров, С.Н. Черников и др.

Отдельные работы, касающиеся частных вопросов линейного программирования, относятся к ещё к началу 30-х годов XX века. Так, в 1931 г. в Венгрии была опубликована статья Эгервари «Комбинаторные свойства матриц», посвящённая частному случаю транспортной задачи. На основе результатов этой статьи впоследствии был разработан метод решения транспортной задачи, называемый венгерским.

В 1939 г. Л.В. Канторович в работе «Математические методы организации и планирования производства» (изд. ЛГУ, 1939 г.) рассмотрел широкий круг вопросов организации и планирования производства, в которых из большого числа различных вариантов требуется выбрать оптимальный. Анализ этих вопросов приводит к экстремальным математическим задачам, в которых переменные подчинены линейным связям и ограничениям. В этой же работе был предложен весьма универсальный и эффективный метод решения подобных задач – метод разрешающих множителей.

В последних работах Л.В. Канторовича и других советских учёных методы линейного программирования получают дальнейшее развитие и углубление.

К 1947-1949 гг. относится начало интенсивной разработки линейного программирования в США. Эти работы были организованы в связи с нуждами военного ведомства, но в скором времени они приняли более широкий размах. В частности, их результаты нашли применение в самых разнообразных областях цехового, заводского, внутрифирменного, торгового планирования.

Первое описание наиболее часто применяемого в практике симплексного метода, разработанного Дж. Данцигом в 1947-48 гг., опубликовано в 1951 г. Советскими и зарубежными учёными подвергались разработке проблемы двойственности задач линейного программирования, связь последнего с теорией игр, созданы новые и продолжаются совершенствоваться вычислительные методы решении задач линейного программирования, решаются проблемы реализации компьютерных методов линейного программирования.

В настоящей монографии применяется оригинальный подход к решению задач линейного программирования, предложенный в [4]: рекомендуется использовать таблицы Гаусса. В таблице Гаусса целевую функцию помещают в последней строке, а базисные неизвестные легко узнаются по столбцам с одной единицей и остальными нулями (столбцам единичной матрицы). Теорема оптимальности допустимого решения выражается в терминах знаков целевой функции, и при этом отпадает необходимость дополнительных оценок, а таблица Гаусса компактна, занимает в 2 – 3 раза меньше места, чем обычные симплексные таблицы, и вполне обозрима. Случаи, когда задача не имеет решения по тем или иным причинам (неограниченность функции или несовместность условий ограничений задачи), также легко обнаруживаются в таблицах Гаусса.

Транспортная задача представляется почти стандартным способом, используется лишь метод наименьших тарифов для получения начального опорного решения. Решение транспортной задачи считается оптимальным, если среди оценок свободных клеток нет отрицательных (что представляется более естественным).

2.2. Векторные пространства

Определение линейного (векторного) пространства	Множество L элементов любой природы, называемых векторами и обозначаемых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ называется **линейным или векторным пространством**, если 1) $(\forall \bar{x} \in L, \forall \bar{y} \in L): \exists (\bar{x} + \bar{y}) \in L$ (для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из множества L существует вектор $\bar{x} + \bar{y}$, называемый **суммой векторов** и принадлежащий этому же множеству L); 2) $(\forall \bar{x}, \forall \alpha): \exists \alpha \bar{x} \in L$ (для любого вектора $\bar{x}$ из множества L и любого числа α существует вектор $\alpha \bar{x}$, называемый **произведением вектора $\bar{x}$ на число α** и принадлежащий этому же множеству L). При этом операции (1, 2) сложения векторов и умножения вектора на число должны удовлетворять следующим **аксиомам**: а) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in L, \forall \bar{y} \in L)$; б) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ $(\forall \bar{x} \in L, \forall \bar{y} \in L, \forall \bar{z} \in L)$; в) $\exists \bar{0} : \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in L, \bar{0} \in L)$, вектор $\bar{0}$ называется **нулевым**; г) $\exists \overline{x'} : \bar{x} + \overline{x'} = \bar{0}$ $(\forall \bar{x} \in L, \overline{x'} \in L, \bar{0} \in L)$, вектор $\overline{x'}$ называется **противоположным вектору** $\bar{x}$; д) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in L)$; е) $\alpha(\beta \bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in L$, α, β – любые числа); ж) $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$ $(\forall \bar{x} \in L$, α, β – любые числа); з) $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$ $(\forall \bar{x} \in L, \forall \bar{y} \in L$, α – любое число)

Из аксиом а) - з) можно получить ряд простейших свойств линейных пространств.

1) В произвольном линейном пространстве существует единственный нулевой элемент.

2) Для каждого элемента $\overline{x} \in L$ существует единственный противоположный элемент $\overline{x^{/}} \in L$.

3) $0 \cdot \overline{x} = \overline{0}$.

4) $-1 \cdot \overline{x} = \overline{x^{/}}$.

5) $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

Приведем **примеры** конкретных линейных пространств.

1. Множество R всех действительных чисел. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения и умножения действительных чисел.

2. Множества V_1, V_2, V_3 всех свободных векторов на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно.

Свободные векторы **изображают** направленным отрезком $\overline{AB}$.

В этом случае одна из ограничивающих вектор точек принимается за начало (точка A),

а вторая (точка B) – за конец:

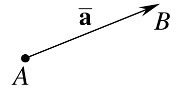


Рис. 2.1

Для **нулевого** вектора начало и конец совпадают. Нулевой вектор не имеет определённого направления.

Векторы складывают по правилу треугольников и по правилу параллелограмма.

Правило треугольников	Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Возьмём произвольную точку C и построим последовательно векторы $\overline{CA} = \overline{a}$ и $\overline{AB} = \overline{b}$. Вектор $\overline{CB}$, соединяющий начало вектора $\overline{CA} = \overline{a}$ с концом вектора $\overline{AB} = \overline{b}$ служит изображением суммы векторов $\overline{a} + \overline{b}$.

Рис. 2.2

Правило параллелограмма	Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Возьмём произвольную точку C и построим последовательно векторы $\overline{CA} = \overline{a}$ и $\overline{CD} = \overline{b}$. Вектор $\overline{CB}$, имеющий начало в точке C и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{CA} = \overline{a}$ и $\overline{CD} = \overline{b}$, служит изображением суммы векторов $\overline{a} + \overline{b}$.

3. Множество R_n упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых арифметическими векторами (или множество матриц-строк длины n, элементами которых являются действительные числа): $R_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, ..., n\}$.

Для любых элементов $x=(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)$ и $y=(y_1,\,y_2,\,...,\,y_n)$ из R_n определим операцию сложения и умножения на число следующим образом $x+y=(x_1+y_1,\,x_2+y_2,\,...,x_n+y_n)$; $\lambda x=(\lambda x_1,\,\lambda x_2,\,...,\,\lambda x_n)$.

Нулевой и противоположный элемент имеют вид: $\bar{0}=(0,0,...,0)$, $\overline{x^{/}}=(-x_1,-x_2,...,-x_n)$.

Иногда арифметические векторы записывают в виде столбцов.

4. Множество $M_{m\times n}$ всех вещественных матриц размера $m\times n$. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число определены в 1-й главе.

5. Множество $C[a,b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения функций и умножения функций на число.

6. Множество P_n всех алгебраических многочленов переменной x и степени, **не превышающей** n:

$P_n=\{f(x)=a_1+a_1x+...+a_nx \quad | \quad a_i\in R, \quad i=1,2,...,n\}$. Операции сложения и умножения на число являются обычными операциями сложения многочленов и умножения многочленов на число. Число $0\in R$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется нулевым многочленом.

7. Множество всех алгебраических многочленов **ровно** степени n **не является** линейным пространством. Сумма таких многочленов может оказаться степени ниже n. Например, при сложении $f(x)=x^3-3x^2+5$ и $g(x)=-x^3-1$ получим многочлен второй степени, не принадлежащий рассматриваемому множеству многочленов третьей степени: $f(x)+g(x)=-3x^2+4$.

8. Рассмотрим множество R_+ всех действительных положительных чисел. Это множество **не является** линейным пространством, т.к. операция умножения на отрицательное число выводит их этого множества.

2.3. Линейная зависимость

Определение линейной комбинации элементов	**Линейной комбинацией** элементов $e_1, e_2, ..., e_n \in L$ называются выражения вида $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$ – действительные коэффициенты линейной комбинации.

Определение нетривиальной и тривиальной линейной комбинации	Линейная комбинация элементов называется **тривиальной,** если **все** её **коэффициенты равны нулю** и ***нетривиальной***, если среди коэффициентов линейной комбинации ***хотя бы один*** отличен от нуля.

Определение линейной зависимости (независимости) системы	Система элементов $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ (векторов, столбцов, строк, решений) называется **линейно зависимой**, если существует **нетривиальная** линейная комбинация этих элементов равная нулевому элементу, т.е. если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in R$, одновременно не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$. и называется **линейно независимой**, если **только тривиальная** линейная комбинация этих элементов равна нулевому элементу: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, т.е. когда **все** коэффициенты линейной комбинации $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ **— нули**.

Теорема (критерий линейной зависимости системы)	Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда, по крайней мере, **один** из векторов является **линейной комбинацией остальных.**

Доказательство. Пусть система векторов линейно зависима. Тогда имеет место соотношение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$, причём среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ есть отличные от нуля. Допустим, например, что $\lambda_1 \neq 0$. Разделим соотношение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ на это число $\lambda_1 \neq 0$ и выразим вектор x_1 через остальные векторы: $x_1 = (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})x_2 + (-\frac{\lambda_3}{\lambda_1})x_3 + ... + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_1})x_n$.

То есть вектор x_1 является линейной комбинацией остальных векторов.

Обратно, пусть вектор x_1 является линейной комбинацией остальных векторов: $x_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$, или $(-1)x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n = 0$. Так как среди чисел $\lambda_k \quad (k = 1, 2, ..., n)$ есть $\lambda_1 = -1 \neq 0$, то система векторов линейно зависима.

Замечание. Если система элементов $e_1, e_2, ..., e_n \in L$ линейно независима, то все элементы являются «уникальными», т.к. никакой элемент нельзя выразить как линейную комбинацию остальных.

Предлагается доказать самостоятельно следующие теоремы.

Теорема (о системе с нулевым вектором)	Система векторов, содержащая **нулевой** вектор, **линейно зависима.**

Теорема (о подсистеме векторов)	Если **подсистема** (часть) данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.

Прежде**,** чем рассматривать примеры линейной зависимости (независимости) векторов, предварительно определим понятия коллинеарных, сонаправленных, противоположно направленных, компланарных векторов.

Определение коллинеарных (параллельных) векторов	Векторы, расположенные на одной или параллельных прямых, называют **коллинеарными**.

Пусть коллинеарные векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ расположены на параллельных прямых. Если концы коллинеарных векторов лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала, то они называются сонаправленными, что обозначается так: $\overline{x}\uparrow\uparrow\overline{y}$. В противном случае коллениарные векторы называются противоположно направленными, и это обозначается так: $\overline{x}\uparrow\downarrow\overline{y}$.

Если коллинеарные векторы расположены на одной прямой и приведены к одному началу, то один из сонаправленных векторов целиком содержит в себе другой вектор.

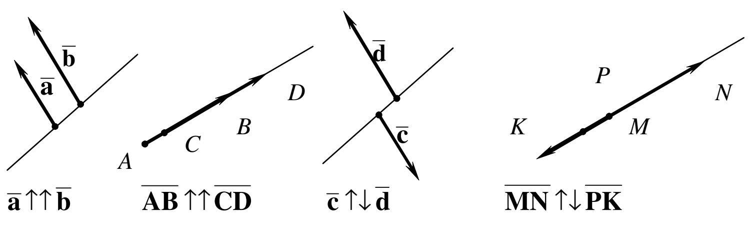


Рис. 2.3

При умножении вектора на положительное вещественное число получается сонаправленный вектор, а при умножении на отрицательное число получается противоположно направленный вектор.

Определение ортогональных (перпендикулярных) векторов	Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, расположенные на перпендикулярных прямых, называют **ортогональными**. Ортогональные векторы обозначают: $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Определение компланарных векторов	Векторы, расположенные в одной или параллельных плоскостях, называют **компланарными**.

Пример 2.1 В линейных пространствах V_2, V_3 всех свободных векторов на плоскости и в пространстве два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарные; три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны; любые четыре вектора линейно зависимы.

Пример 2.2. В арифметическом линейном пространстве R_n векторы $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$,…, $e_n = (0,0,0,...,1)$ линейно независимы.

Действительно, линейная комбинация векторов $e_1, e_2, ..., e_n \in R_n$ является вектором $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, который равен нулевому вектору тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

2.4. Размерность линейных пространств, базис и координаты

Определение размерности линейного пространства	Линейное пространство R_n называется n-**мерным,** если в нём существует система n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ вектора, линейно зависима.

