МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«**НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**»

Л.А. Кан, Н.Ф. Пестова, Г.П. Новоселова, Е.А. Молдованова

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2003

УДК 517.9(075.8)
ББК 22.161.1я73
Л436

.

Л436 Функции комплексного переменного / Л.А. Кан, Н.Ф. Пестова, Г.П. Новоселова, Е.А. Молдованова; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2003. – 164 с.

Пособие предназначено для студентов технических вузов.

Введение

Комплексные числа появились в математике в 16 веке как корни квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом. Вначале такие корни отбрасывались как «невозможные», «мнимые» и появление их считалось признаком отсутствия решения у задачи, приведшей к квадратному уравнению. Однако позже было обнаружено, что хотя мнимые корни и не выражают величины, так как их нельзя сравнивать друг с другом, но над ними можно производить четыре алгебраических действия, причём сохраняются свойства, присущие действиям над вещественными числами. Это и послужило основанием называть их числами («Алгебра» итальянского инженера Р. Бомбелли, 1572 г.). Геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек или векторов на плоскости было введено в 1799 г. датским землемером К. Весселем (1745 – 1848) и несколько позже, в 1806 г., французским математиком Д. Арганом (1768 – 1822). Символ i для мнимой единицы ввёл в 1777 г. Л. Эйлер (1707 – 1783). Термин «комплексное число» ввёл в 1881 г. К. Вейерштрасс (1815 – 1897). Большое значение в признании важной роли комплексных чисел в математике имели работы Л. Эйлера и К. Гаусса (1777 – 1855), а также лемма Даламбера (1717 – 1783) о том, что любое алгебраическое уравнение n-ой степени с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней. До установления этого результата можно было бы ожидать, что, подобно тому, как решение квадратного уравнения привело к комплексным числам, решение уравнений высших степеней (n = 3,4,…) приведёт к необходимости введения всё новых и новых чисел.

В настоящее время комплексные числа и теория функций комплексного переменного находят широкое применение не только в математике, но и в прикладных дисциплинах, таких как теоретическая физика, гидродинамика, теория упругости, небесная механика и др.

Основы общей теории аналитических функций созданы трудами трёх выдающихся математиков девятнадцатого века: О. Коши (1789 – 1857), Б. Римана (1826 – 1866) и К. Вейерштрасса. Каждый из них по-своему подошёл к построению теории аналитических функций.

О. Коши получил основные интегральные теоремы теории аналитических функций и построил теорию вычетов.

Глава 1. Комплексные числа

§1. Определение и свойства комплексных чисел

1°. Понятие комплексного числа

Определение 1.1.1. *Комплексным числом* z *называется упорядоченная пара вещественных чисел* (a, b)*, т.е.* $z = (a, b)$.

Первое число a пары (a, b) называется действительной частью комплексного числа z и обозначается символом $a = \text{Re } z$ (*Re* – начальные буквы латинского слова *realis* – действительный); второе число b пары (a, b) называется мнимой частью комплексного числа z и обозначается символом $b = \text{Im } z$ (*Im* – начальные буквы латинского слова *imaginarius* – мнимый).

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2.$$

2°. Действия над комплексными числами

Определение 1.1.2. *Суммой двух комплексных чисел* $z_1 = (a_1, b_1)$ *и* $z_2 = (a_2, b_2)$ *называется комплексное число*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \tag{1.1}$$

Нахождение суммы комплексных чисел называется операцией сложения или сложением.

Определение 1.1.3. *Произведением двух комплексных чисел* $z_1 = (a_1, b_1)$ *и* $z_2 = (a_2, b_2)$ *называется комплексное число*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \tag{1.2}$$

Нахождение произведения комплексных чисел называется операцией умножения или умножением. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

1. Коммутативность сложения $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. Коммутативность умножения $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
3. ассоциативность сложения
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3;$$
4. ассоциативность умножения
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$
5. дистрибутивность умножения относительно сложения
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Справедливость этих свойств вытекает из определений суммы и произведения комплексных чисел (1.1) и (1.2).

Рассмотрим комплексные числа вида $(a,\ 0)$. Из формул (1.1) и (1.2) вытекают следующие соотношения:

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0),$$
$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2, 0),$$

которые показывают, что операции над комплексными числами вида $(a,\ 0)$ совпадают с операциями над действительными числами a. Поэтому комплексные числа вида $(a,\ 0)$ отождествляют с действительными числами, т.е. $(a,\ 0) = a$.

В операциях с комплексными числами особую роль играет число (0, 1), которое обозначается буквой i. Найдём квадрат этого числа. По правилу (1.2) умножения комплексных чисел получаем $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1$, т.е. $i^2 = -1$, отсюда берёт своё начало обозначение $i = \sqrt{-1}$. Однако этой формулой задаются не все значения корня $\sqrt{-1}$, т.к. $(-i)^2 = -1$ и, следовательно, верно не только равенство $\sqrt{-1} = i$, но и равенство $\sqrt{-1} = -i$. Число i называется *мнимой единицей*.

3°. Алгебраическая форма комплексного числа. Сопряжённые комплексные числа

Возьмём любое комплексное число $(a,\ b)$. По правилу (1.1) сложения двух комплексных чисел имеем $(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b)$, где $(a,\ 0) = a$.

Рассмотрим число $(0,\ b)$. Его можно представить как произведение $(b, 0) \cdot (0,1)$. Действительно, $(b, 0) \cdot (0,1) = (b \cdot 0 + 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$. Итак, $(0, b) = b \cdot i$. Таким образом, любое комплексное число $(a, b) = (a, 0)+(0, b) = a + b{\cdot}i$.

Определение 1.1.4. *Алгебраической формой комплексного числа* $z = (a,\ b)$ *называется запись комплексного числа* $z = a + b{\cdot}i$.

Числа вида $b{\cdot}i$ называются *чисто мнимыми*. Число 0, т.е. комплексное число (0, 0) является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

Определение 1.1.5. *Два комплексных числа, имеющих одну и ту же первую компоненту, но противоположные по знаку вторые компоненты, называются сопряжёнными и обозначаются так:* $z = a + i \cdot b,\ \overline{z} = \overline{a - i \cdot b}$.

Имеют место следующие свойства: $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $z + \overline{z} = 2a = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2bi - 2i\operatorname{Im} z$, $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

4°. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Действительные числа изображаются точками прямой. Комплексные числа естественно изображать точками плоскости. Всякое комплексное число z = (a, b) изображается точкой М на плоскости с координатами a и b.(рис. 1.1).

Определение 1.1.6. *Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью и обозначается* ***C****.*

Действительные числа изображаются точками оси Ох, поэтому ось абсцисс называется *действительной осью*. Чисто мнимые числа изображаются точками оси Оу, поэтому ось ординат называется *мнимой осью*.

$\operatorname{Im} z = 0$ – уравнение оси Ох,

$\operatorname{Re} z = 0$ – уравнение оси Оу.

Комплексное число z удобно изображать радиус-вектором с проекциями a и b (рис. 1.2).

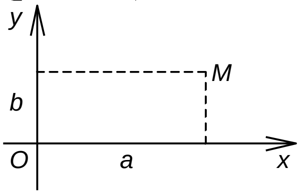


Рис. 1.1

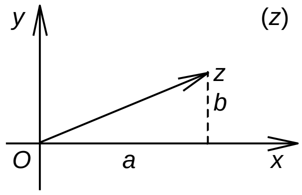


Рис. 1.2

При геометрическом изображении комплексных чисел на плоскости устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел и множеством точек комплексной плоскости, а также между множеством всех комплексных чисел $z = a + i \cdot b$ и множеством свободных векторов, проекции которых на оси абсцисс и ординат соответственно равны a и b.

Термины «комплексное число z», «точка z комплексной плоскости», «вектор z» употребляются как синонимы.

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Модуль комплексного числа z определяется равенством $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол между положительным направлением оси Ох и вектором z называется *аргументом* и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Заметим, что аргумент комплексного числа определён не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π (рис. 1.3). Значение φ аргумента z, удовлетворяющего условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется главным значением и обозначается $\arg z$.(рис. 1.4).

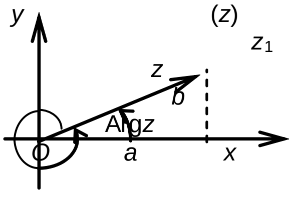


Рис. 1.3

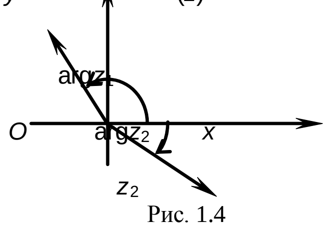


Рис. 1.4

Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, где $k \in \boldsymbol{Z}$ (В других пособиях можно встретить в качестве главного значения аргумента $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Аргумент комплексного числа $z = 0$ вообще не определён, а его модуль равен нулю.