Пример 2.3. Система двух ненулевых коллинеарных векторов $\overline{x}$ и $\lambda\overline{x}$ линейно зависима, т.к. $\overline{x}+\lambda\overline{x}=(1+\lambda)\overline{x}=\overline{0}$ при $\lambda=-1\neq 0$. Это означает, что система коллинеарных векторов образует одномерное пространство R_1.

Определение базиса	Любая совокупность из n линейно независимых векторов n -мерного линейного пространства называется **базисом** этого пространства.

Пример 2.4. В одномерном векторном пространстве R_1 любой ненулевой вектор является базисным вектором.

Теорема (основная)	**Любой вектор линейного пространства R_n можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов**.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ какой-либо базис R_n и x произвольный вектор этого пространства. Система векторов x и $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно зависима как состоящая из $(n+1)$ вектора. По определению это означает, что линейная комбинация этих векторов равна нулю: $\lambda_0 x+\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+...+\lambda_n e_n=0$, причём не все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Очевидно, что $\lambda_0 \neq 0$, т. к. в противном случае система базисных векторов была бы линейно зависимой, что невозможно. Поэтому вектор x представляется линейной комбинацией базисных векторов:

$$x = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_0})e_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_0})e_2 + ... + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_0})e_n .$$

Докажем единственность линейной комбинации

$$x = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_0})e_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_0})e_2 + ... + (-\frac{\lambda_n}{\lambda_0})e_n .$$

Допустим, что вектор x представлен двумя линейными комбинациями

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \quad \text{и} \quad x = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n .$$

Вычитая второе равенство из первого, получим:

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0 .$$

Так как базисные векторы линейно независимы,
то $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$ и теорема доказана.

Пример 2.5. В двумерном пространстве R_2 любые два неколлинеарных ненулевых вектора можно выбрать в качестве базиса, поскольку, применяя, например, правило параллелограмма, можно любой третий вектор выразить через линейную комбинацию базисных векторов.

Пример 2.6. Фундаментальная система частных решений системы однородных линейных уравнений образует базис, поскольку все остальные решения (общее решение) являются линейной комбинацией решений фундаментальной системы.

Определение координат вектора	Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\bar{x}$ линейного пространства выражается через базисные векторы этого пространства, называются **координатами вектора** $\bar{x}$ относительно этого базиса. Векторы базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ будем записывать в строку, а координаты $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ вектора x – в столбец, который назовём координатным столбцом вектора.

Разложение вектора по базису можно записывать в любом из следующих видов:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ ... \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \bar{\text{Е}}\Lambda.$$

Из **основной теоремы** следует, что координаты вектора $\bar{x}$ относительно данного базиса существуют и определяются единственным образом.

Пример 2.7. Если $x = 3e_1 - 2e_2 + 5e_3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) трёхмерного пространства R_3, то координатами вектора x в этом базисе является упорядоченная совокупность чисел $(3; -2; 5)$, что можно записывать так: $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Теорема (о линейных операциях над векторами)	При сложении векторов координаты их относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении вектора на число все координаты умножаются на это число.

Для доказательства следует применить определение координат вектора и аксиомы линейного векторного пространства.

Пример 2.8. $x = (-1;3;-7)^T$ **,** $y = (6;0;-2)^T$ **,**

$x + y = (-1+6;3+0;-7-2)^T = (5,3;-9)^T$, $4x = (-4;12;-28)^T$.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)	Векторы линейного пространства R_n **линейно зависимы** тогда и только тогда, когда **ранг матрицы**, составленной из координат этих векторов относительно какого-нибудь базиса, **меньше числа векторов**. Необходимым и достаточным условием линейной независимости векторов является **равенство ранга матрицы**, составленной из координат этих векторов относительно какого-нибудь базиса, **числу векторов**.

Доказательство. Равенство нулю нетривиальной линейной комбинации векторов (**не все** коэффициенты линейной комбинации – нули) влечёт за собой обращение в нуль линейной комбинации их координатных столбцов с теми же коэффициентами. Так же доказывается и обратное предложение.

Теорема (о составе базиса)	Любой **ненулевой** вектор пространства R_n можно включить в состав какого-нибудь базиса этого пространства.

В нулевом пространстве нет базиса, так как система, состоящая из одного нулевого вектора, является линейно зависимой. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю.

Может случиться, что каково бы ни было натуральное число m, в пространстве найдётся m линейно независимых векторов. Такое пространство называется бесконечномерным. Базиса в нём не существует.

Примеры 2.9. 1. Множество векторов на плоскости является двумерным линейным пространством.

2. В трёхмерном пространстве базисными векторами можно выбрать любые три вектора, определитель из координатных столбцов которых отличен от нуля (ранг матрицы из координатных столбцов равен трём).

3. Линейное пространство ненулевых столбцов высоты n имеет размерность n. Действительно, столбцы единичной матрицы порядка n линейно независимы ($\det E = 1 \neq 0$), и любой столбец высоты n является их линейной комбинацией.

Определение ортонормированного (декартова) базиса	**Ортонормированным (декартовым) базисом** называется базис из попарно **ортогональных** (попарно перпендикулярных) векторов, **длина** каждого их которых равна **единице**. Базисные векторы декартова базиса называют **ортами** и **в трёхмерном пространстве обозначают** $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Определение декартовой системы координат (ДСК)	Декартов базис, приведённый к общему началу O, называется **декартовой системой координат (ДСК).**

Определение аффинного базиса, аффинной системы координат	Базис из произвольных векторов называется **аффинным.** Аффинный базис, приведённый к общему началу O, называется **аффинной системой координат (АСК).**

Замечание 1. Базис играет большую роль в изучении линейного пространства. С его помощью абстрактные векторы можно задавать в виде совокупности чисел (координат вектора в данном базисе), а операции над векторами можно сводить к операциям над числами (координатами векторов)

Замечание 2. Линейная зависимость (независимость) элементов линейного пространства эквивалентна линейной зависимости (независимости) столбцов координат этих элементов (в любом фиксированном базисе линейного пространства), так как выполнение каких-либо операций над векторами идентично выполнению тех же операций над их столбцами координат.

Задача. Доказать, что а) система векторов $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (1,-1,0)$, $a_3 = (-1,2,-1)$ является базисом в трёхмерном пространстве R_3. б) любой вектор $x \in R_3$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов a_1, a_2, a_3.

<u>Первый способ.</u> а) Докажем, что система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Рассмотрим равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.

Запишем его для данной задачи, применяя линейные операции над векторами:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ \quad\quad - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Полученная однородная система линейных алгебраических уравнений имеет единственное тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

и, следовательно, система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима.

б) Докажем, что любой вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов a_1, a_2, a_3, т.е. существуют такие вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (координаты вектора x в базисе a_1, a_2, a_3), что $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$. Запишем последнее равенство в координатной форме

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = x_1, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = x_2, \\ \quad\quad - \lambda_3 = x_3. \end{cases}$$

Полученную неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с матрицей A из столбцов – координат векторов a_1, a_2, a_3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

в матричной форме можно записать $A\Lambda = X$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Эта система уравнений имеет единственное решение $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,.так как $\det A \neq 0$.

Второй способ. а) Докажем, что система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Из столбцов координат векторов a_1, a_2, a_3 составим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Поскольку $\det A \neq 0$, столбцы матрицы A линейно независимы, поэтому и система векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима.

б) Поскольку количество линейно независимых векторов совпадает с размерностью пространства R_3, эти векторы образуют базис в пространстве R_3. В соответствии с основной теоремой, любой вектор $x \in R_3$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов a_1, a_2, a_3.

2.5. Модель международной торговли. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Модель международной торговли (кратко: модель обмена) служит для ответа на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т.е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой стран-участниц.

Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Для простоты изложения рассмотрим три страны-участницы торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, X_3, которые условно назовем США, Германия и Кувейт. Буде считать, что весь госбюджет страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, например, США тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, $\frac{1}{4}$ бюджета на товары из Германии, оставшуюся $\frac{1}{4}$ бюджета – на товары из Кувейта. Германия тратит поровну свой бюджет на закупку товаров США, внутри страны и у Кувейта. Кувейт, в свою очередь, тратит $\frac{1}{2}$ бюджета на закупку товаров у США, $\frac{1}{2}$ бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны.

Введем структурную матрицу торговли:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{США} & \text{Германия} & \text{Кувейт}\end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}\end{array}$$

Пусть a_{ij} – часть госбюджета, которую j-я страна тратит на закупки товаров i-й страны. Заметим, что сумма элементов матрицы A в каждом столбце равна единице.

После подведения итогов торговли за год страна под номером i получит выручку $p_1 = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$. Например, США будут иметь выручку

$$\begin{array}{cccc} p_1 = & (1/2)X_1 & +(1/3)X_2 & +(1/2)X_3 \\ & \text{доля США} & \text{доля Германии} & \text{доля Кувейта} \end{array}$$

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$p_i \geq X_i \text{ для всех } i.$$

Теорема (об условии бездефицитной торговли)	Условием бездефицитной торговли являются равенства $p_i = X_i, \quad i = 1,2,3$

Доказательство. Предположим, что $p_i > X_i$ для некоторого i, например, для $i = 1$. Запишем эти условия для всех i:

$$\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 > X_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23} \geq X_2 \\
&a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \geq X_3
\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} + a_{21} + a_{31})X_1 + (a_{12} + a_{22} + a_{32})X_2 + (a_{13} + a_{23} + a_{33})X_3 > \\
&> X_1 + X_2 + X_3.
\end{aligned}$$

Поскольку все суммы в скобках в левой части неравенства равны единице, то получим противоречивое неравенство

$$X_1 + X_2 + X_3 > X_1 + X_2 + X_3.$$

Следовательно, предположение о том, что $p_i > X_i$, неверно, и доказательство завершено.

В матричной форме утверждение доказанной теоремы выглядит следующим образом:

$$AX = X,$$

$$\text{где } X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & X_3\end{pmatrix}^T.$$

Обобщая равенство $AX=X$, определим понятия собственного вектора и собственного значения матрицы A.

Определение собственного вектора и собственного значения матрицы A**.**	Ненулевой вектор $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$ называется **собственным вектором** квадратной матрицы A порядка n, если $AX=\lambda X$. При этом число λ называется **собственным значением** матрицы A.

Говорят так: X есть собственный вектор матрицы A**,** принадлежащий ее собственному значению λ**.**

Таким образом, в рассмотренном примере из соотношения $AX=X$ следует, что «вектор бюджетов» X является собственным вектором структурной матрицы торговли A, а соответствующее собственное значение равно единице: $\lambda=1$.

Существование такого собственного вектора вытекает из следующей теоремы.

Теорема (условие $\lambda=1$**)**	Если в матрице A **сумма элементов каждого столбца равна единице,** то имеется собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1.

Доказательство. Рассмотрим случай квадратной матрицы третьего порядка.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A-E=\begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{pmatrix}.$$

По условию

$$\begin{aligned} &a_{11}+a_{21}+a_{31}=1; \\ &a_{12}+a_{22}+a_{32}=1; \\ &a_{13}+a_{23}+a_{33}=1, \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} &a_{11}-1+a_{21}+a_{31}=0; \\ &a_{12}+a_{22}-1+a_{32}=0; \\ &a_{13}+a_{23}+a_{33}-1=0. \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что сумма строк матрицы $A-E$ равна нулевому вектору, т.е. матрица $A-E$ – вырожденная. В соответствии с теоремой о существовании нетривиальных решений однородной системы линейных уравнений система уравнений

$$(A-E)X=0$$

имеет ненулевое решение $X=X_0$. Это означает, что X_0 – собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda=1$.

Пример 2.10. Найдем собственные векторы и собственные значения матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тогда по определению собственных векторов и собственных значений матрицы A будем иметь:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0.$$

Если вектор X – собственный, то это означает, что однородная система уравнений $(A - \lambda E)X = 0$ имеет ненулевое решение, т.е определитель основной матрицы системы должен быть равен нулю: $|A - \lambda E| = 0$. То есть

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2;\quad \lambda_2 = 3$. Таким образом, собственными значениями матрицы A являются числа 2 и 3.

Найдем соответствующие собственные векторы.

$\lambda = 2$

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_2 = t,\ x_1 = 2t \Leftrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 3$

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow x_2 = t,\ x_1 = t \Leftrightarrow X_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В случае произвольной матрицы A порядка n аналогично

$AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda E)X = 0$.

Однородная система уравнений $(A - \lambda E)X = 0$ тогда и только тогда имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю:

$$\left| A - \lambda E \right| = 0.$$

Определение характеристического уравнения матрицы A.	Уравнение $\left| A - \lambda E \right| = 0$ называется **характеристическим уравнением** матрицы A, а многочлен степени n, который при этом получается, называется **характеристическим многочленом.**

Таким образом, **собственные значения** матрицы A являются **корнями ее характеристического уравнения.**

Замечание 1. Если вектор X является собственным вектором матрицы A, принадлежащим собственному значению λ, то для любого числа $k \neq 0$ вектор kX – тоже собственный вектор матрицы A, принадлежащий этому собственному значению λ.