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} & \text{при } a > 0, \quad b - \text{любом;} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi & \text{при } a < 0, \quad b \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi & \text{при } a < 0, \quad b < 0; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, \quad b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при } a = 0, \quad b < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Замечание. Известно, что для точек плоскости кроме декартовой системы координат применяется и полярная система. Очевидно, модуль комплексного числа z равен полярному радиусу, а аргумент комплексного числа z равен полярному углу.

Отметим ещё следующие правила:

Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой в том и только в том случае, если равны их модули, а значения аргументов или равны, или отличаются на целое кратное 2π.

Комплексно сопряжённые числа имеют один и тот же модуль, а значения их аргументов отличаются знаком.

Пример. 1.1.1. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

1) $z = i$; 2) $z = -\sqrt{3} + i$, 3) $z = 1 - i$, 4) $z = -2$.

Решение.

1) $z = i$ – чисто мнимое число. $a = 0$, $b = 1$. значит, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$, $|\, i \,| = 1$ (рис. 1.5).

2) $z = -\sqrt{3} + i$. Здесь $a = -\sqrt{3}$, $b = 1$. По формулам (1.3) получаем:

$$\arg(-\sqrt{3} + i) = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

$\left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.(рис. 1.6)

3) $z = 1 - i$. Здесь $a = 1$, $b = -1$. Применим формулы (1.3): $\arg(1-i) = \operatorname{arctg}\left[\frac{-1}{1}\right] = -\frac{\pi}{4}$; $|1-i| = \sqrt{2}$ (рис. 1.7).

4) $z = -2$. Здесь $a = -2$, $b = 0$. $\arg(-2) = \pi$; $|-2| = 2$ (рис. 1.8).

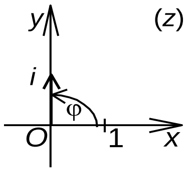


Рис. 1.5

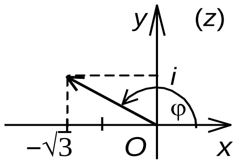


Рис. 1.6

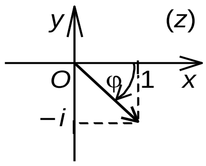


Рис. 1.7

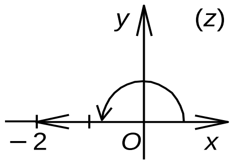


Рис. 1.8

Рассмотрим любое комплексное число $z \neq 0$ на плоскости (рис. 1.9).

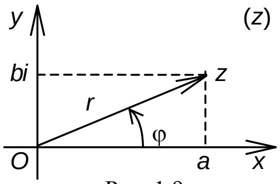


Рис. 1.9

Действительная и мнимая части комплексного числа $z = a + bi$ выражаются через модуль и аргумент следующим образом: $a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$. Обозначим $|z| = r$, тогда комплексное число z примет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической формой*.

Наконец, используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, получим так называемую *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Пример 1.1.2: Для комплексных чисел, заданных выше, найдены модуль и аргумент. Можно сразу записать соответствующие тригонометрическую и показательную формы:

$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\quad z = -\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$,

$z = 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z = -2 = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Проверьте себя

1.1. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих уравнению $\arg z = \varphi_0$, где $\varphi_0 = const$.

1.2. Дан вектор $z = 1 + i$. В какой вектор он перейдёт после поворота на угол $\varphi = 90^\circ$?

1.3. Дан вектор $z = -\sqrt{3} + i$. В какой вектор он перейдёт после поворота на угол $\varphi = -150^\circ$?

1.4. Дан вектор $z = -1 + i$. В какой вектор он перейдёт после удвоения и поворота на угол $\varphi = 135^\circ$?

§2. Операции над комплексными числами

1º. Геометрическая иллюстрация суммы и разности комплексных чисел

В §1 было дано определение суммы двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ равенством $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Видим, что это определение полностью согласуется с операциями сложения и вычитания векторов.

Приведём геометрическую иллюстрацию для суммы и разности векторов (рис. 1.10 и 1.11).

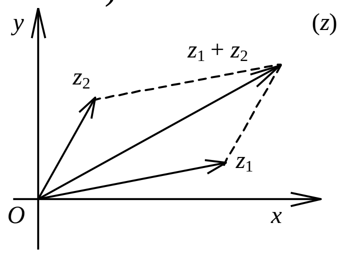


Рис. 1.10

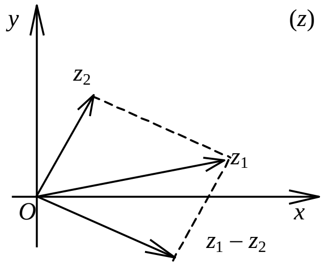


Рис 1.11

Замечание. Поскольку разность $z_1 - z_2$ двух векторов z_1 и z_2 равна вектору, начало которого находится в точке z_2, а конец – в точке z_1, то модуль разности $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2.

Пример 2.1.1. Написать уравнение окружности радиуса *R* с центром в точке z_0.

Решение: Для точек *z* этой окружности расстояние от *z* до центра z_0 равно *R*, поэтому уравнение окружности имеет вид $|z - z_0| = R$.

2°. Операции умножения и деления

Ранее было дано определение произведения двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ формулой (1.2).

Это правило согласуется с правилом умножения многочленов $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ с учётом равенств $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \ldots$

При записи результата умножения надо отделить действительную часть от мнимой, т.е. собрать отдельно члены, не содержащие множителя i, и члены, содержащие этот множитель.

Имеем: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$, т.е. получили комплексное число по правилу (1.2).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Деление производится следующим образом: сначала числитель и знаменатель дроби умножаем на число, сопряжённое знаменателю. После этого по свойству сопряжённых чисел в знаменателе окажется действительное число. Останется определить действительную и мнимую части и произвести деление каждой части отдельно.

Получим: $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$.

Операции умножения и деления комплексных чисел удобно производить с числами, заданными в тригонометрической или в показательной форме. Возьмём два числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\, z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Найдём их произведение по правилу (1.2)

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) = \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если числа даны в показательной форме: $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1)$, $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$, то по правилу умножения одинаковых оснований получим:

$$z_1z_2 = r_1r_2\exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{2.2}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются: $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{2.3}$$

или в показательной форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\exp(i\varphi_1)}{r_2\exp(i\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\exp(i(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{2.4}$$

Следовательно, имеют место равенства $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

Таким образом, умножение и деление комплексных чисел можно производить либо в алгебраической форме, либо вначале эти числа перевести в тригонометрическую или показательную форму и воспользоваться формулами (2.1 – 2.4).

Пример 2.2.1. Даны два числа $z_1 = 1+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+i$. Найти $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение:

1 способ. $z_1 z_2 = (1+i)(-\sqrt{3}+i) = (-\sqrt{3}-1) + i(-\sqrt{3}+1)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i)(-\sqrt{3}-i)}{3+1} = \frac{-\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{-\sqrt{3}-1}{4}.$$

2 способ. $z_1 = 1+i = \sqrt{2}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = -\sqrt{3}+i = 2\exp\left(i\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) 2\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(i\frac{13\pi}{12}\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{2\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(-i\frac{7\pi}{12}\right).$$

Пример 2.2.3. Найти произведение двух чисел $z_1 = -1+i$ и $z_2 = 2+2i$ двумя способами и сравнить полученные результаты.

Решение:

1 способ. $z_1 z_2 = (-1+i)(2+2i) = (-2-2) + i(2-2) = -4$

2 способ. Для числа $z_1 = -1+i$ имеем $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = arctg(-1) + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$, т.е. $z_1 = \sqrt{2}\exp\left(i\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Для числа $z_2 = 2+2i$ имеем $|z_2| = \sqrt{8}$, $\arg z_2 = arctg 1 = \dfrac{\pi}{4}$, т.е. $z_2 = \sqrt{8}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Тогда

$z_1 z_2 = \sqrt{2}\exp\left(i\dfrac{3\pi}{4}\right)\sqrt{8}\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right) = 4\exp(i\pi)$. Полученное число $4\exp(i\pi)$ запишем в тригонометрической форме:

$4\exp(i\pi) = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$. Результаты совпали.

3°. Возведение комплексного числа в целую степень и извлечение корня из комплексного числа

При возведении комплексного числа z в целую положительную степень n (n = 2,3,..) можно пользоваться и алгебраической формулой возведения в степень суммы и разности двух чисел и формулой бинома Ньютона.

Если число z записать в показательной форме $z = r\exp(i\varphi)$, то из правила умножения (2.2) получаем

$$z^n = r^n \exp(in\varphi) \tag{2.5}$$

или в тригонометрической форме (правило (2.1)) получаем соответствующую формулу

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что $\left|z^n\right| = |z|^n$, $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$.

Замечание. Формулы (2.5) и (2.6) остаются справедливыми и для целых отрицательных n.

Из формулы Эйлера $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и из равенства $(\exp(i\varphi))^n = \exp(in\varphi)$ вытекает формула

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

которая носит название формулы *Муавра.*

Перейдём к операции извлечения корня из комплексного числа.

Определение 1.2.1. *Комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$ называется корнем целой положительной степени n из числа z, если $z = w^n$.*

Запишем числа z и w в показательной форме: $z = r\exp(i\varphi)$, $w = \rho\exp(i\theta)$.

В силу соотношения (2.5) получаем

$$r\exp(i\varphi) = \rho^n \exp(in\theta) \tag{2.7}$$

Из равенства комплексных чисел в правой и левой частях (2.7) находим $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Итак, для комплексного числа $w=\rho\exp(i\theta)$ получаем значения:

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\exp(i\varphi)}=\sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (2.8)$$

или в тригонометрической форме:

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (2.9)$$

$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

По формулам (2.8) и (2.9) можно извлекать корень из любого комплексного числа.

Подставляя $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ в формулу (2.8) или (2.9) получим **бесконечно много значений** $\sqrt[n]{z}$. Различными между собой будут ровно n значений при k = 0, 1, …, n – 1, т.к. разность аргументов каждых двух из них не кратна 2π. Таким образом, существует ровно n различных значений корня $\sqrt[n]{z}$, которые определяются формулой

$$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r\exp(i\varphi)}=\sqrt[n]{r}\exp\left(i\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \qquad (2.10)$$

или $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, (2.11)

k = 0, 1, …, n – 1.

Все n значений корня имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$, значит они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. Аргументы двух соседних значений отличаются друг от друга на $\frac{2\pi}{n}$, следовательно, n значений корня делят окружность на n равных частей. Таким образом, n значений $\sqrt[n]{z}$ являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 1.12).

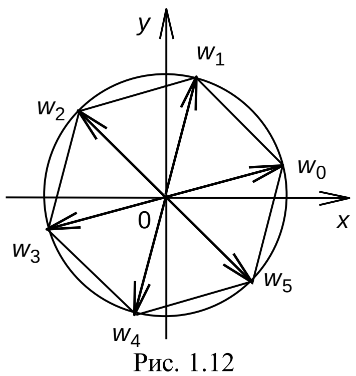


Рис. 1.12

Решение типовых примеров

Пример 1.2.4. Найти и построить все значения $\sqrt[4]{-1}$.

Решение. Найдём модуль и аргумент подкоренного числа $z=-1: r=1, \varphi=\pi$. Воспользуемся формулой извлечения корня (2.10). В нашем примере $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1}\exp\left(i\dfrac{\pi+2\pi k}{4}\right)$, k = 0, 1, 2, 3. Подставляя k = 0, 1, 2, 3, получим четыре различных значения корня:

при k = 0 $w_0=\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$; при k = 2 $w_2=\exp\left(i\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

при k = 1 $w_1=\exp\left(i\dfrac{3\pi}{4}\right)$; при k = 3 $w_3=\exp\left(i\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Построим окружность радиуса 1 с центром в начале координат и затем впишем в неё квадрат так, чтобы одна из вершин соответствовала числу $w_0=\exp\left(i\dfrac{\pi}{4}\right)$. Остальные три вершины изображают последовательно числа w_1, w_2, w_3 (рис. 1.13).

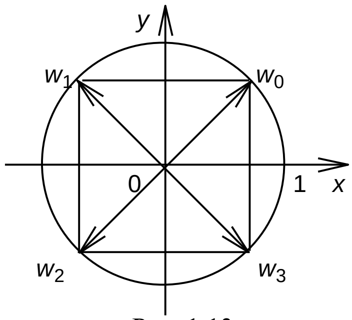


Рис. 1.13

Из рисунка видно, что ни одно из значений $\sqrt[4]{-1}$ не попало на действительную ось OX, а это означает, $\sqrt[4]{-1}$ действительных значений не имеет, что известно из школьного курса математики.

Пример 1.2.5. Вычислить и построить на комплексной плоскости $\sqrt[3]{(-1-i)^{10}}$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулой (2.10) извлечения корня из комплексного числа, необходимо:

1. Найти $|-1-i|$ и $\arg(-1-i)$;
2. Найти $z=(-1-i)^{10}=r\exp(i\varphi)$;
3. Применить формулу (2.10);
4. Сделать чертёж.

Итак, $|-1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(-1-i)=\operatorname{arctg}1-\pi=-\dfrac{3\pi}{4}$. Число $(-1-i)$ в показательной форме запишется в следующем виде: $(-1-i)=\sqrt{2}\exp\left(-i\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Далее возведём это число в десятую степень, получим подкоренное число z.

$$z=\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2}\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)\right)^{10}=2^5\exp\left(-i\frac{30\pi}{4}\right)=2^5\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right).$$

(Чтобы найти главное значение аргумента, вычтем целое число оборотов: $-\frac{30\pi}{4}=-\frac{15\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-4\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}$).

Для подкоренного числа $z=2^5\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$ найдены его модуль и аргумент: $r=2^5$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Теперь по формуле извлечения корня получаем:

$$w=\sqrt[3]{(-1-i)^{10}}=\sqrt[3]{2^5\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{2^5}\exp\left(i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right).$$

Отсюда $w_0=\sqrt[3]{2^5}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$,

$w_1=\sqrt[3]{2^5}\exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$, $w_2=\sqrt[3]{2^5}\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right)$.

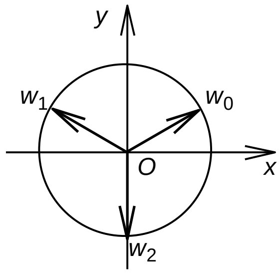


Рис. 1.14

На рис. 1.14 дано изображение точек w_0, w_1, w_2.

Пример 1.2.6. Найти и построить $\sqrt{\frac{1}{2-2\sqrt{3}i}}$.

Решение. Сначала найдём модуль и аргумент подкоренного числа $z=\frac{1}{2-2\sqrt{3}i}$. Для этого есть два способа:

1. Умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое числу $2-2\sqrt{3}i$, т.е. на $2+2\sqrt{3}i$, затем найти модуль и аргумент полученного числа;
2. Найти модуль и аргумент знаменателя дроби и затем выполнить деление.

Будем решать вторым способом. Имеем:

$$\left|2-2\sqrt{3}i\right|=4,\ \arg\left(2-2\sqrt{3}i\right)=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{3}.$$

Значит, $2-2\sqrt{3}i=4\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$. Отсюда $\frac{1}{4\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$.

Теперь по формуле извлечения корня получаем:

$$w=\sqrt{\frac{1}{4}\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}\exp\left(i\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right),\text{ где } k=0,1.$$

при $k = 0$ $w_0 = \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$;

при $k = 1$ $w_1 = \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{7\pi}{6}\right)$ (рис. 1.14).

Пример 1.2.7. Построить множество точек D, удовлетворяющих неравенству $|z - i| \le 2$.

Решение. Найдём границу множества D: $|z - i| = 2$. Это уравнение окружности радиуса $R = 2$ с центром в точке $z_0 = i$ (см. пример). По условию $|z - i| \le 2$, т.е. расстояние точек z от центра $z_0 = i$ не больше 2. Искомое множество точек представляет собой внутренность круга, включая точки на окружности (рис. 1.15).

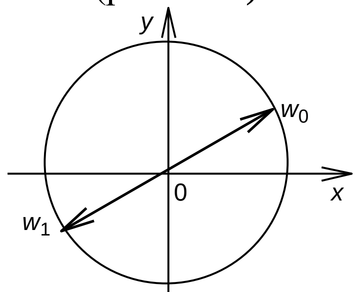


Рис. 1.15

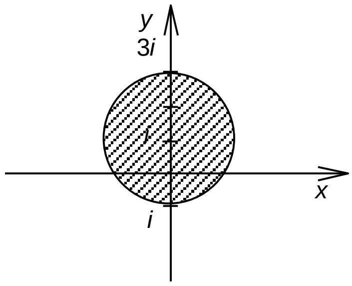


Рис. 1.16

Пример 1.2.8. Построить множество точек D, удовлетворяющих условию $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $z - 1 = t$. Тогда условие задачи запишется в виде $\arg t = \frac{\pi}{4}$. Точки t, для которых аргумент равен $\frac{\pi}{4}$, лежат на луче, выходящем из начала координат под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ к положительному направлению оси Ox. А т.к. $z = t + 1$, то точки z получены путём сдвига точек t на одну единицу вправо. Искомое множество точек изображено на рис. 1.17.