Действительно, если X – решение уравнения $AX = \lambda X$, то $(A - \lambda E)X = 0$. Но тогда $(A - \lambda E)kX = k(A - \lambda E)X = k0 = 0$.

Замечание 2. Одному собственному значению может соответствовать несколько линейно независимых собственных векторов.

Пример 2.11. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

или $(3-\lambda)^3 = 0$. Следовательно, корень $\lambda = 3$ является кратным корнем уравнения $(3-\lambda)^3 = 0$ кратности 3.

Система уравнений $(A - \lambda E)X = 0$ для отыскания собственных векторов сводится к единственному уравнению $x_1 + x_2 = 0$, или $x_1 = -x_2$. То есть базисная неизвестная – одна, а свободных – две.

Положим, $x_2 = a$, $x_3 = b$ получим общее решение системы

$x_1 = -a, \quad x_2 = a, \quad x_3 = b$

Т.е. собственный вектор $X = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \end{pmatrix}$ представляется в виде линейной комбинации $X = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ двух линейно независимых векторов $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, являющихся фундаментальной системой частных решений (ФСЧР) данной системы однородных линейных уравнений.

Пример 2.12. Вернемся к отысканию собственного вектора X в модели международной торговли. Система уравнений для нахождения собственных векторов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ при собственном значении $\lambda = 1$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0 .$$

Общее решение этой системы $\begin{cases} X_1 = 2X_3; \\ X_2 = \frac{3}{2} X_3 \end{cases}$, поэтому в качестве собственного вектора можно взять вектор $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, задав свободную неизвестную $X_3 = 2$.

В частности, это означает, что сбалансированность торговли этих трёх стран может быть достигнута только в том случае, когда госбюджеты находятся в отношении

$$X_1 : X_2 : X_3 = 4 : 3 : 2$$

Заметим, что структурная матрица торговли A – это матрица с неотрицательными элементами. Мы ищем ее собственный вектор X с положительными координатами. Вопрос о существовании такого вектора рассмотрим далее.

2.6. Собственные значения матрицы Леонтьева

Особенность матрицы A в модели Леонтьева, а также в модели международной торговли состоит в том, что все элементы этих матриц неотрицательны. В этом случае говорят, что A – неотрицательная матрица, и пишут $A \geq 0$. Среди неотрицательных матриц выделяют положительные матрицы $A > 0$, все элементы которых строго больше нуля. В модели международной торговли требуется найти положительные собственные векторы. Вектор X называют положительным (неотрицательным), если его координаты $x_i > 0$ (соответственно $x_i \geq 0$).

Теорема Фробениуса-Перрона	Пусть A – неотрицательная квадратная матрица. Тогда 1. Максимальное по модулю собственное значение λ_A матрицы A неотрицательно. Среди собственных векторов, принадлежащих λ_A имеется неотрицательный собственный вектор. 2. В случае $A > 0$ все неотрицательные собственные векторы матрицы A положительны и принадлежат только ее максимальному по модулю собственному значению λ_A. Кроме того, в этом случае любые два положительных собственных вектора X и Y отличаются лишь множителем $Y = \alpha X$.

Теорема Фробениуса-Перрона часто применяется при исследовании линейных экономических моделей.

Определение числа и вектора Фробениуса матрицы A.	Максимальное по модулю собственное значение неотрицательной матрицы A называется **числом Фробениуса** матрицы A, а соответствующий ему неотрицательный собственный вектор – **вектором Фробениуса** для матрицы A.

Понятие собственного значения, а также понятие вектора Фробениуса неотрицательной матрицы A позволяют по-новому подойти к вопросу о продуктивности модели Леонтьева.

Прежде всего, заметим, что если A – квадратная матрица, а A^T – транспонированная к ней матрица, то характеристические уравнения для A и A^T совпадают. Таким образом, собственные значения матрицы A^T – те же, что и для матрицы A. В частности, числа Фробениуса матриц A^T и A совпадают.

Пусть A – неотрицательная квадратная матрица порядка n. Вектор Фробениуса P_A матрицы A^T назовем левым вектором Фробениуса матрицы A.

Представляя P_A как вектор-столбец, можем записать

$$A^T P_A = \lambda P_A$$

Или, после транспонирования $P_A^T A = \lambda_A P_A^T$.

Теорема продуктивности матрицы A.	Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.

Пример 2.13. Выяснить, при каких значениях $a > 0$ матрица

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Будет продуктивной.

Решение. Получим характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & 2a & 0 \\ 2a & a-\lambda & 0 \\ 7a & 6a & 9a-\lambda \end{vmatrix} = (9a-\lambda)((a-\lambda)^2 - 4a^2) =$$

$$= (9a-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda - 3a^2) = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 9a;\quad \lambda_2 = 3a;\quad \lambda_3 = -a$.

Для продуктивности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы было $9a < 1$, т.е. $a < \frac{1}{9}$. Например, при $a = 0{,}1$ получим продуктивную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

2.7. Постановка задачи линейного программирования

Общая задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Найти вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, доставляющий экстремум (максимум или минимум) линейной целевой функции

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

и удовлетворяющий системе ограничений

в виде уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

и неравенств

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \quad (i = m+1, m = 2, ..., m+s)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \ge b_i,$$
$$(i = m+s+1, m+s+2, ..., m+s+p)$$

$$x_{j1} \ge 0, x_{j2} \ge 0, ..., x_{jk} \ge 0 \quad (k \le n).$$

Последние неравенства означают неотрицательность координат вектора X .

Запись $X \ge 0$ по-прежнему будет означать неотрицательность **всех** координат вектора X , т.е. $x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$

Определение допустимого решения (плана)	**Допустимым решением** (планом) задачи линейного программирования называется любой n-мерный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений в виде равенств и неравенств и условиям неотрицательности.

Определение области допустимых решений	Множество всех допустимых решений задачи называют **областью допустимых решений** (сокращенно ОДР).

Определение оптимального решения	Решение (план) называется **оптимальным**, если оно допустимое и доставляет экстремум целевой функции $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Определение канонической задачи	Задача линейного программирования называется **канонической**, если ограничения задачи состоят из системы уравнений и условий неотрицательности всех n координат вектора X.

Каноническая задача записывается в виде

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

Общая задача линейного программирования может быть приведена к каноническому виду при помощи следующих утверждений.

Утверждение 1 (У.1)	Неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$ **равносильно** равенству $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$ и простейшему неравенству $x_{n+1} \ge 0$. Переменную x_{n+1} при этом **называют дополнительной**, или **вспомогательной**.

Утверждение 2 (У.2)	Неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - x_{n+1} \ge b$ **равносильно** равенству $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$ и простейшему неравенству $x_{n+1} \ge 0$. Переменную x_{n+1} при этом **называют дополнительной**, или **вспомогательной**.

Дополнительные переменные вносятся также и в целевую функцию с коэффициентами, равными нулю.

Утверждение 3 (У.3)	Каждую переменную, на которую не наложено условие неотрицательности, можно представить **в виде разности** двух неотрицательных переменных: $x_j \in R \Leftrightarrow x_j = x_j^{/} - x_j^{//}$. $x_j^{/} \ge 0$. $x_j^{//} \ge 0$.

Пример 2.14. Следующую задачу линейного программирования привести к каноническому виду:

$$L(X) = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \text{extr}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + 3x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0.$$

Решение. В системе ограничений имеем одно уравнение (равенство), которое сохраняем. Второе ограничение (неравенство) заменим согласно У.1 равенством

$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 5$ и простейшим неравенством $x_4 \ge 0$.

Третье ограничение (неравенство) заменим согласно У.2 системой

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_5 = -2, \\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

На переменную x_2 не накладываем условие неотрицательности. Заменим ее согласно У.3 разностью

$$x_2 = x_2' - x_2'', \qquad x_2' \ge 0, \qquad x_2'' \ge 0.$$

Каноническая задача содержит шесть переменных и имеет вид:

$$L(X)=3x_1-2x_2^{/}+2x_2^{//}-x_3\to \text{extr.}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2^{/}-2x_2^{//}=3, \\ 3x_1-x_2^{/}+x_2^{//}+x_3+x_4=5, \\ x_1+3x_3-x_5=-2, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2^{/}\ge 0,\quad x_2^{//}\ge 0\quad x_3\ge 0\quad x_4\ge 0\quad x_5\ge 0$$

Определение симметрической задачи	Задача линейного программирования называется **симметрической,** если она имеет вид $L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to \max,$ $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\quad i=1,2,...r.\quad X\ge 0$ **или** $L(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to \min,$ $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\quad i=1,2,...r.\quad X\ge 0$

Каноническую задачу можно привести к симметрическому виду.

Это имеет смысл, только если число ограничений меньше m. Приведение можно осуществить при помощи следующего приема. Систему уравнений, составляющих систему ограничений канонической задачи, необходимо разрешить относительно некоторого полного набора базисных переменных $x_1,x_2,...,x_r$. Следовательно, остальные переменные $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ становятся свободными. Таким образом, система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

равносильна записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{1n}x_n), \\ x_2 = \beta_2 - (\alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{2n}x_n), \\ .... \\ x_r = \beta_r - (\alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{rn}x_n), \end{cases}$$

когда базисные неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$ выражены через свободные неизвестные. Целевая функция $L(X)$ также выражается через свободные неизвестные заменой базисных неизвестных их представлением через свободные. Используя неотрицательность базисных неизвестных, можно наложить условия их неотрицательности на правые части общего решения, опуская при этом $x_1, x_2, ..., x_r$:

$$\begin{cases} 0 \leq \beta_1 - (\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \alpha_{1,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{1n}x_n), \\ 0 \leq \beta_2 - (\alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \alpha_{2,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{2n}x_n), \\ .... \\ 0 \leq \beta_r - (\alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \alpha_{r,r+2}x_{r+2} + ... + \alpha_{rn}x_n). \end{cases}$$

При необходимости можно использовать следующие равносильные соотношения:

$$L(X) \to \max \quad \Leftrightarrow \quad -L(X) \to \min,$$

$$L(X) \to \min \quad \Leftrightarrow \quad -L(X) \to \max$$

Пример 2.15. Приведем каноническую задачу линейного программирования к симметрическому виду:

$$L(X) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_6 = 11, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Расширенную матрицу системы, состоящей из уравнений системы ограничений и целевой функции, элементарными преобразованиями строк приведем к ступенчатому виду, получая базисные неизвестные с коэффициентами 1. Получим нули в пятом столбце: .

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 11 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & \boxed{1} & 0 & \vdots & 9 \\ -2 & 1 & -3 & 4 & -1 & 2 & \vdots & L \end{array}\right] \sim \end{array}$$

Получим нули в первом столбце:

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc:c} -5 & 8 & -3 & 3 & 0 & 3 & -15 \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 11 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 & L+9 \end{array}\right] \sim$$

Получим нули в шестом столбце:

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc:c} 0 & 18 & -8 & 13 & 0 & \boxed{-2} & 40 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & -7 & 4 & -6 & 1 & 2 & 31 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 & L+9 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccccc:c} 0 & -9 & 4 & -13/2 & 0 & 1 & -20 \\ 1 & -7 & 3 & -9/2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 11 & -4 & 7 & 1 & 0 & 71 \\ 0 & 16 & -9 & 15 & 0 & 0 & L+49 \end{array}\right].$$

Последняя строка соответствует уравнению

$$16x_2 - 9x_3 + 15x_4 = L(X) + 49.$$

Таким образом, базисными переменными являются x_1, x_5, x_6, следовательно, свободными будут x_2, x_3, x_4.

В соответствии с последней матрицей можем записать задачу в следующей форме:

$$L(X) = 16x_2 - 9x_3 + 15x_4 - 49 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = -9 + 7x_2 - 3x_3 + \dfrac{9}{2}x_4, \\ x_5 = 71 - 11x_2 + 4x_3 - 7x_4, \\ x_6 = -20 + 9x_2 - 4x_3 + \dfrac{13}{2}x_4. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Учитывая неотрицательность переменных x_1, x_5, x_6, отбросим их, накладывая условия неотрицательности на правые части соответствующих равенств. Получим систему неравенств, которую следует согласовать с условием задачи: неравенства должны иметь направление $\le$, поскольку задача ставится на нахождение максимума.. Тем самым приходим к эквивалентной задаче, записанной в каноническом виде:

$$L(X) = 16x_2 - 9x_3 + 15x_4 - 49 \to \max$$

$$\begin{cases} -7x_2 + 3x_3 - \dfrac{9}{2}x_4 \le -9, \\ 11x_2 - 4x_3 + 7x_4 \le 71, \\ -9x_2 + 4x_3 - \dfrac{13}{2}x_4 \le -20. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

2.8. Построение математических моделей простейших экономических задач

Задачи, сформулированные выше, на самом деле представляют собой линейные математические модели общих задач оптимизации, которые заключаются в нахождении в заданной области точек наибольшего и наименьшего значения некоторой линейной функции, зависящей от большого числа переменных. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях человеческой деятельности, главным образом, в практике планирования и организации производства. Далее будут рассмотрены некоторые задачи с экономическим содержанием, математические модели которых описываются линейными функциями в выпуклых областях, ограниченных линейными границами.