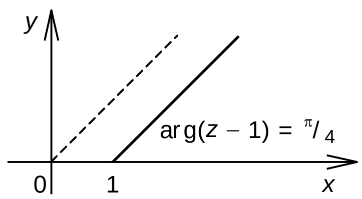


Рис. 1.17

Пример 1.2.9. Построить на плоскости множество D точек z, удовлетворяющих условию

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + i) < \frac{\pi}{4}, \quad |z - 1 + i| < \sqrt{2} \right\}.$$

Решение. Найдём границу множества D. Граница множества состоит из точек z, удовлетворяющих равенствам: $|z-1+i|=\sqrt{2}$, $\arg(z-1+i)=-\dfrac{\pi}{4}$ и $\arg(z-1+i)=\dfrac{\pi}{4}$. $|z-1+i|=\sqrt{2}$ – уравнение окружности с центром в точке $z_0=1-i$ радиуса $\sqrt{2}$.

$\arg(z-1+i)=\dfrac{\pi}{4}$ – уравнение луча, выходящего из точки $z_0=1-i$ под углом $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ к положительному направлению оси Ox (см. пример 1.2.5).

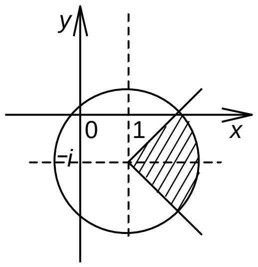


Рис. 1.18

$\arg(z-1+i)=-\dfrac{\pi}{4}$ – уравнение луча, выходящего из той же точки $z_0=1-i$ под углом $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ к положительному направлению оси ОХ. Искомое множество D – точки, лежащие внутри круга и между двумя лучами (рис. 1.17).

Проверьте себя

2.1. Найдите множество D точек плоскости z, удовлетворяющих условию $D=\{z:1<\operatorname{Im} z<2\}$.

2.2. Найдите множество D точек плоскости z, удовлетворяющих условию $D=\left\{z:\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)<1\right\}$.

2.3. Запишите с помощью неравенств множество точек, лежащих внутри полукруга единичного радиуса с центром в точке $z_0=-1$ и расположенного выше оси Ox.

2.4. Запишите с помощью неравенств множество точек, лежащих внутри полукруга радиуса R = 3 с центром в точке $z_0=2+2i$ и расположенного правее прямой x = 2.

2.5. Где расположены точки z, для которых $|z-i|=|z-1|$?

2.6. Запишите в показательной форме числа:

а) $z = -i$; б) $z = 4$; в) $z = -2$; г) $z=\sqrt{3}-i$.

2.7. Вычислите

а) $\dfrac{1-i}{1+i}$; б) $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\dfrac{-1}{i}$.

§3. Бесконечность и стереографическая проекция

1°. Сфера Римана.

Для нужд теории функций комплексного переменного введём условное комплексное число $z = \infty$, т.е. к комплексной плоскости с конечными точками добавим ещё одну точку в бесконечности. Это число называется *бесконечностью* или *бесконечно удалённой точкой.*

Комплексная плоскость с присоединённой бесконечно удалённой точкой называется *расширенной комплексной плоскостью* в отличие от конечной комплексной плоскости. Для комплексного числа $z = \infty$ понятия $\arg z$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ не определены, но модуль числа $z = \infty$ равен $+\infty$. Записывается: $|\infty| = +\infty$.

Наглядным представлением расширенной комплексной плоскости является сфера.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке $z = 0$ (рис. 1.19).

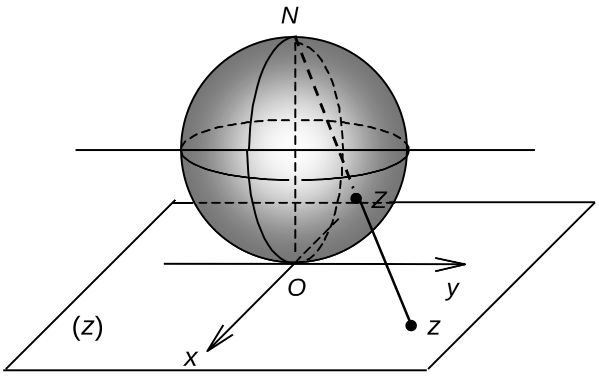


Рис. 1.19

$z = 0$ назовём южным полюсом сферы S. Обозначим через N точку сферы диаметрально противоположную точке O и назовём её северным полюсом. Северный полюс N будем соединять прямыми со всевозможными точками плоскости. Каждой точке z комплексной плоскости при этом соответствует вполне определённая точка Z сферы – та, в которой прямая Nz пересекает сферу. И наоборот, каждой точке Z сферы соответствует вполне определённая точка z плоскости. Будем называть точку Z сферическим изображением точки z. Таким образом, между сферой (без точки N) и точками плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. При этом, если $|z| \to \infty$, то её сферическое изображение приближается к N, поэтому естественно считать точку N сферическим изображением бесконечно удалённой точки. Тогда между полной сферой и расширенной комплексной плоскостью устанавливается взаимно однозначное соответствие. Оно называется *стереографической проекцией комплексной плоскости на сферу* S. Сфера S называется *сферой Римана*.

Отметим два свойства стереографической проекции:

1. Сферическим изображением окружности является окружность, не проходящая через полюс N. Сферическим изображением прямой также является окружность, но проходящая через полюс N.
2. При стереографической проекции углы между пересекающимися линиями не изменяются.

Слова «расширенная комплексная плоскость» и «сфера комплексных чисел» являются синонимами. В расширенной комплексной плоскости прямые являются частными случаями окружностей – это окружности, проходящие через бесконечно удалённую точку. При таком способе рассмотрения параллельные прямые надо считать окружностями, касающимися в бесконечно удалённой точке, а две непараллельные прямые пересекаются в двух точках (одна из них бесконечно удалённая).

2°. Множества точек расширенной комплексной плоскости.

Определение 1.3.1. *Окрестностью точки z_0 называется множество точек z, удовлетворяющих условию*

$$|z - z_0| < R$$

т.е. внутренность круга с центром в точке z_0 (рис. 1.20).

Окрестность точки z_0 считается достаточно малой, если радиус достаточно мал. ε – окрестность точки z_0 определяется неравенством $|z - z_0| < \varepsilon$.

Множество точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < R$ называется *проколотой окрестностью точки z_0* (круг с выброшенным центром) (рис. 1.21).

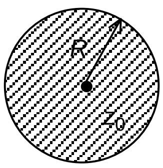


Рис. 1.20

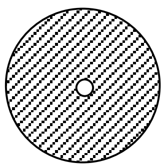


Рис. 1.21

Определение 1.3.2. *Окрестностью бесконечно удалённой точки $z = \infty$ называется внешность круга с центром в точке $z = 0$ радиуса R, т.е. множество точек z, удовлетворяющих условию $|z| > R$.*

Окрестность бесконечно удалённой точки считается достаточно малой, если радиус R достаточно большой. ε – окрестность точки $z = \infty$ определяется неравенством $|z| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Определение 1.3.3. *Точка* z_0 *называется внутренней точкой множества* E*, если она принадлежит множеству* E *вместе с некоторой своей окрестностью.*

Определение 1.3.4. *Точка* z_1 *называется внешней точкой множества* E*, если можно указать окрестность этой точки, в которой нет точек множества* E*.*

Определение 1.3.5. *Точка* z_2 *называется граничной точкой множества* E*, если в любой окрестности этой точки найдутся точки как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству* E*.*

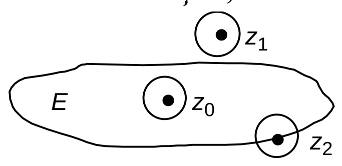


Рис.1.22

Совокупность всех граничных точек множества называется *границей*. На рис. 1.22 изображены внутренняя, внешняя и граничная точки множества E.

Определение 1.3.6. *Множество* E *точек плоскости называется открытым, если все его точки внутренние.*

Определение 1.3.7. *Множество* E *точек плоскости называется связным, если любые две точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в этом множестве.*

Пример 1.3.1. $E = \{z : r < |z| < R\}$ – кольцо между концентрическими окружностями радиусов r и R с центром в начале координат – связное множество (рис. 1.23)..

Пример 1.3.2. $E = \{z : |z+1| < 1, |z-1| < 1\}$ – множество, состоящее из двух кругов, не является связным, т.к., например, центры этих кругов – точки (–1, 0) и (+1, 0) нельзя соединить ломаной, состоящей из точек множества E (рис. 1.24).

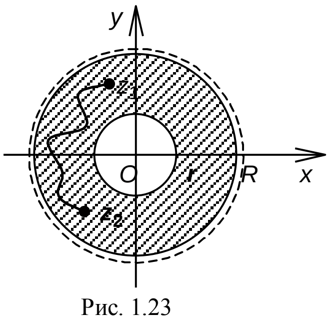


Рис. 1.23

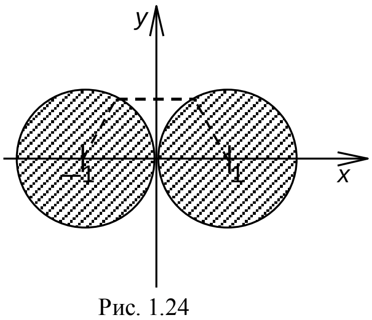


Рис. 1.24

Определение 1.3.8. *Открытое связное множество называется областью. Другими словами, под областью понимается множество точек на плоскости или сфере, обладающее двумя свойствами:*

1. *множество открытое,*
2. *множество связное.*

Пример 1.3.3. Внешность круга $|z-1|>5$, кольцо $r<|z-z_0|<R$, внутренность многоугольника,… являются областями, а замкнутый круг $|z|\le R$ не является областью, т.к. не выполняется условие открытости.

Область обычно обозначают буквой G или D.

Определение 1.3.9. *Множество, состоящее из области G и её границы Г, называется замкнутой областью и обозначается $\overline{G}$, т.е. $\overline{G}=G\bigcup\Gamma$.*

Определение 1.3.10. *Область G называется односвязной, если какую бы замкнутую непрерывную линию мы ни провели в этой области, её внутренняя часть также принадлежит данной области.*

Пример 1.3.4. Круг $|z-z_0|<R$ – односвязная область.

Определение 1.3.11. *Область G, не являющаяся односвязной, называется многосвязной.*

Граница многосвязной области может состоять, например, из нескольких замкнутых кривых.

Пример 1.3.5. Кольцо $r<|z-z_0|<R$ – двусвязная область. Граница кольца состоит из двух окружностей $|z-z_0|=r$ и $|z-z_0|=R$ (рис. 1.25).

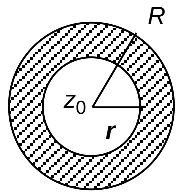


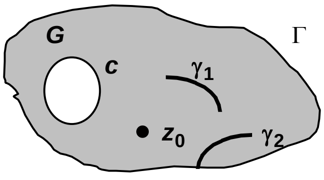
Рис. 1.25

В общем случае граница многосвязной области может состоять из замкнутых кривых, разрезов, точек или иметь более сложную структуру.

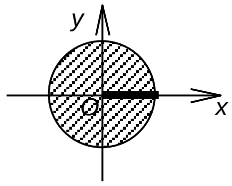
Пример 1.3.6. Область G, изображённая на рис. 1.26 – четырёхсвязная. Граница области G состоит из четырёх отдельных частей: $\Gamma\bigcup\gamma_2$, c, γ_1, z_0.

Пример 1.3.7. Проколотая окрестность точки z_0: $0<|z-z_0|<R$ является двусвязной областью.

Пример 1.3.8. Область $G:\{|z|<1,\, 0<\arg z<2\pi\}$ является односвязной. Эту область называют так: «круг $|z|<1$ с разрезом вдоль отрезка $[0,1]$» (рис. 1.27)..



Рмс. 1.26



Рмс. 1.27

Определение 1.3.12. *Множество E называется ограниченным, если существует круг K конечного радиуса такой, что $E \subset K$.*

Пример 1.3.9. Является ли ограниченным множество точек z, удовлетворяющих неравенствам $E = \{z : \operatorname{Re} z > 0, 1 < \operatorname{Im} z < 2\}$?

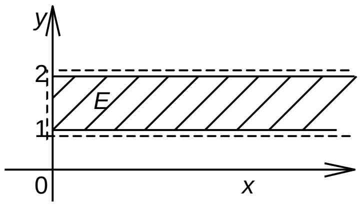


Рис. 1.28

Решение. Граница множества E состоит из прямых $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\operatorname{Im} z = 2$ (рис. 1.28). Множество E является неограниченным множеством.

3°. О понятии кривой.

Определение 1.3.13. *Говорят, что на интервале $t_1 < t < t_2$ задана комплекснозначная функция действительного аргумента t, если каждому значению t из этого интервала поставлено в соответствие комплексное число $z = z(t)$.*

Задание комплекснозначной функции действительного аргумента эквивалентно заданию двух действительных функций: $x = x(t)$ и $y = y(t)$ таких, что $z = z(t) = x(t) + iy(t)$. Комплекснозначная функция $z = z(t)$ называется непрерывной в точке t, если в этой точке непрерывны функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Определение 1.3.14. *Пусть на конечном отрезке $t_1 \le t \le t_2$ задана непрерывная комплекснозначная функция $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тогда говорят, что задана непрерывная кривая.*

Пример 1.3.10. Функция $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ на отрезке $0 \le t \le 2\pi$ эквивалентна двум действительным функциям $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, которые являются параметрическими уравнениями эллипса, следовательно, функция $z(t) = a\cos t + ib\sin t$ определяет на плоскости эллипс.

Пример 1.3.15. Функция $z(t) = t^2 + it\sqrt{2p}$, где $t \in [-1, 1]$ определяет дугу параболы $x(t) = t^2$, $y(t) = t\sqrt{2p}$. Действительно, исключая параметр t из этих двух уравнений, получим $y^2 = 2px$ – уравнение параболы.

Определение 1.3.15. *Кривая, у которой начало и конец совпадают, называется замкнутой.*

Определение 1.3.16. *Плоская кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$ называется гладкой, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$.*

Геометрически это означает, что в каждой точке гладкой кривой можно провести касательную.

Определение 1.3.17. *Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких кривых, примыкающих друг к другу концами.*

В точках соединения кривых касательная к такой кривой может не существовать. Очевидно, что любая кусочно-гладкая (а, следовательно, и гладкая) кривая обладает конечной длиной.

В дальнейшем мы будем рассматривать только кусочно-гладкие (или гладкие) кривые.

Проверьте себя

3.1. Определите порядок связности области, заданной на рисунке.

3.2. Определите, какие кривые задаются уравнениями:

а) $z = t + i(1 - t)$; *б*) $z = 1 + 2(\cos t + i\sin t)$; *в*) $z = t + \frac{i}{t}$.

3.3. Приведите пример множества:

а) связное, но не открытое; *б*) открытое, но не связное.

Глава 2. Функции комплексного переменного

§1. Основные понятия и определения

1 . Определение функции комплексного переменного.

Рассмотрим произвольное множество E точек комплексной плоскости или сферы.

Определение 2.1.1. *Если каждому комплексному числу* $z \in E$ *поставлено в соответствие одно или несколько значений* w *(к ним может принадлежать и* $w = \infty$*), то говорят, что на* E *определена функция комплексного переменного* z *и записывают:* $w = f(z)$ *или* $f : z \to w$.

Множество E называется *областью определения функции* (хотя оно может и не быть областью в смысле геометрического определения).

Совокупность D всех точек w называется *областью значений функции* $w = f(w)$. Говорят: «функция $w = f(w)$ осуществляет отображение множества E на множество D». При этом z называется *независимым переменным* или *аргументом*, или *прообразом*, а w – *зависимым переменным* или *функцией*, или *образом*.

Если каждому значению z соответствует только одно значение w, то функция $w = f(w)$ называется однозначной; в противном случае $w = f(w)$ – многозначная функция.

- Примерами однозначных функций являются функции $w = z^2$, $w = \operatorname{Re} z$, $w = \bar{z}$, определённые на всей конечной комплексной плоскости C_z.

- Примером многозначной функции является функция $w=\sqrt[n]{z}$, определённая на C_z.
- Примером бесконечнозначной функции является функция $w=\operatorname{Arg} z$, определённая для всех $z\neq 0$ и $z\neq\infty$.

Замечание. Задание одной функции $w=f(w)$ эквивалентно заданию двух вещественных функций двух вещественных переменных. Действительно, обозначим $z=x+iy$, $w=u+iv$. Тогда предложение «функция $w=f(w)$ определена на E» эквивалентно следующему: «каждой точке из E с координатами x и y поставлена в соответствие точка w из D с координатами u и v». Другими словами, по каждой паре действительных чисел (x, y) можно найти пару действительных чисел (u, v). А это значит, что u и v являются действительными функциями двух действительных переменных (x, y), т.е. $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Итак, одна комплексная функция $w=f(w)$ эквивалентна двум действительным функциям $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Переход от записи $w=f(z)$ к $w=u(x, y)+iv(x, y)$ называется выделением действительной и мнимой частей у функции комплексного переменного. Обозначается: $\operatorname{Re} w = u(x, y)$, $\operatorname{Im} w = v(x, y)$.

Пример 2.1.1. Выделить $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если $w=\dfrac{1}{z}$.

Решение. Т.к. $w=u+iv$, $z=x+iy$, то $u+iv=\dfrac{1}{x+iy}$. Выполним деление:

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $\operatorname{Re} w=u(x, y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im} w=v(x, y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Пример 2.1.2. Выделить $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$ функции $w=z^n$.