Для составления модели задачи линейного программирования, заданной в текстовой форме, **необходимо**:

1) ввести обозначения неизвестных задачи;
2) проанализировать и зафиксировать ограничения для них (например, неотрицательность);
3) составить систему ограничений задачи;
4) составить целевую функцию и установить вид экстремума.

Как правило, в задачах с экономическим содержанием математическая модель имеет симметрический вид;

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,2,...r. \quad X \ge 0$$

или

$$L(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, ...r. \quad X \geq 0.$$

Некоторые ограничения (неравенства) могут иметь противоположные направления или быть равенствами.

Пример 2.16. Для трех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ используются три вида сырья C_1, C_2, C_3. Предприятие может израсходовать 32 т сырья C_1, не менее 40 т сырья C_2 и не более 50 т сырья C_3. Нормы расхода сырья не единицу продукции того или иного вида приведены в таблице 2.1. Здесь же указаны трудовые и энергетические затраты на производство единицы продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$.

Определить количества продукции видов $П_1$, $П_2$, $П_3$, которые следует произвести при минимальных затратах энергетических и трудовых ресурсов.

Таблица 2.1

Сырье	Запасы (т)	Нормы расхода на единицу продукции		
		$П_1$	$П_2$	$П_3$
C_1	32	2	3	0
C_2	40	4	1	2
C_3	50	3	1	3
Расходы (руб.)		4	5	6

Решение. Для построения математической модели этой задачи обозначим через x_1, x_2, x_3 количества продукции видов $П_1$, $П_2$, $П_3$ соответственно, которые предполагается производить. Тогда целевую функцию и ограничения задачи можно записать в виде

$$L(X) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 32, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 40, \\ 3x_1 + x_2 + 3x3 \leq 50. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Как видим, математическая модель сводится к минимизации некоторой линейной функции при ограничениях, записанных в виде равенств и неравенств.

Пример 2.17. (задача о наилучшем использовании ресурсов или о максимальном доходе производственного предприятия). При производстве n видов продукции $P_1, P_2, ..., P_n$ используется m видов сырья $S_1, S_2, ..., S_m$. Запасы каждого сырья составляют $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц соответственно. Известно количество a_{ij} единиц сырья с номером i $(i = \overline{1, m}$) вида j $(i = \overline{1, n}$). Кроме того, известна прибыль, получаемая от реализации единицы продукции каждого вида: $c_1, c_2, ..., c_n$.

Требуется составить план выпуска видов продукции $P_1, P_2, ..., P_n$, при котором прибыль от реализации всей продукции была бы максимальной.

Решение. Для построения математической модели этой задачи обозначим через $x_1, x_2, ..., x_n$ количества единиц n видов $P_1, P_2, ..., P_n$ продукции, которую необходимо производить.

Условия $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ означают, что количество производимой продукции не может быть отрицательным числом.

Поместим условия задачи в таблицу 2.2 для удобства их анализа.

Таблица 2.2

Вид сырья	Запасы сырья	Виды продукции			
		P_1	P_2	…	P_n
S_1 S_2 … S_m	b_1 b_2 … b_m	a_{11} a_{21} … a_{m1}	a_{12} a_{22} … a_{m2}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{mn}
Прибыль		c_1	c_2	…	c_n
План выпуска		x_1	x_2		x_n

Ограниченность запасов каждого вида сырья влечет ограниченность различных видов производимой продукции:

$$S_1: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$S_2: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_m: \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$$

При плане выпуска в x_j единиц продукции вида c_j прибыль предприятия равна $c_j x_j$.

Общая прибыль, получаемая от реализации всей продукции, может быть представлена линейной целевой функцией, или функцией цели

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n.$$

Таким образом, требуется найти неотрицательный вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий построенной системе ограничений и такой, что он доставляет максимальное значение целевой функции $L(X)$: $L(X) \to \max$.

Пример 2.18. (задача о рационе питания). Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен употребить в пищу в течение суток (недели, месяца, года и т.д.) определенное количество белков, жиров, углеводов, витаминов, микроэлементов и др.

Пусть имеется n различных продуктов $P_1, P_2, ..., P_n$ и перечень из m необходимых питательных веществ $S_1, S_2, ..., S_m$. Обозначим через a_{ij} (в единицах массы) количество питательного вещества S_i $(i = \overline{1, m})$, содержащегося в единице продукта P_j $(j = \overline{1, n})$.

Требуется организовать питание так, чтобы удовлетворялась норма потребности в питательных веществах и чтобы стоимость использованных продуктов была минимальной.

Решение. Для наглядности задачи ее данные поместим в табл. 2.3

Таблица 2.3

Питательные вещества	Виды продуктов				Суточная потребность 1 человека
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Стоимость 1 единицы продукта	c_1	c_2	…	c_n	
Количество единиц продукта	x_1	x_2		x_n	

Исходя из обозначений, введенных в таблице, математическую модель этой задачи можно представить в следующем виде.

Требуется найти неотрицательный вектор $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

и такой, что он доставляет минимальное значение целевой функции $L(X)$:

$$L(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

Пример 2.19. (задача о структуре товарооборота). Предположим, что для реализации n групп товаров торговое предприятие располагает m видами ограниченных материально-денежных ресурсов в количестве $b_1, b_2, ..., b_m$ единиц соответственно. При этом для продажи первой группы товаров на единицу товарооборота (например, на 10 000 руб.) расходуется ресурсов первого, второго, …, m-го вида в количествах $a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}$ единиц соответственно, для продажи второй группы товаров не единицу товарооборота расходуется ресурсов первого, второго, …, m-го вида в количествах $a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}$ единиц соответственно, и так далее; для продажи n-й группы товаров на единицу товарооборота расходуется ресурсов первого, второго, …, m-го вида в количествах $a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}$ единиц. Известно, что прибыли от реализации соответствующих групп товаров составляют $c_1, c_2, ..., c_n$ рублей.

Требуется определить плановый объем и структуру товарооборота, при котором прибыль торгового предприятия от реализации всего товара была бы максимальной.

Решение. Математическая модель этой задачи строится по аналогии с предыдущими. Пусть $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ – план товарооборота предприятия (предполагается реализовать x_1 единиц товара первой группы, x_2 единиц товара второй группы, x_n единиц товара n-й группы. Тогда необходимо максимизировать прибыль от реализации всех этих товаров:

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \max$$

При этом ограничения, связанные с материально-денежными ресурсами, приводят к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$$

2.9. Графический метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования с **двумя** переменными

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \text{extr},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le (\ge) b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le (\ge) b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Такая задача может быть решена графически (геометрически) ввиду того, что в этом случае легко строить ОДР (область допустимых решений). Она представляет собой многоугольник (ограниченный или нет, либо вовсе пустое множество), стороны которого лежат на прямых, получаемых из системы ограничений задачи

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Экстремальное значение целевой функции достигаются в угловых точках ОДР, принадлежащих опорным прямым к ОДР, т.е. крайним линиям уровня целевой функции по отношению к ОДР.

Алгоритм графического решения задачи линейного программирования состоит в выполнении следующих действий.

а) Построить ОДР.

б) Построить вектор нормали $n = (c_1, c_2)$ целевой функции (он указывает направление возрастания целевой функции).

в) Построить нижнюю и верхнюю опорные прямые p и q, т.е. крайние линии уровня целевой функции, имеющие общие точки с ОДР.

г) Определить координаты экстремальных точек ($P = p \cap$ОДР, $Q = q \cap$ОДР) и вычислить значение целевой функции в них.

Замечания.

1) Если ОДР – пустое множество, то задача не имеет решения в виду несовместности системы ограничений.

2) Если ОДР неограниченна по направлению вектора $n = (c_1, c_2)$, то сама целевая функция неограниченна сверху в этой области, и полагаем $L_{\max}(X) = +\infty$. Если ОДР неограниченна в направлении, противоположном $n = (c_1, c_2)$, то принимаем $L_{\min}(X) = -\infty$.

3) Графически может быть решена также задача линейного программирования, заданная в канонической форме, при условии $n - r \geq 2$ (n – число переменных, r – ранг системы уравнений). Для этого надо привести задачу к симметрическому виду. Графический метод можно распространить и на более общие ситуации, например, на случаи, когда условия неотрицательности распространяются не на все переменные.

Пример 2.20. Решим графически следующую задачу линейного программирования:

$$L(X) = 4x_1 + 7x_2 + 6 \to \text{extr},$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 6, & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 10, & (2) \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3, & (3) \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, & (4) \\ x_1 \leq 6. & (5) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad (6), \qquad x_2 \geq 0 \quad (7).$$

Решение. а) Построим область допустимых решений, которую обозначим буквой G. Для этого построим прямые, соответствующие уравнениям ограничений.

Каждое неравенство в системе ограничений определяет полуплоскость, причем эта полуплоскость содержит точку, координаты которой удовлетворяют соответствующему строгому неравенству.

б) Построим нормальный вектор целевой функции $n = (4, 7)$. Его направление указывает направление возрастания целевой функции $L(X) = 4x_1 + 7x_2 + 6$.

в) Прямая с уравнением $4x_1 + 7x_2 = 0$ представляет собой «нулевую» линию уровня функции $z = 4x_1 + 7x_2$. Эта прямая проходит через начало координат и перпендикулярна нормальному вектору $n = (4, 7)$. Передвигаем эту прямую параллельно себе, или перпендикулярно $n = (4, 7)$, и фиксируем два ее крайних положения.

Эти крайние прямые, которые обозначим буквами p и q, должны иметь с границей G либо общую вершину, либо общий отрезок, причем направление от p к q совпадает с направлением $n = (4, 7)$. В рассматриваемом примере p проходит через точку A, а q – через точку E. Эти прямые называются соответственно нижней и верхней опорными прямыми для G.

г) Определим координаты точек A и E. На рис. 2.4 видим, что точка A является точкой пересечения прямых 3) и 7), а E – 2) и 4).

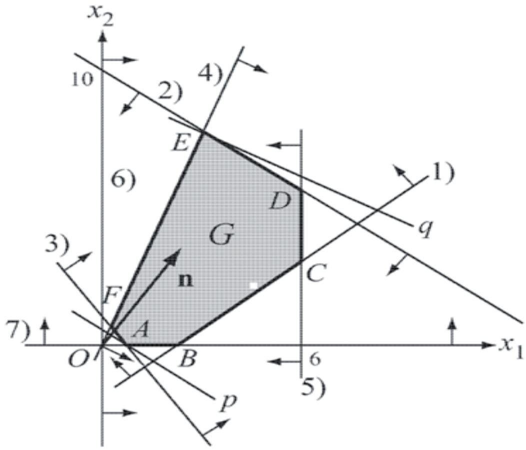


Рис. 2.4

Найдем координаты этих точек.

$$A: \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow A(\frac{3}{2}, 0);$$

$$E: \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow E(\frac{10}{3}, \frac{20}{3});$$

Вычислим значение целевой функции в точках A и E:

$$L(\frac{3}{2}; 0) = 12, \qquad L(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}) = 66.$$

Ответ: $L_{\min}(\frac{3}{2}; 0) = 12$, $\qquad L_{\max}(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}) = 66$.

Пример 2.21. При составлении суточного рациона кормления скота используется сено и силос. Рацион должен обладать определенной питательностью и содержать белка не менее 1 кг, кальция – не менее 100 г. и фосфора – не менее 80 г. при этом количество питательного рациона должно быть не менее 60 кг. Содержание питательных компонентов в 1 кг сена и силоса приведено в таблице 2.4. В ней указана также стоимость корма.

Требуется определить оптимальный суточный рацион кормления животных, обеспечивающий минимальную стоимость корма.