Решение. Для удобства запишем переменную z в тригонометрической форме: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Тогда $u+iv=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Отсюда $\operatorname{Re} w=u(r, \varphi)=r^n\cos n\varphi$, $\operatorname{Im} w=v(r, \varphi)=r^n\sin n\varphi$.

2º. Геометрическая интерпретация функции комплексного переменного.

Для графического изображения функции комплексного переменного потребовалось бы четырёхмерное пространство с координатами (x, y, u, v), что наглядно представить невозможно. Поэтому поступают так. Берут две плоскости: на одной – «плоскости аргумента (z)» – изображаются комплексные числа $z \in E$, а на другой – «плоскости значений функции (w)» – соответствующие им комплексные числа $w = f(z)$ (рис. 2.1).

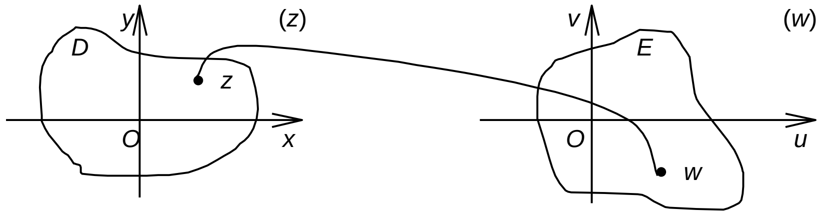


Рис. 2.1

С геометрической точки зрения функция комплексного переменного осуществляет отображение множества E плоскости (z) на множество D плоскости (w).

Определение 2.1.2. *Если* $w = f(z)$ *однозначная функция и такая, что* $f(z_1) \neq f(z_2)$ *при* $z_1 \neq z_2$, *то функцию* $w = f(z)$ *называют взаимно однозначной или однолистной.*

Определение 2.1.3. *Пусть* $w = f(z)$ *отображает множество* E *на множество* D. *Если каждому* $w \in D$ *поставить в соответствие множество всех его прообразов* $z \in E$, *то при таком соответствии на множестве* D *задаётся некоторая функция* $z = f^{-1}(w)$, *которая называется функцией, обратной к* $w = f(z)$ *или обратным отображением.*

Замечание. Для однолистной функции $w = f(z)$ обратное отображение $z = f^{-1}(w)$ также является однозначной функцией. Например, функция $w = z^2$ однозначная, но не однолистная.

Решение типовых примеров

Пример 2.1.3. Найти образ точки $z_0 = 1 + \frac{\pi}{2}i$ при отображении $w = z^2$.

Решение. Подставим $z_0 = 1 + \frac{\pi}{2}i$ в формулу, задающую функцию. Получим: $w_0 = \left(1 + \frac{\pi}{2}i\right)^2 = 1 + \pi i - \frac{\pi^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) + \pi i$.

Пример 2.1.4. Найти образ точки $z = 1 + i\sqrt{3}$ при отображении $w = |z| + \operatorname{Re} z$.

Решение. Т.к. $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2$, $\operatorname{Re}\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 1$, то $w_0 = 3$.

Пример 2.1.5. Найти образ прямой $Re\, z = a$ $(a - const)$ при отображении $w = z^2$.

Решение. Положим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогда $u + iv = (x + iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$. Отсюда $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Подставляя в эти равенства $x = a$, найдём $u = a^2 - y^2$, $v = 2ay$. В плоскости (w) получено уравнение линии в параметрической форме (y – параметр). Исключив y, получаем $u = a^2 - \dfrac{v^2}{4a^2}$ или $v^2 = -4a^2\left(u - a^2\right)$ уравнение параболы, симметричной относительно оси Ou (рис. 2.2).

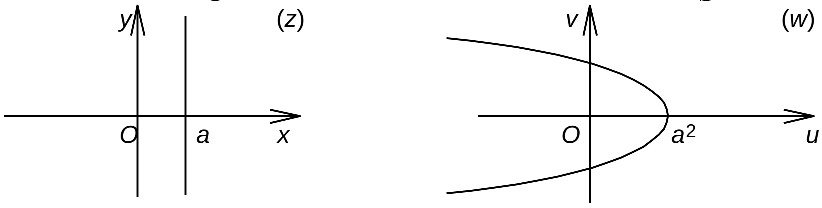


Рис. 2.2

Пример 2.1.6. Найти образ луча $\arg z = \alpha$ и образ окружности $|z| = R$ при отображении $w = z^2$.

Решение. Так как $\arg w = 2\arg z$, $|w| = |z|^2$, то луч $\arg z = \alpha$ плоскости (z) отображается в луч $\arg w = 2\alpha$ плоскости (w). Окружность с уравнением $|z| = R$ плоскости (z) отображается в окружности $|w| = R^2$ плоскости (w) (рис. 2.3).

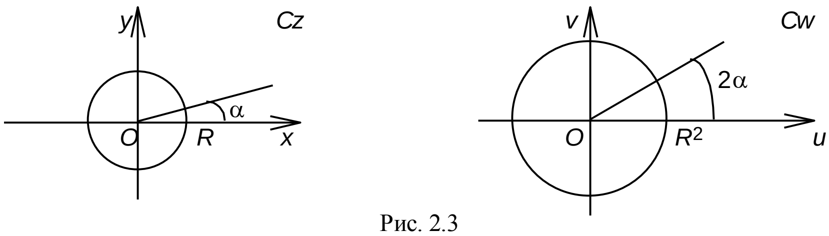


Рис. 2.3

Проверьте себя

4.1. Найдите образ точки $z_0 = i$ при отображении:

$а)\, w = \dfrac{\bar{z}}{z};$ $\quad б)\, w = \dfrac{1}{z};$ $\quad в)\, w = z^2 + 1;$

4.2. Найдите образ точки $z_0 = 1 - i$ при отображении:

$а)\, w = \dfrac{\bar{z}}{z};$ $\quad б)\, w = \dfrac{1}{z};$ $\quad в)\, w = z^2 + 1;$

4.3. Найдите образ окружности $|z| = \frac{1}{2}$ при отображении $w = \frac{1}{z}$;

4.4. Найдите образ прямой $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

§2. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 2.2.1. *Комплексное число* w_0 *называется пределом функции* $w = f(z)$ *при* $z \to z_0$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* z, *удовлетворяющих условию* $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$, *выполняется неравенство* $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. *Записывается*

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Геометрически это определение можно понимать так:

Число w_0 называется пределом функции $w = f(z)$ при $z \to z_0$, если для любой ε – окрестности точки w_0 найдётся такая δ – окрестность точки z_0, которая с помощью функции $w = f(z)$ отображается в ε – окрестность точки w_0, кроме, быть может, самой точки z_0 (рис. 2.4).

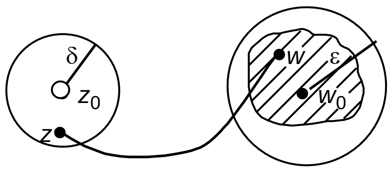


Рис. 2.4

Замечание 1. Способов стремления $z \to z_0$ на комплексной плоскости бесконечно много (хотя бы по любому лучу, выходящему из z_0), поэтому требование существования предела независимо от способа стремления $z \to z_0$ является более сильным по сравнению с этим требованием для функции действительного переменного, где способов стремления $x \to x_0$ только два: слева и справа от точки x_0. Очевидно, существование $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ означает, что функция имеет один и тот же предел при $z \to z_0$ по любой кривой. Если же по двум разным кривым функция имеет разные пределы или по какой-нибудь кривой предела вовсе нет, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Для предела функции комплексного переменного справедливы предложения:

1. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$. Тогда существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ равносильно существованию двух пределов $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y)$ для $w_0 \neq \infty$. Т.е.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

2. $$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|, \\ \lim\limits_{z \to z_0} \arg f(z) = \arg w_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

для $w_0 \neq 0$ и $w_0 \neq \infty$.

Замечание 2. Определение предела функции комплексного аргумента формально ничем не отличается от определения предела функции действительного аргумента, и следовательно, все теоремы о пределах суммы, разности, произведения, частного остаются в силе для функций комплексного аргумента.

Определение 2.2.2. *Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой её окрестности. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ и его значение совпадает с $f(z_0)$, т.е.*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.3}$$

Это определение можно записать и с помощью неравенств: *функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

Так же, как и для функций действительного аргумента, положим $z - z_0 = \Delta z$ (приращение аргумента), $f(z) - f(z_0) = \Delta w$ (приращение функции). Тогда условие (2.3) непрерывности функции в точке z_0 на языке приращений запишется так:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0.$$

Другими словами: функция $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δz соответствует бесконечно малое приращение функции Δw.

Определение 2.2.3. *Функция $w = f(z)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Из соотношений (2.1) следует также, что если в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ непрерывна, то в этой точке непрерывны как действительная, так и мнимая части функции и наоборот.