Таблица 2.4

Название ингредиента	Норма (г)	Содержание ингредиента в 1 кг корма (г/ кг)	
		Сено	Силос
Белок	1000	40	10
Кальций	100	1,25	2,5
Фосфор	80	2	1
Стоимость ед. корма (ден. ед)		12	8

Решение. Обозначим через x_1 и x_2 количества килограммов сена и силоса соответственно, составляющих рацион на одно животное в течение суток. Тогда условия задачи означают, что необходимо минимизировать функцию стоимости $L(X) = 12x_1 + 8x_2 \to \min$ при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 40x_1 + 10x_2 \geq 1000, & (1) \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \geq 80, & (3) \\ x_1 + x_2 \geq 60. & (4) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

а) Из рисунка 2.5 понятно, что соответствующая ОДР (общее множество точек выше всех прямых) не ограничена, но минимум достигается в одной из опорных точек пересечения прямых (1) и (3), (3) и (4), (2) и (4).

$$A: \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 100, \\ 2x_1 + x_2 = 80. \end{cases} \Rightarrow A(10, 60); \qquad L(10; 60) = 600$$

$$B: \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 80, \\ x_1 + x_2 = 60. \end{cases} \Rightarrow B(20, 40); \qquad L_{\min}(20; 40) = 560$$

$$C: \quad \begin{cases} 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 = 100, \\ x_1 + x_2 = 60. \end{cases} \Rightarrow C(40, 20); \quad L(40; 20) = 640$$

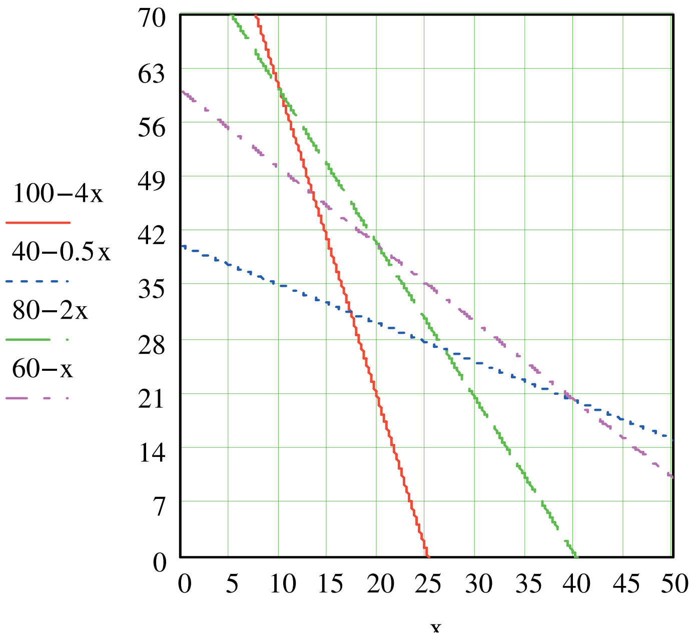


Рис. 2.5

Ответ: Оптимальный суточный рацион содержит 20 кг сена и 40 кг силоса, при этом его минимальная стоимость 560 ден. ед.

2.10. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Симплексный метод применяется для решения задач линейного программирования, заданных в канонической форме.

Симплексный метод основан на том факте, что целевая функция достигает экстремума **на допустимом базисном решении**. Таким образом, дело сводится к перебору допустимых базисных решений системы ограничений – уравнений задачи.

Симплексный метод позволяет переходить от одного допустимого базисного решения так, чтобы значение целевой функции уменьшалось (увеличивалось) в задаче на минимум (максимум). Все необходимые базисные решения целесообразно получать элементарными преобразованиями расширенной матрицы системы уравнений ограничений с присоединенной целевой функцией. В первую такую матрицу заносятся данные исходной задачи. При необходимости некоторые уравнения системы ограничений следует умножать на (–1), чтобы все свободные члены уравнений были неотрицательными.

Последнюю строку называют индексной. Она заполняется коэффициентами целевой функции, представленной в виде уравнения

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = L(X) - c_0,$$

где c_0 – свободный член $L(X)$. Вместо разности $L(X) - c_0$ в первой матрице записывают $(-c_0)$, а в последующих матрицах – результаты вычислений.

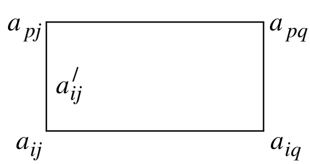
Алгоритм действий следующий:

1) Сначала выбирается разрешающий (ведущий) элемент $a_{pq} \neq 0$. Разрешающий элемент нельзя брать в индексной строке.
2) Разрешающая строка делится на $a_{pq} \neq 0$, а разрешающий столбец заменяют базисным, в котором кроме $a'_{pq} = 1$, а все остальные элементы – нули.
3) Все остальные элементы матрицы пересчитываются по формулам

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{pj} a_{iq}}{a_{pq}}; \quad b'_i = b_i - \frac{b_p a_{iq}}{a_{pq}}; \quad c'_j = c_j - \frac{a_{pj} c_q}{a_{pq}};$$
$$i \neq p, \qquad j \neq q.$$

Формулы легко воспроизвести, пользуясь мнемоническим правилом прямоугольника (см. схему 2.1).

Схема 2. 1



При этом надо следить за тем, чтобы новые свободные члены уравнений оставались неотрицательными.

Теорема (оптимальности решения)	Допустимое базисное решение является **оптимальным**, в том и только в том случае, когда среди коэффициентов индексной строки **нет положительных в задаче на максимум** (нет отрицательных в задаче на минимум).

Если коэффициенты индексной строки имеют разные знаки, то соответствующее допустимое базисное решение не является оптимальным как в задаче не максимум, так и в задаче на минимум, и, следовательно, требуется переходить к другому допустимому базисному решению (плану).

Очередное допустимое базисное решение (план) получается тем же способом, но с учетом некоторых особенностей. Ограничимся случаем задачи на максимум, поскольку задача на минимум решается по аналогичному алгоритму.

1) Разрешающий столбец надо выбирать так, чтобы не приобретать лишних положительных коэффициентов в индексной строке (хотя это иногда неизбежно в силу теоремы оптимальности). Иногда в качестве разрешающего берут столбец максимального коэффициента индексной строки.

2) Неправильный выбор разрешающей строки может привести к недопустимому решению. Правильный ее выбор состоит в следующем.

Предположим, что выбран разрешающий столбец. Составим отношения $\Theta_{iq} = \frac{b_i}{a_{iq}}$ ($a_{iq} > 0$, строка целевой функции здесь не участвует). Найдем минимальное из этих отношений, которое обозначим $\Theta = \min\{\Theta_{iq}\}$. Строку с числом Θ надо считать разрешающей. Если таких строк несколько, то выбор среди них безразличен.

3) Если разрешающий коэффициент выбран правильно, то соответствующие элементарные преобразования приводят только к допустимому решению.

При необходимости процедура нахождения допустимого базисного решения повторяется до получения оптимального решения, если оно существует.

Принцип выбора разрешающей строки следует соблюдать и при поиске первого базисного решения.

Рассмотрим несколько ситуаций, в которых получение оптимального решения недостижимо.

1) Предположим, что полученное базисное решение задачи на максимум не оптимально: в индексной строке имеется, например, один положительный коэффициент. Тем самым определена переменная, которую следует ввести в базис. Вместе с тем коэффициенты разрешающего столбца неположительные. Следовательно, ввести эту переменную в базис нельзя: это приведет к недопустимому решению. В таком случае задача не имеет решения по причине неограниченности целевой функции в ОДР.

2) Предположим, что при поиске первого базисного решения наталкиваемся на недопустимые решения, и не удается получить допустимое решение. В таком случае задача не имеет решения по причине несовместности условий ограничений задачи.

Пример 2.22.

$$L(X) = x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 7x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ -x_2 - x_3 + 4x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Решение. Задача задана в канонической форме. Решение задачи удобно оформить в виде **таблицы Гаусса 2.5**, соответствующей элементарным преобразованиям матрицы данной задачи.

Блоки таблицы Гаусса будем отсчитывать по обведенной индексной строке. В первом блоке первый разрешающий элемент (обведен квадратом) выбрали в первом столбце, т.к. в нем есть один ноль, а разрешающую строку выбрали по числу $\Theta = \min\left\{\Theta_{iq} = \dfrac{b_i}{a_{iq}}\right\}$.

Во втором блоке разрешающий столбец выбрали по положительному коэффициенту индексной строки.

В третьем блоке только коэффициент при x_2 в индексной строке положительный. Но ввести x_2 в базис нельзя, потому что все коэффициенты этого столбца отрицательные, и введение x_2 в базис приведет к недопустимому решению. Таким образом, в базис можно ввести либо x_4, либо x_5. В базис ввели x_4 и получили оптимальное решение.

Таблица 2.5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Θ
-1 0 $\boxed{1}$	1 -1 1	1 -1 4	2 0 1	-3 4 -8	4 4 3	 $3/1$
1	1	-1	-3	-7	max	
0 0 1	2 -1 1	5 -1 4	3 0 1	-11 $\boxed{4}$ -8	7 4 3	 $4/4$
0	0	-5	-4	1	-3	
0 0 1	$-3/4$ $-1/4$ -1	$9/4$ $-1/4$ -1	$\boxed{3}$ 0 1	0 1 0	18 1 11	$\underline{18/3}$ $11/1$
0	$1/4$	$-19/4$	-4	0	-4	
0 0 1	$-1/4$ $-1/4$ $-3/4$	$3/4$ $-1/4$ $5/4$	1 0 0	0 1 0	6 1 5	
0	$-3/4$	$-7/4$	0	0	20	

Таким образом, имеем общее решение:

$$\begin{cases} x_4 = 6 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_3, \\ x_5 = 1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3, \\ x_1 = 5 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_3. \end{cases}$$

Замечание. В дополнительном столбце Θ в отношениях свободных членов уравнений к коэффициентам ведущего столбца отрицательные его коэффициенты и нули не участвуют.

Оптимальное решение $X_1 = (5, 0, 0, 6, 1)$ (свободные неизвестные x_2 и x_3 равны нулю) получено одновременно с первым базисным решением. При этом $L_{\max} = -20$.

Ответ: $X_1 = (5, 0, 0, 6, 1)$, $L_{\max} = -20$.

Пример 2.23. Для изготовления четырех видов продукции P_1, P_2, P_3, P_4 используются три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, нормы расхода сырья на единицу продукции и получаемая прибыль от реализации единицы продукции заданы в таблице 2.6.

Таблица 2.6

Вид сырья	Нормы расхода				Запасы сырья
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	4	2	1	8	1200
S_2	2	10	6	0	600
S_3	3	0	6	1	1500
Прибыль (ден.ед)	15	6	12	24	max

Определить оптимальный план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Обозначим вектором $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ план выпуска продукции ($x_j \ge 0$ – количество единиц продукции вида j, которое предполагается производить). Требуется найти план $X=(x_1^0,x_2^0,x_3^0,x_4^0)$, при котором прибыль будет максимальной, т.е. тот набор неотрицательных координат вектора X, который доставляет наибольшее значение целевой функции

$$L(X)=15x_1+6x_2+12x_3+24x_4 \to \max$$

при следующих ограничениях, связанных с имеющимися запасами сырья:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+8x_4 \le 1200, \\ 2x_1+10x_2+6x_3 \le 600, \\ 3x_1+6x_3+x_4 \le 1500. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,4}$$

Приводим задачу к каноническому виду:

$$L(X)=15x_1+6x_2+12x_3+24x_4+0x_5+0x_6+0x_7 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+8x_4+x_5=1200, \\ 2x_1+10x_2+6x_3+x_6=600, \\ 3x_1+6x_3+x_4+x_7=1500. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,7}$$

Таблица 2.7

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
4 2 3	2 10 0	1 6 6	$\boxed{8}$ 0 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1200 600 150
15	6	12	24	0	0	0	max
$1/2$ 2 3	$1/4$ 10 0	$1/8$ $\boxed{6}$ 6	1 0 0	$1/8$ 0 0	0 1 0	0 0 1	150 600 150
3	0	9	2	–3	0	0	–3600
$11/24$ $1/3$ 3	$1/24$ $5/3$ 0	0 1 0	1 0 0	$1/8$ 0 0	$-1/48$ $1/6$ -1	0 0 -1	$275/2$ 100 1400
0	–15	0	0	–3	$-3/2$	0	-4500

Полученное решение $X = (0, 0, 100, 275/2, 0, 0, 1400)$ – оптимальное (индексная строка не содержит положительных коэффициентов). Оставляем только первые четыре координаты (в задаче имеем четыре вида продукции).

Получаем $X = (0, 0, 100, 275/2)$.

При этом прибыль равна $L(0, 0, 100, 275/2) = 4500$ (ден. ед).

Выясним, как этот план сказывается на использовании сырья. План предусматривает производство 100 единиц продукции P_3 и $275/2$ единиц продукции P_4; продукции P_1 и P_2 производить не нужно.

При этом сырье S_1 использовано полностью ($100 + 8 \cdot 275/2 = 1200$ ед.), сырье S_2 использовано полностью ($6 \cdot 100 = 600$ ед.), а сырье S_3 использовано не полностью ($6 \cdot 100 + 1 \cdot 275/2 = 737{,}5$ ед.; $762{,}5$ ед. сырья S_3 остается неиспользованным).

Ответ: $X = (0, 0, 100, 275/2)$; $L(0, 0, 100, 275/2) = 4500$ ден. ед.