Основные свойства непрерывных функций действительного аргумента остаются в силе и для функций комплексного переменного. Среди теорем о функциях, непрерывных на множестве, отметим без доказательства две:

1) Функция $f(z)$ непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{G}$, ограничена в этой области, т.е. существует такое число $0 < M \neq \infty$, что $|f(z)| \leq M$ для всех $z \in \overline{G}$.

2) Функция $f(z)$ непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{G}$, принимает в ней своё минимальное и своё максимальное (по модулю) значения.

Пример 2.2.1. Найти $\lim\limits_{z \to -1+i} \dfrac{z}{z+1}$.

Решение. Подставляя $z = -1 + i$, получим

$$\lim_{z \to -1+i} \frac{z}{z+1} = \frac{-1+i}{i} = -\frac{1}{i} + 1 = 1 + i.$$

Пример 2.2.2. Найти $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2}{z-i}$.

Решение. $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2}{z-i} = \dfrac{-1}{0} = \infty$.

Пример 2.2.3. Найти $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$.

Решение. Если $z = 0$, то $\bar{z} = 0$ и мы получим неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Найдём предел по прямой $y = kx$:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{x + iy}{x - iyi} = \lim_{x \to 0} \frac{x + ikx}{x - ikx} = \frac{1 + ik}{1 - ik}.$$

Значение предела $w_0 = \dfrac{1+ik}{1-ik}$ зависит от числа k, т.е. от способа стремления $z \to 0$. Например, при $k = 0$ (прямая $y = 0$) $w_0 = 1$, при $k = 0$ (прямая $y = x$) $w_0 = \dfrac{1+i}{1-i}$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ не существует.

Проверьте себя

5.1. Вычислите $\lim\limits_{x+iy\to i}\left(3x^2 - y + i\left(x+3y\right)\right)$.

5.2. Вычислите $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2}{\mathrm{Im}\, z}$

а) по параболе $y = x^2$; *б*) по прямой $x = 0$; *в*) по прямой $y = x$.

Существует ли $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(\mathrm{Re}\, z\right)^2}{\mathrm{Im}\, z}$?

5.3. Укажите, какие из заданных функций являются непрерывными на всей комплексной плоскости:

а) w = Rez; *б*) w = Imz; 3) $w = \bar{z}$; *в*) $w = |z|$;

г) $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, где a_i – комплексные коэффициенты, $i = 1, 2, \ldots, n$;

д) $w = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, причём $Q(z) \neq 0$.

5.4. Вычислите $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-2i}{z+i}$.

5.5. Вычислите $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2+1}{z-2i}$.

5.6. Вычислите $\lim\limits_{z\to -1}\arg\left(z+1\right)$.

§1. Производная функции комплексного переменного

1°. Определение производной

Пусть функция $w = f(z)$ определена в области E. Возьмём точку $z \in E$ и точку $z+\Delta z \in E$. Обозначим приращение функции $f(z)$ при переходе от точки z к точке $z+\Delta z$ через Δw: $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Определение 3.1.1. *Если существует конечный предел отношения* $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ *при* $\Delta z \to 0$, *то этот предел называется производной функции* $w = f(z)$ *в точке* z *и обозначается*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{3.1}$$

Сама функция $f(z)$, обладающая производной называется *дифференцируемой* или *моногенной* в точке z.

2°. Условия Коши − Римана

Теорема 3.1.1. (Необходимые условия дифференцируемости).

Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, то её действительная и мнимая части обладают частными производными первого порядка, которые удовлетворяют условиям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Доказательство.► По условию теоремы функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z, т.е. существует $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, не зависящий от способа стремления $\Delta z \to 0$. Положим $z = x + iy$, тогда

$$z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y).$$

Имеем $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, а также

$$f(z+\Delta z) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y).$$

Отсюда $\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = \big(u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y)\big) +$

$$+ i\big(v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y)\big) = \Delta u + i\Delta v.$$

Отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ примет вид: $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \dfrac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$.

Рассмотрим два способа стремления Δz к нулю.

1) пусть $\Delta y = 0$, $\Delta x \to 0$, т.е. точка $z + \Delta z$ стремится к точке z по прямой, параллельной оси Ox (рис. 3.1).

В этом случае

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

2) пусть $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$, т.е. точка $z + \Delta z$ стремится к z по прямой, параллельной оси Oy (рис. 3.2).

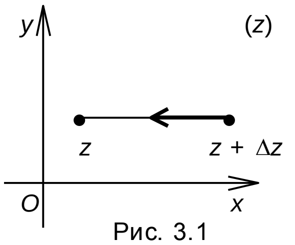


Рис. 3.1

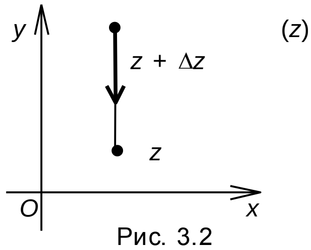


Рис. 3.2

В этом случае

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Так как в обоих рассмотренных случаях предел должен быть один и тот же, то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приравнивая друг другу действительные и мнимые части, получим условия Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. ◄$$

Т е о р е м а 3.1.2. (достаточные условия дифференцируемости).

Если действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части функции $w = f(z)$ в точке z имеют полные дифференциалы и удовлетворяют условиям Коши – Римана, то функция $f(z)$ дифференцируема в точке z.

Д о к а з а т е л ь с т в о.► По условию функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют в точке z полный дифференциал, значит, их полное приращение представимо в виде:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y,$$

где α, β, α_1, β_1 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Преобразуем выражение $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$:

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\alpha+\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\beta\right)=$$

$$=\gamma\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\text{, где } \gamma\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0 \text{ и } \Delta y\to 0.$$

Аналогично $\alpha_1\Delta x+\beta_1\Delta y=\gamma_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, где $\gamma_1\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Получаем:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\gamma\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

где $\gamma\to 0$, $\gamma_1\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$. Тогда:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\gamma|\Delta z|+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\gamma_1|\Delta z|\right)}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Учитывая условия Коши – Римана (3.2), получим:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+(\gamma+i\gamma_1)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Разделив почленно, находим

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\gamma+i\gamma_1}{\Delta x+i\Delta y}|\Delta z|. \tag{3.3}$$

Очевидно, $\Delta z\to 0$ одновременно с $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Оценим по модулю слагаемое $\dfrac{\gamma+i\gamma_1}{\Delta x+i\Delta y}|\Delta z|$:

$$\left|\frac{\gamma+i\gamma_1}{\Delta x+i\Delta y}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\frac{|\gamma+i\gamma_1|}{|\Delta x+i\Delta y|}=\sqrt{\gamma^2+\gamma_1{}^2}\to 0$$

при $\Delta z\to 0$.

Итак, переходя к пределу при $\Delta z\to 0$ в равенстве (3.3), находим

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}+0\text{, т.е. } f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

значит, функция $w=f(z)$ дифференцируема.◄

Используя условия Коши – Римана, можно получить формулы вычисления производной функции $w=f(z)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.4}$$

Отметим, что общепринятое в учебной и в научной литературе название «условия Коши – Римана», несправедливо с исторической точки зрения, т. к. эти условия (3.2) раньше изучались Д'Аламбером и, в особенности, Эйлером в работах, посвящённых применению функций комплексного переменного к гидромеханике, картографии и интегральному исчислению. Однако, основы общей теории аналитических функций созданы трудами трёх выдающихся математиков 19 века – А. Коши (1789 – 1857), Б. Римана (1826 – 1866) и К. Вейерштрасса (1815 – 1897).

Определение 3.1.2. *Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в области E, если она дифференцируема в каждой точке этой области.*

Все правила и формулы дифференцирования действительного анализа остаются в силе и для функций комплексного переменного. Так, например, если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in E$, а функция $T = F(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = f(z_0)$, где $w_0 \in D$ (D − область значений функции $w = f(z)$), то сложная функция $T = F(f(z))$ дифференцируема в точке z_0, причём

$$\frac{dT}{dz}=\frac{dF}{dw}\cdot\frac{dw}{dz}.$$

3°. Понятие аналитической функции

Определение 3.1.3. *Функция $w = f(z)$, однозначная и дифференцируемая во всех точках области G, называется аналитической в этой области.*

Определение 3.1.4. *Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z, если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.*

Обратите внимание! Условия дифференцируемости и аналитичности для однозначной функции $f(z)$ *в области* совпадают. Условие аналитичности функции *в точке* содержит **больше** требований, чем условие дифференцируемости, т.к. для аналитичности функции $f(z)$ в точке необходимо, чтобы $f(z)$ имела производную не только в самой этой точке, но и в некоторой её окрестности.