2.11. Двойственность в линейном программировании

Предположим, что задача линейного программирования задана в следующем виде:

$$L(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max \text{ (или } \min)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, & (\ge b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, & (\ge b_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. & (\ge b_m) \end{array} \right| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{array}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ...,\ x_n \ge 0$$

Составим другую задачу линейного программирования, число переменных которой равно числу ограничений данной задачи, т.е. m. Обозначим их вектором $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$.

Эта задача имеет вид:

$$F(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min \text{ (или } \max)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{nm}y_m \ge c_m. \end{array} \right| \begin{array}{l} (\le c_1) \\ (\le c_2) \\ \\ (\le c_m) \end{array}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0, ...,\ y_m \ge 0$$

Вторая задача называется **двойственной**, или **сопряженной** для первой, а первая – **прямой**, или **основной**.

Если для второй задачи составить двойственную задачу, то получим первую. Таким образом, сформулированные задачи составляют пару взаимно двойственных, или взаимно сопряженных задач линейного программирования.

Отметим особенности пары взаимно двойственных задач.

1) Если **основная** задача – задача на **максимум** (минимум), то система ограничений должна состоять из неравенств вида $\le$ $(\ge)$, и в таком случае ***двойственная*** задача должна быть задачей на ***минимум*** (максимум), а ее система ограничений должна состоять из неравенств вида $\ge$ $(\le)$, т.е. **неравенств противоположного смысла.**

2) В основной задаче все переменные должны быть **неотрицательными**.

3) **Коэффициентами** целевой функции $F(Y)$ двойственной задачи являются **свободные члены** системы ограничений основной задачи, и их число равно m.

4) Основная матрица системы ограничений двойственной задачи получается **транспонированием** матрицы системы ограничений основной задачи.

5) **Свободными членами** системы ограничений двойственной задачи являются **коэффициенты** целевой функции $L(X)$ основной задачи.

6) Все переменные двойственной задачи **неотрицательные**.

Предположим теперь, что основная задача задана в **ослабленной форме**, т.е. среди ее переменных имеются переменные произвольного знака (на них не наложено требование неотрицательности), а система ограничений содержит неравенства противоположных направлений и, возможно, равенства. Построение двойственной задачи в таком случае основано на следующих правилах.

1) Все неравенства системы ограничений основной задачи следует привести **к одному направлению**: $\geq$ в задаче на минимум или $\leq$ в задаче на максимум.

2) Если в системе ограничений основной задачи имеется **равенство (уравнение)**, то та переменная y_i, которая соответствует этому i-му ограничению-равенству, может быть произвольного знака.. Запишем это соответствие так:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \quad \rightarrow \quad y_i \in R .$$

3) Если на некоторую переменную x_j основной задачи **не наложено условие неотрицательности**, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является равенством

$$x_j \in R \quad \rightarrow \quad a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj}y_m = c_j$$

Для основной задачи линейного программирования и двойственной к ней задаче справедливы следующие теоремы.

Теорема (соответствия)	Если одна из пары двойственных задач линейного программирования **имеет решение**, то и другая задача имеет решение, и при этом значения целевых функций этих задач равны: $L(X_{\text{опт}}) = F(Y_{\text{опт}})$.

Теорема (критерий оптимальности)	Произвольное допустимое базисное решение одной задачи из пары двойственных задач **оптимально** тогда и только тогда, когда система ограничений двойственной задачи совместна.

Теорема (неограниченности)	Если **целевая функция** одной из пары двойственных задач **неограниченна** снизу (сверху), то ***система ограничений*** другой задачи этой пары ***несовместна***.

Если основная задача линейного программирования допускает экономическую интерпретацию, то аналогичную интерпретацию можно придать и двойственной задаче. Обратимся к одной из множества таких возможностей.

Пример 2.24. Предположим, что основная задача представляет собой задачу наилучшего использования сырья (см. пример 2.17). Математическая модель этой задачи описывается условиями нахождения максимума целевой функции с ограничениями в виде системы неравенств направления $\leq$.

Двойственная задача. Предположим, что имеется второй производитель, который хочет перекупить сырье, а следовательно, ему нужно минимизировать суммарные затраты на приобретение всех видов сырья. Введем величины оценок (цен) всех видов сырья $S_1, S_2, ..., S_m$, которые обозначим вектором $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, где y_i – стоимость единицы сырья S_i, а стоимость запаса b_i этого сырья равна $b_i y_i$. Стоимость всего сырья равна

$$F(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min$$

И она подлежит минимизации.

Первому производителю невыгодно продавать сырье, если суммарная стоимость всех видов сырья, расходуемых на каждый вид продукции, меньше прибыли c_j, получаемой при реализации этого вида продукции. Таким образом, приходим к системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{nm}y_m \geq c_m. \end{cases}$$

Условия $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ..., y_m \geq 0$ вполне естественны.

Этим установлена связь между двумя взаимно двойственными задачами линейного программирования.

2.12. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи. Имеются m пунктов отправления однородного груза $A_1, A_2, ..., A_m$ и n пунктов назначения того же груза $B_1, B_2, ..., B_n$. Предполагается, что из любого пункта A_i $(i = \overline{1, m})$ груз может быть доставлен в любой пункт B_j $(j = \overline{1, n})$. Введем обозначения:

$a_i > 0$ – объем (запас) груза в пункте A_i;

$b_j > 0$ – объем груза, необходимого в пункте B_j;

$c_{ij} \geq 0$ – стоимость (тариф) перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j.

Требуется определить план перевозок груза из пунктов A_i в пункты B_j так, чтобы:

1) вывезти весь груз от отправителей A_i;

2) удовлетворить потребность в грузе (спрос) каждого потребителя B_j;

3) транспортные расходы были минимальными.

Под планом задачи подразумевается матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – количество единиц груза, который необходимо перевезти из пункта A_i в пункт B_j.

Математическая модель сформулированной задачи, называемой транспортной задачей, имеет следующий вид:

Требуется найти неотрицательную матрицу X, удовлетворяющую условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

и доставляющую минимум целевой функции

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} ,$$

где $c_{ij} \cdot x_{ij}$ – транспортные расходы по перевозке x_{ij} единиц груза из пункта A_i в пункт B_j.

Теорема (критерий разрешимости)	Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы имело место **условие баланса** $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Определение оптимального плана	Неотрицательная матрица X, удовлетворяющая условиям транспортной задачи, называется **планом** (или допустимым планом) задачи. Допустимый план называется **оптимальным**, если он доставляет **минимум целевой функции**.

Определение невырожденного (вырожденного) плана	Допустимый план, имеющий не более $m+n-1$ отличных от нуля элементов x_{ij}, называется базисным, или опорным. Опорный план, имеющий **ровно** $m+n-1$ отличных от нуля элементов, называется **невырожденным**, а если число отличных от нуля элементов ***меньше***, чем $m+n-1$, то план называется ***вырожденным***.

Прежде чем приступить к решению транспортной задачи, необходимо проверить условие критерия разрешимости. Если задача с неправильным балансом (открытая), то:

1) при $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос меньше предложения) необходимо ввести «фиктивного» потребителя груза: $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$;

2) при $\sum_{i=1}^{m} a_i , \sum_{j=1}^{n} b_j$ (спрос больше предложения) необходимо ввести «фиктивного» поставщика груза: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$;

Стоимости перевозок от «фиктивного» поставщика до всех потребителей и от любого поставщика до «фиктивного» потребителя принимаются равными нулю.

Решение задачи начинается с определения начального опорного плана. Начальный и последующие планы заносятся в распределительную таблицу, в которой заранее записываются исходные данные задачи. Таблица с внесенными пунктами отправления A_i, их запасами a_i, пунктами назначения B_j, их запросами b_j и тарифами a_{ij} $(i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n})$ имеет вид таблицы 2.8.

Таблица 2.8

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_n	Запас
A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Спрос	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Тарифы c_{ij} записываются в левом верхнем углу клетки, а величины поставок будут записываться в правом нижнем углу клетки.

Замечание. При введении «фиктивного» потребителя B_{n+1} (поставщика A_{m+1}) соответствующий столбец (строка) заполняется нулями, т.е. $c_{i(n+1)} = 0$ ($c_{(m+1)j} = 0$).

Начальный план составляется **методом минимальных тарифов**, который заключается в следующем. Выбирается ***наименьший тариф***, например, c_{ij}. В клетке (i, j) этого тарифа (в правом нижнем углу) записывается ***максимально возможная поставка*** с учетом ограничений этой строки и этого столбца: $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. Этой поставкой либо обеспечивается потребность одного потребителя, и тогда этот потребитель (столбец) исключается из дальнейшего рассмотрения; либо от одного поставщика забирается весь груз, и тогда этот поставщик (строка) исключается из дальнейшего рассмотрения. Исключаемый столбец (или строка) нумеруется, и этот номер записывается на краю этого столбца (или строки). Исключаемые одновременно строка и столбец отмечаются одним номером.

Если имеются два и более одинаковых наименьших тарифов, то заполняемая клетка берется произвольно из них.

Описанная операция повторяется до тех пор, пока не будут зачеркнуты все столбцы и строки. На последнем шаге одновременно освобождаются строка и столбец, а следовательно, в благоприятном случае должно быть $m + n - 1$ заполненных клеток. Полученный такой план является невырожденным.

Замечание. При одновременном зачеркивании строки и столбца (кроме последнего шага) число заполненных клеток меньше, чем $m + n - 1$, и такой план является вырожденным. Его надо дополнить до невырожденного плана нулями: нули надо записать в клетки, расположенные в строке или столбце, которые одновременно исключены из рассмотрения, т.е. имеют один номер. При этом клетки, заполненные нулями, не должны составлять цикл с прочими заполненными клетками. Понятие цикла определим позже.

Подчеркнем, что начальный план записывается в распределительной (первоначальной) таблице, и соответствующие поставки отделяются уголками для зрительного контраста.

В таблицах 2.9 и 2.10 показаны примеры невырожденного и вырожденного планов (в обеих таблицах $m = 3, \quad n = 4, \quad m + n - 1 = 6$; при этом смысл условий, накладываемых на дополнительные строки и дополнительные столбцы, выясним позже).

Таблица 2.9

		1)	2)	6)	5)	
		70	60	80	70	u_i
3)	90	1 $\boxed{70}$	5	6	1 $\boxed{20}$	0
4)	100	4	1 $\boxed{60}$	3	4 $\boxed{40}$	3
5)	90	3	3	5 $\boxed{80}$	4 $\boxed{10}$	3
	v_j	1	-2	2	1	

Число положительных элементов начального плана равно $m + n - 1 = 6$. Заполненных клеток (с уголком) тоже шесть.

План невырожденный.

Таблица 2.10

		1)	2)	5)	4)
		70	60	80	70
3)	90	1 70	5	6	1 20
4)	100	4 *	1 60	3 *	4 50
5)	80	3	3	5 80	6 *

Число положительных элементов начального плана равно пяти (отмеченных уголком без звездочек). План **вырожденный**. При заполнении таблицы одновременно зачеркнуты вторая строка и четвертый столбец. Отмеченная уголком и звездочкой клетка должна заполняться нулем.

После получения первого (начального) плана следует определить стоимость его реализации $L(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$. Затем план проверяется на оптимальность **методом потенциалов**, который заключается в следующем. Потенциалами данного плана называется набор из $m+n$ действительных чисел u_i и v_j ($i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$), удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}$, где c_{ij} – тариф занятой клетки. Поскольку число занятых клеток равно $m+n-1$, то для однозначного определения потенциалов один из них может быть выбран произвольно, например, $u_1 = 0$. Потенциалы записываются в дополнительных строке и столбце. Как правило, потенциалы определяются устно. Именно эти потенциалы занесены в табл. 2.9. Здесь приняли $u_1 = 0$. Остальные потенциалы находятся последовательно следующим образом:

$u_1 + v_1 = c_{11} = 1 \qquad (u_1 = 0, \quad v_1 = 1);$

$u_1 + v_4 = c_{14} = 1 \qquad (v_4 = 1);$

$u_3 + v_4 = c_{34} = 4 \qquad (u_3 = 3);$

$u_3 + v_3 = c_{33} = 5 \qquad (v_3 = 3);$

$u_2 + v_1 = c_{21} = 4 \qquad (u_2 = 3);$

$u_2 + v_2 = c_{22} = 1 \qquad (v_2 = -2).$

Полученная система потенциалов позволяет проверить полученный план на оптимальность. Составляем разности $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, для всех клеток таблицы. Поскольку для занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$ (по определению), то остается найти Δ_{ij} для незанятых клеток. Эти величины (числа) называются оценками клеток распределительной таблицы, или плана.

Теорема оптимальности	Опорный план X **оптимален** в том и только в том случае, если **среди оценок** Δ_{ij} этого плана **нет отрицательных**.

Если среди оценок Δ_{ij} есть отрицательные, то план **неоптимален**, и его улучшают **методом перераспределения поставок по циклу**.

Отметим клетку с наименьшей отрицательной оценкой и построим цикл с начальной вершиной в этой клетке.

Определение цикла	Циклом с начальной вершиной в данной клетке называется замкнутая ломаная, обладающая следующими свойствами: 1) все ее вершины, кроме начальной, расположены в занятых клетках; 2) звенья (стороны) цикла расположены в строках и столбцах таблицы; 3) в каждой вершине звенья соединяются под прямым углом. 4) На звеньях цикла могут быть занятые клетки, но они не являются вершинами цикла; 5) Два звена могут пересекаться в какой-либо клетке, но эта клетка не должна быть занятой (иначе она является вершиной).

На рис. 2.6 изображено несколько циклов с началом в незанятой клетке (именно такие циклы встречаются при исследовании плана на оптимальность). Приняты обозначения: О – незанятая клетка (начало цикла), * – занятая клетка; возможные места расположения занятых клеток отмечены черным кружком на звеньях.

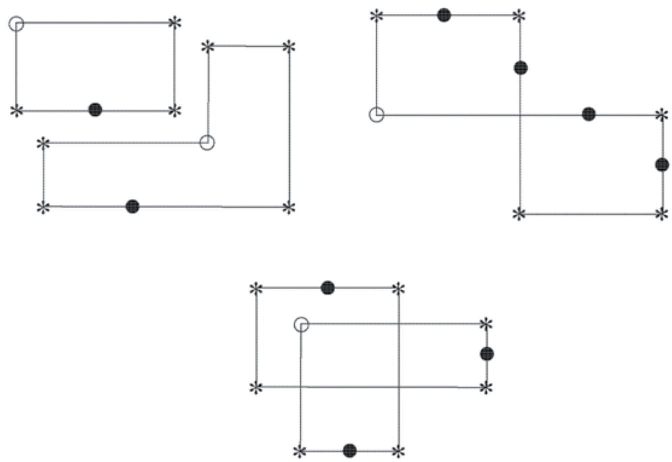


Рис. 2.6

На рис. 2.7 изображено несколько замкнутых ломаных, не являющихся циклами: такие **циклы недопустимы**. Штриховыми линиями обозначены возможности сокращения цикла или распада цикла на объединение (сумму) нескольких циклов. Рис. 2.7 показывает, что в цикл нельзя вовлекать «больше, чем разрешается требованиями для цикла» клеток.

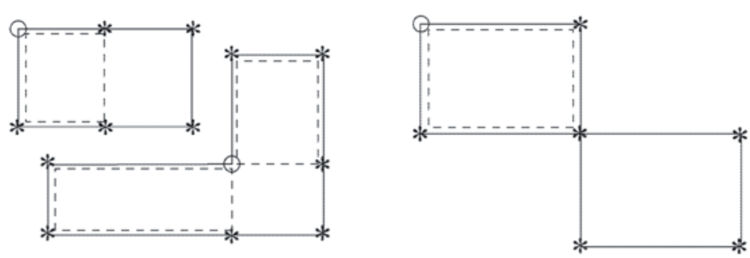


Рис. 2.7

Замечание. Для того, чтобы план таблицы 2.10 стал невырожденным, надо занять одну клетку нулем (иначе нельзя определить потенциалы, а значит, нельзя проверить на оптимальность полученный план). Нуль можно записать либо в строке $i = 2$, либо в столбце $j = 4$, ибо они были исключены одновременно в четвертую очередь (именно для этого была нужна нумерация исключаемых строк и столбцов). В клетке (2, 1), которая отмечена звездочкой, записать нуль нельзя: эта клетка образует цикл с занятыми клетками (1, 1), (1, 4) и (2, 4). Можно было занимать либо клетку (3, 4), либо клетку (2, 3)., которые тоже отмечены звездочками. Последняя клетка и была занята и отмечена уголком, хотя в качестве занятой можно было бы брать и клетку (3, 4)

Итак, построен цикл с вершиной в отмеченной клетке с наименьшей отрицательной оценкой. Если таких клеток несколько, то следует брать одну из них произвольно, или клетку с меньшим тарифом. Тем самым вершины разбиваются на две группы – с нечетными (отмеченная считается первой, т.е. нечетной) и четными номерами. Найдем наименьшую из величин поставок четных вершин (обозначим ее буквой θ). Эту величину θ **прибавим** ко всем вершинам **с нечетными** номерами и ***отнимем*** от вершин ***с четными*** номерами. Новое распределение поставок присоединяется к остальным занятым клеткам; таким образом, составляется новый опорный план X_2 с $L(X_2) < L(X_1)$. Этот план заносится в новую таблицу и проверяется на оптимальность методом потенциалов. В новой таблице необязательно записывать величины a_i и b_j.

Улучшение новых планов проводят до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. Для него все оценки клеток должны быть неотрицательными. Цикл и перераспределение поставок рекомендуется выносить за таблицу, т.е. рассматривать их отдельно. При заполнении клеток тарифами, поставками, оценками рекомендуется для контраста использовать разные цвета, а цикл в таблице выделять отдельным цветом и штриховой линией.

Пример 2.25. Решим транспортную задачу по данным таблицы 2.9.

Решение. Составим из таблицы 2.9 таблицу 2.11, опуская величины a_i и b_j. При этом буквы u_i и v_j перенесем в правый нижний угол расширенной таблицы.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 60 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 80 & 10 \end{pmatrix}$$

Таблица 2.11

1 0 $\boxed{70}$	5 7	6 4	1 0 $\boxed{20}$	0
4 0	1 0 $\boxed{60}$	3 $\ominus$ −2	4 0 $\boxed{40}$	3
3 −1	3 2	5 0 $\boxed{80}$	4 0 $\boxed{10}$	3
1	−2	2	1	v_j \ u_i

1) Проверяем составленный, взятый из таблицы 2.11 план (заметим, что он составлен из поставок, записанных в правом нижнем углу клеток и отмеченных уголком), на оптимальность, вычисляя оценки всех клеток таблицы. Для этого оценки $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, равные нулю для занятых клеток, вычислим для всех незанятых клеток и результаты запишем в центре клетки. Эти оценки уже занесены в таблицу, а теперь укажем способ их получения:

$$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 5 - 0 + 2 = 7,$$

$$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 2 = 4,$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 4 - 3 - 1 = 0,$$

$$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 2 - 3 = -2, < 0$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 1 - 3 = -1, < 0$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 3 - 3 + 2 = 2.$$

Подчеркнем, что если $(i,\ j)$ – занятая клетка, то $\Delta_{ij} = 0$.

Получили две клетки с отрицательными оценками:

$$\Delta_{31} = -1, \qquad \Delta_{23} = -2$$

План **неоптимален**., будем его улучшать. Но прежде определим стоимость реализации этого плана:

$$L(X_1) = 70 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 10 \cdot 4 = 750 \text{ (ден. ед.)}$$

2) Строим цикл с началом в отмеченной клетке (2, 3) с минимальной оценкой $\Delta_{23} = -2$.

Для его пересчета выносим цикл отдельно. Минимальная поставка по четным вершинам равна θ = 40. Эту величину вычтем из вершин с четными номерами и прибавим к вершинам с нечетными номерами. Старые поставки записаны вне цикла, а новые – внутри него. Клетка (2, 3) была свободной, теперь стала свободной клетка (2, 4).

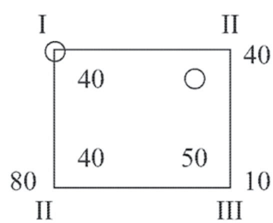


Рис. 2.8

3) Строим новую таблицу 2.12, в которую заносим новый план, состоящий из старых поставок, не вовлеченных в цикл, и новых – в вершинах рассмотренного цикла.

Таблица 2.12

1 0 70	5 5	6 4	1 0 20	0
4 2	1 0 60	3 0 40	4 2	1
3 -1	3 0	5 0 40	4 0 50	3
1	0	-2	1	u_i / v_j

Этот план имеет вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 50 \end{pmatrix}$$

и его стоимость равна

$L(X_2) = 70 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 60 \cdot 1 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 5 + 50 \cdot 4 = 670$ (ден. ед.).

В таблицу 2.11 помещены также новые потенциалы, найденные при условии $u_1 = 0$.

Определим оценки всех клеток (хотя на самом деле они также присутствуют в таблице). Наличие одной отрицательной оценки $\Delta_{11} = -1$ означает, что этот новый план еще **не оптимальный**. Замкнутый цикл с вершиной в клетке (3, 1) также отмечен в таблице 2.11. Его пересчет произведем отдельно.

На этот раз перераспределяем поставку в $\theta = 50$, что приводит к поставкам, обозначенным внутри цикла.

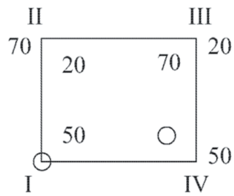


Рис. 2.9

4) Составляем новый план, заносим его в новую таблицу 2.13. Опять определяем новые потенциалы, новые оценки и делаем вывод об оптимальности.

Таблица 2.13

1 0 20	5 4	6 3	1 0 70	0
4 3	1 0 60	3 0 40	4 3	0
3 0 50	3 0	5 0 40	4 1	−2
−1	−1	−3	−1	u_i / v_j

Отрицательных оценок нет: план оптимальный. Его стоимость равна

$$L(X_3) = 20 + 70 + 60 + 120 + 150 + 200 = 620 \text{ (ден. ед.)}.$$

Ответ. $X_3 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 60 & 40 & 0 \\ 50 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$; $L(X_3) = 620$.

Задача решена.

Пример 2.26. Решим задачу, заданную таблицей 2.14.

Таблица 2.14

a_i \ b_j	40	20	30	60
40	3	2	3	4
30	5	6	7	5
90	3	4	1	2

Решение. Проверим задачу на условие правильности баланса. Имеем

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 30 + 90 = 160, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_i = 40 + 20 + +30 + 60 = 150.$$

Задача **открытая**: она неразрешима в такой постановке.

Введем «фиктивного» потребителя с потребностью $b_5 = 10$ и примем $c_{i5} = 0, \quad i = \overline{1, 3}$.

Составим распределительную (транспортную) таблицу для новой закрытой задачи (табл. 2.15). В ней построим первоначальный план, определим его стоимость, вычислим потенциалы и проверим план на оптимальность.

Таблица 2.15

		5)	2)	1)	3)	6)	
		40	20	30	60	10	u_i
4)	40	3 $\boxed{20}$	2 $\boxed{20}$	3	4	0	0
5)	30	5 $\boxed{20}$	6	7	5	0 $\boxed{10}$	2
3)	90	3 $\boxed{0}$	4	1 $\boxed{30}$	2 $\boxed{60}$	0	0
	v_j	3	2	1	2	–2	

«Фиктивный» потребитель (или отправитель, если он был), рассматривается в последнюю очередь.

1) Определим начальный план. Минимальный тариф $c_{33} = 1$. Положим $x_{33} =$ min(30, 90)=30 и запишем эту поставку в клетке (3, 3) минимального тарифа. Столбец $j = 3$ зачеркнем под номером 1.

Минимальные тарифы $c_{12} = c_{34} = 2$. Положим $x_{12} = 20$, зачеркнем под номером 2 столбец $j = 2$. Далее возьмем $x_{34} = 60$ и одновременно зачеркнем строку $i = 3$ и столбец $j = 4$ под номером 3. Учитывая $c_{11} = 3$, запишем $x_{11} = 20$ и зачеркнем строку $i = 1$ под номером 4.

Следующая поставка $x_{21} = 20$ очевидна, и в последнюю очередь рассматриваем «фиктивного» потребителя, записывая $x_{25} = 10$. План, как видим, вырожденный, потому что на третьем шаге зачеркнули две линии (под линией понимается либо строка, либо столбец). В одну из них запишем нуль, т.е. занимаем одну клетку либо в третьей строке, либо в четвертом столбце так, чтобы она не составляла с другими занятыми клетками замкнутый цикл. Из нескольких возможностей выбираем $x_{31} = 0$, потому что на момент зачеркивания этих линий в столбце $j=1$ сохранилась потребность в 20 ед. Полученный таким образом план вырожденный, но занятых клеток имеем нужное количество: $m+n-1=7$.

2) Потенциалы занятых клеток определим, исходя из начального условия $u_1=0$. Остальные потенциалы определим соответственно и занесем их в таблицу. Также устными вычислениями обнаружим, что среди оценок

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$$

Отрицательных нет.

Первоначальный план

$$X=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 300 & 60 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «фиктивный» потребитель участвует, является оптимальным, и стоимость этого плана равна

$$F(X)=20\cdot 3+20\cdot 2+20\cdot 5+30\cdot 1+60\cdot 2+10\cdot 0=350.$$

Остается исключить «фиктивного» потребителя (последний столбец матрицы X), не влияющего на стоимость оптимального плана задачи.

Ответ. $X=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & 60 \end{pmatrix}, \qquad F(X)=350.$

2.13. Решение задач линейного программирования средствами системы MathCAD

Пример 2.27. Найти максимальное значение линейной функции

$$F(x_1, x_2) = 60x_1 + 40x_2$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 400, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 900, \\ x_1 + 3x_2 \le 600, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи в матричной форме введем вектор-столбец неизвестных $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, вектор стоимостей $C = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$,

матрицу системы ограничений $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, вектор-столбец свободных членов

$B = \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix}$.

Теперь можно представить целевую функцию $F(x)$ в виде произведения матриц: $F(x) = C \cdot x$, а система ограничений запишется в виде $Ax \le b, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Блок решений **Given…Maximize( )** позволяет найти решение поставленной задачи.

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x) := C \cdot x$$

Given

$$A \cdot x \le b \qquad x \ge 0$$

$$x := \text{Maximize}(F, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 140 \\ 120 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 13200 \qquad A \cdot x = \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Можно привести задачу к канонической форме, вводя добавочные неизвестные

$$x_3 = 400 - 2x_1 - x_2 \ge 0,$$

$$x_4 = 900 - 3x_1 - 4x_2 \ge 0,$$

$$x_5 = 600 - x_1 - 3x_2 \ge 0.$$

Тогда целевая функция максимизируется

$$F(x) = 60x_1 + 40x_2 \to \max$$

с учетом ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 400, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 900, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 600, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

В этом случае, сохраняя прежние обозначения, получим решение:

$$C := \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad F(x) := C \cdot x$$

Given

$$A \cdot x = b \qquad x \ge 0 \qquad x := \mathrm{Maximize}(F, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 140 \\ 120 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 13200$$

Пример 2.28. Составить оптимальный план доставки грузов с трех баз A_i $(i = \overline{1,3})$ пяти потребителям B_j $(j = \overline{1,5})$. Стоимости перевозок единицы груза с базы A_i $(i=\overline{1,3})$ потребителю B_j $(j=\overline{1,5})$ – тарифы перевозок c_{ij}, наличие грузов у поставщика и потребности потребителей представлены в таблице 2.16.

Таблица 2.16

Поставщики	Потребители					Наличие груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	**4**	**11**	**6**	**5**	**15**	200
A_2	**8**	**7**	**9**	**13**	**10**	200
A_3	**10**	**5**	**12**	**7**	**20**	100
Потребность в грузе	70	80	150	110	90	500 \ 500

План доставки грузов считается оптимальным, если общая стоимость перевозок будет минимальной.

Решение. Обозначим $x_{ij} \geq 0$ $(i=\overline{1,3}, \quad j=\overline{1,5})$ элементы матрицы объемов перевозок от поставщиков A_i к потребителям B_j, а матрицу тарифов перевозок обозначим C.

Определение следа матрицы	Сумма элементы главной диагонали квадратной матрицы M называется **следом** матрицы (trace) и обозначается tr(M).

В данном случае след матрицы $C \cdot x^T$ равен стоимости перевозок и представляет собой целевую функцию

$$F(x) = tr(C \cdot x^T) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} \cdot x_{ij} .$$

Введем векторы A и B, элементы которых – это запасы грузов у поставщиков и объемы доставки потребителям. Балансовые соотношения между величинами отправляемых и доставляемых грузов приобретают компактную форму в матричной записи:

С помощью блока решения **Givev…Minimize** находим решение задачи:

$$ORIGIN := 1$$

$$C := \begin{pmatrix} 4 & 11 & 6 & 5 & 15 \\ 8 & 7 & 9 & 13 & 10 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & 20 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 70 \\ 80 \\ 150 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F(x) := tr\left(C \cdot x^T\right)$$

Given

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \qquad x^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \qquad x \geq 0$$

$$x := Minimize(F, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 40 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 0 & 90 \\ 0 & 80 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix} \qquad F(x) = 3400$$

2.14. Вопросы и задания для самопроверки

Системы линейных уравнений

1.1. Определите понятие матрицы.

1.2. Какие виды матриц различают?

1.3. Как определяются и осуществляются операции над матрицами?

1.4. Для каких матриц существуют определители?

1.5. Какие способы применяют для вычисления определителей?

1.6. Какими свойствами обладают определители?

1.7. Сформулируйте определение ранга матрицы.

1.8. Какими методами находят ранг матрицы?

1.9. Определите понятие обратной матрицы.

1.10. Для каких матриц не существует обратной матрицы?

1.11. Какой вид должна иметь система m линейных уравнений (СЛУ) с n неизвестными?

1.12. Определите понятия решения, общего решения, частного решения СЛУ.

1.13. Как проверить, правильно ли решена СЛУ?

1.14. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли о критерии совместности СЛУ.

1.15. Какой алгоритм применяют для решения системы линейных уравнений методом Гаусса?

1.16. Какой алгоритм применяют для решения систем линейных уравнений методом Крамера?

1.17. Чем отличается вид системы однородных линейных уравнений (СОЛУ) от произвольной СЛУ?

1.18. Какой алгоритм применяют для матричного метода решения систем линейных уравнений?

1.19. Как можно получить решения СЛУ средствами системы MathCAD?

1.20. Опишите модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

1.21. Сформулируйте теоремы о критериях продуктивности матрицы модели Леонтьева.

1.22. Какой экономический смысл имеет вектор полных затрат?

1.23. Почему модель равновесных цен и модель Леонтьева называют двойственными задачами?

1.24. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответы. а) 1; б) 24; в) 14.

1.25. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 0 \\ 2 & -7 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделайте проверку.

Ответы. а) $\begin{pmatrix} -2 & 21 & -12 \\ 6 & 19 & -16 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & -87 & -2 \\ 27 & -23 & -42 \\ -8 & -14 & 14 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -11 \\ -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.26. Решите матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 11 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответы. а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.27. Найдите $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 - 3x + 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 17 & 9 & 9 \\ 18 & 11 & 9 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

1.28. Перемножьте матрицы CDK:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.29. Решите системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10. \end{cases}$

Ответы. а) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.30. Решите системы линейных уравнений матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

Ответы. а) $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.31. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = -25, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 7x_4 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

Ответы. а) $X = \begin{pmatrix} -46 - x_4 \\ 95 + x_4 \\ -44 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.32. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + \quad 2x_4 + x_5 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

Ответы. а) $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} -3x_3 - 3x_4 \\ -2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$,

ФСЧР: $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.33. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$

заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}_e$:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = \{3;5;1\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = \{-4;-3;-2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = \{4;4;2\}$, $\bar{\mathbf{x}}_e = \{7;11;4\}$;

а) докажите, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) запишите матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

в) найдите координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}_a$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) запишите формулу, связывающую координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

Ответы. а, б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; $\det A = 2 \neq 0$; в, г) $x_a = A^{-1} \cdot x_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$.

Элементы линейного программирования

2.1. Как формулируются аксиомы векторных пространств?

2.2. Приведите примеры линейных пространств.

2.3. Определите понятия линейной зависимости и линейной независимости системы векторов.

2.4. Как определяется размерность линейных пространств, базис и координаты?

2.5. Опишите модель международной торговли.

2.6. Что представляют собой собственные векторы и собственные значения матрицы?

2.7. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответы:. а) $\lambda_1 = -2,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 3,\ x = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_3 = 6,\ x = \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $\lambda_1 = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = 2,\ x = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$$\lambda_3 = -2,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \ \lambda_4 = -3,\ x = \delta\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.8. Каковы собственные значения матрицы Леонтьева?

2.9. Сформулируйте постановку общей задачи линейного программирования.

2.10. Может ли система ограничений общей задачи линейного программирования включать строгие неравенства?

2.11. Может ли целевая функция задачи линейного программирования содержать нелинейные выражения из переменных?

2.12. Может ли допустимое решение задачи линейного программирования содержать отрицательную компоненту?

2.13. Чем отличается оптимальное решение задачи линейного программирования от допустимого?

2.14. Чем отличается канонический вид задачи линейного программирования от общего?

2.15. Какая задача линейного программирования называется симметрической?

2.16. Каждая ли симметрическая задача может быть приведена к общему виду? Если – да, то каким образом это делается?

2.17. В чем состоит схема построения математической модели задачи с экономическим содержанием?

2.18. В чем состоит смысл неотрицательности переменных задачи линейного программирования?

2.19. Есть ли какая-либо связь между числом переменных и числом ограничений задачи с экономическим содержанием?

2.20. Что понимают под выражением «неотрицательный вектор»?

2.21. В чем состоит экономический смысл целевой функции?

2.22. В чем состоит экономический смысл системы ограничений?

2.23. Какое максимальное число неравенств может содержать задача линейного программирования с двумя переменными?

2.24. Как строится область допустимых решений (ОДР) задачи линейного программирования?

2.25. Может ли ОДР быть невыпуклым многоугольником?

2.26. Может ли ОДР быть открытым множеством?

2.27. Может ли ОДР быть пустым множеством?

2.28. Какая прямая называется опорной для ОДР?

2.29. Чем отличается верхняя опорная прямая от нижней?

2.30. Может ли линия уровня целевой функции быть параллельной вектору целевой функции?

2.31. Может ли задача линейного программирования с двумя переменными иметь два и только два оптимальных решения?

2.32. В каком случае задача линейного программирования с двумя переменными не имеет решения?

2.33. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты в неравенствах в системе ограничений?

2.34. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты целевой функции?

2.35. Какой вывод можно сделать из того, что ОДР не ограничена по направлению, противоположному вектору целевой функции?

2.36. Можно ли решать графически симметрическую задачу с тремя переменными?

2.37. Сколько переменных может содержать задача линейного программирования, которую можно решить графически?

2.38. Можно ли решить графически задачу линейного программирования, если на некоторые ее переменные не наложены условия неотрицательности?

2.39. Как определить соотношение между числом переменных и числом ограничений, чтобы задачу можно было решить графически?

2.40. Какую роль играет в симплексном методе разрешающий (ведущий) коэффициент?

2.41. Чем отличается вырожденное решение от невырожденного?

2.42. При каких условиях допустимое базисное решение является оптимальным?

2.43. Может ли оптимальное решение быть вырожденным?

2.44. В чем состоит симплексный метод решения задач линейного программирования?

2.45. Каким образом следует выбирать разрешающий столбец при переходе от одного базиса к другому?

2.46. Каким образом следует выбирать разрешающую строку?

2.47. Какие последствия влечет отрицательность коэффициентов системы ограничивающего столбца?

2.48. Может ли симплексный метод приводить к бесконечному множеству решений?

2.49. Какой вывод можно сделать из того, что задача не имеет допустимого базисного решения?

2.50. Можно ли симплексным методом решить заданную симметрически задачу линейного программирования?

2.51. Можно ли симплексным методом решить задачу линейного программирования, если на некоторые ее переменные не наложены условия неотрицательности?

2.52. Можно ли для задачи линейного программирования, содержащей в системе ограничений неравенства разных направлений, построить двойственную задачу?

2.53. Если в основной задаче отсутствуют условия неотрицательности переменных, то какие последствия это влечет в сопряженной задаче?

2.54. Чем отличаются матрицы систем ограничений в паре двойственных задач линейного программирования?

2.55. Какова связь между экстремальными значениями пары двойственных задач линейного программирования?

2.56. Что можно сказать о решении двойственной задачи, если решение основной задачи не существует по причине несовместности ее системы ограничений?

2.57. Можно ли производить симплексное преобразование, используя отрицательный разрешающий коэффициент?

2.58. Могут ли обе двойственные задачи быть задачами на максимум?

2.59. Чем отличаются одна от другой транспортные задачи с правильным и неправильным балансом?

2.60. В чем состоит метод наименьших тарифов построения начального решения (плана)?

2.61. Чем отличается вырожденное решение от невырожденного? При каких условиях появляется то или другое?

2.62. Можно ли проверять на оптимальность вырожденное решение?

2.63. Каким образом получить невырожденное опорное решение?

2.64. Как строится цикл? В чем состоит его математический смысл?

2.65. Как проверить на оптимальность полученное опорное решение?

2.66. Как улучшить неоптимальное решение транспортной задачи?

2.67. Может ли транспортная задача иметь два решения? Бесконечно много решений?

2.68. Каким образом можно решить открытую транспортную задачу?

Библиография

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1974. – 320 с.

2. Ромакин М.И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Высшая школа, 1963. – 280 с.

3. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике. Учебник: В 2-х ч. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с. – ISBN 5-279-01943-7.

4. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с. – ISBN 5-9221-0631-7.

5. Ракитин В.И. Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 с. – ISBN 5-9221-0636-8.

6. Тарбокова Т.В. Учимся математике вместе. – Saarbrücken, Gemany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. – 212 с. – ISBN 978-3-659-11420-5.

7. Тарбокова Т.В. Опорные конспекты математики вуза. – Saarbrücken, Gemany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011. – 118 с. – ISBN 978-3-8454-1389-1.