Замечание. Известно, что для дифференцируемости функций двух действительных переменных $u(x, y)$ и $v(x, y)$ достаточно существования и непрерывности их частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Таким образом, используя теоремы 3.1.1 и 3.1.2, можно утверждать, что для того, чтобы функция $w = f(z) = u + iv$ была аналитической в области G, необходимо и достаточно, чтобы в этой области частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ существовали, были непрерывными и удовлетворяли условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Решение типовых примеров

Пример 3.1.1. Исследовать функцию $w = z^3$ на аналитичность.

Решение: Выделим действительную и мнимую части функции

$$w = z^3 = (x+iy)^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2 y - y^3\right).$$

Отсюда $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2 y - y^3$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy.$$

Видим, что условия Коши – Римана выполняются всюду на плоскости (z), функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы (как известно, дифференцируемость функции двух переменных обеспечивает существование непрерывных частных производных). Тогда по сформулированному замечанию на с. функция $w = z^3$ аналитична на плоскости (z). По формуле (1.4) находим производную:

$$\left(z^3\right)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) = 3z^2.$$

Пример 3.1.2. Исследовать функцию $w = z \operatorname{Re} z$ на аналитичность.

Решение: Имеем $u + iv = (x+iy)x = x^2 + ixy$. Значит, $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = xy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = y$. Видим, что частные производные всюду непрерывны. Условия Коши – Римана выполняются лишь в одной точке плоскости $z = 0$, т.е. лишь в одной точке $z = 0$ плоскости (z) функция имеет производную. Таким образом, $w = z \operatorname{Re} z$ только в одной точке $z = 0$ дифференцируема, но нигде не аналитична.

Пример 3.1.3. Исследовать функцию $w = |z|\bar{z}$ на аналитичность.

Решение: Выделим $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$. Имеем $u+iv=\sqrt{x^2+y^2}\,(x-iy)$, отсюда

$$u(x,\,y)=x\sqrt{x^2+y^2}\,,\ v(x,\,y)=-y\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Функции $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$ непрерывны во всех точках плоскости (z). Найдём частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Частные производные непрерывны всюду, кроме точки $(0,\,0)$. Условие $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняется, но $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ ни в одной точке плоскости (z). Поэтому заданная функция $w=|z|\bar{z}$ нигде не аналитична и не дифференцируема.

Пример 3.1.4. Вывести условия Коши – Римана в полярных координатах $(r,\,\varphi)$.

Решение: Условия Коши – Римана в декартовых координатах имеют вид $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Чтобы получить эти условия в полярных координатах $(r,\,\varphi)$, воспользуемся формулами, связывающими декартовы и полярные координаты точки $(x,\,y)$ на плоскости (z): $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда функции $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$ можно рассматривать как сложные функции переменных r и φ.

$$u(x,\,y)=u(x(r,\,\varphi),\,y(r,\,\varphi)),\ v(x,\,y)=v(x(r,\,\varphi),\,y(r,\,\varphi)).$$

По формулам дифференцирования сложной функции получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\left(-r\sin\varphi\right)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}\left(-r\sin\varphi\right)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi.$$

Из первого и четвёртого соотношений с учётом условий Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ получим равенство

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Из второго и третьего соотношений с учётом условий Коши – Римана получаем равенство

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Найденные соотношения образуют условия Коши – Римана в полярных координатах.

Проверьте себя

6.1. Исследовать функцию на аналитичность

а) $w=\bar{z}\operatorname{Re}z$; *б*) $w=\frac{1}{z}$; *в*) $w=\left(z-i\right)^2$.

6.2. Непосредственным вычислением покажите, что $\left(z^n\right)'=nz^{n-1}$.

§2. Связь аналитических и гармонических функций

Определение 3.2.1. *Действительная функция двух действительных переменных* $\varphi(x, y)$ *называется гармонической в области* G*, если она в этой области непрерывна, имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа:*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Пример 3.2.1. Убедитесь сами, что функции $\varphi(x, y)=x^2-y^2$, $\varphi(x, y)=xy$, $\varphi(x, y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ – гармонические на всей плоскости, а функции $\varphi(x, y)=x^2+y^2$, $\varphi(x, y)=\dfrac{y}{x}$ – не гармонические нигде.

Теорема 3.2.1. Действительная и мнимая части аналитической функции в области D являются гармоническими в этой области.

Доказательство. ► Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в D. Это значит, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ как функции двух переменных дифференцируемы в D и в каждой точке этой области выполняются равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Обе части первого равенства продифференцируем по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Обе части второго равенства продифференцируем по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Складывая почленно полученные равенства, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Т.е. функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Аналогично доказывается для функции $v(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Значит, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются гармоническими функциями в D.◄

Замечание 1. Позже будет доказано, что аналитическая функция обладает производными любого порядка. Поэтому дифференцирование уравнений Коши – Римана является законным действием.

Замечание 2. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, однако можно построить аналитическую функцию, задав в качестве её действительной или мнимой части, одну гармоническую функцию.

Решение типового примера

Пример 3.2.2. Найти аналитическую функцию $w = f(z)$, если известна её действительная часть $\operatorname{Re} w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Решение: Убедимся, что функция $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ гармоническая. Для этого находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x^3 + 6xy^2}{\left(x^2 + y^2\right)^3}.$$

Подставляя в уравнение Лапласа, видим, что равенство $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ выполняется. Кроме того, частные производные первого и второго порядков непрерывны во всех точках плоскости, кроме точки $(0, 0)$. Для отыскания функции $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ воспользуемся условиями Коши – Римана $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$. Имеем $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2},\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$. Значит, для определения функции $v(x, y)$ имеем систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}. \end{cases}.$$

Следовательно, известен полный дифференциал

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)} dy.$$

Воспользуемся одним из способов отыскания функции двух переменных по её полному дифференциалу. Первое уравнение даёт

$$v(x, y) = \int \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx + C(y).$$

Так как интегрирование проводим по x, то постоянная интегрирования может зависеть от y. Интегрируя, получаем $v(x,\, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} + C(y)$. Для нахождения функции $C(y)$, воспользуемся вторым уравнением системы:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + C'(y) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Отсюда $C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C$. Итак, $v(x,\, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} + C$.

Окончательно $f(z) = u + iv = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2} + C\right)$ или

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} + iC = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} + iC.$$

Таким образом, искомая функция имеет вид: $f(z) = \dfrac{1}{z} + iC$.

Определение 3.2.2. *Две гармонические функции, связанные условиями Коши – Римана, называются сопряжёнными гармоническими функциями.*

Ясно, что действительная и мнимая части аналитической функции являются сопряжёнными гармоническими функциями.

§3. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного

1°. Принцип сохранения области

Сформулируем без доказательства **теорему**:

Если функция $w = f(z)$ аналитична в области G, имеет в этой области производную $f'(z) \neq 0$, то функция $w = f(z)$ отображает область G плоскости (z) в область G_1 плоскости (w), дугу γ, проходящую через точку $z_0 \in G$ в дугу Γ, проходящую через точку $w_0 = f(z_0) \in G_1$.

При этих условиях достаточно малая окрестность точки $z_0 \in G$ взаимно однозначно (однолистно) отображается в достаточно малую окрестность точки $w_0 \in G_1$.

2°. Геометрический смысл аргумента производной

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в G. Пусть z_0 – произвольная точка области G и $f'(z_0) \neq 0$. Чтобы выяснить геометрический смысл производной $f'(z_0)$, представим комплексное число $f'(z_0)$ в тригонометрической форме: $f'(z_0)=k(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, и выясним геометрическое значение аргумента α производной и её модуля k.

Из аналитичности функции $w=f(z)$ в области G следует существование конечного предела

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0). \tag{3.1}$$

Из свойств пределов функции выпишем свойство, относящееся к аргументу предела:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg f'(z_0). \tag{3.2}$$

Известно, что аргумент частного комплексных чисел равен разности аргументов делимого и делителя. Имеем:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\arg\Delta w-\arg\Delta z)=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z \tag{3.3}$$

Проведём из точки z_0 гладкую дугу γ (рис.3.3).

Образом дуги γ будет дуга Γ, выходящая из точки $w_0=f(z_0)$ (рис. 3.4). Возьмём на γ точку $z_0+\Delta z$, которая отобразится в точку $w_0+\Delta w$ на дуге Γ. При стремлении $z_0+\Delta z\to z_0$ по дуге γ одновременно $w_0+\Delta w\to w_0$ по дуге Γ. В силу непрерывности функции $w=f(z)$ приращения Δz и Δw одновременно стремятся к нулю.

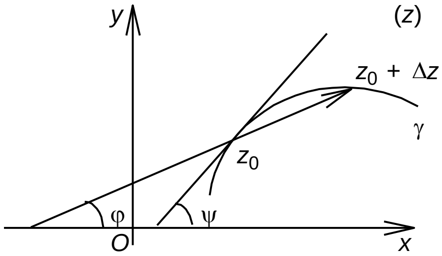


Рис. 3.3

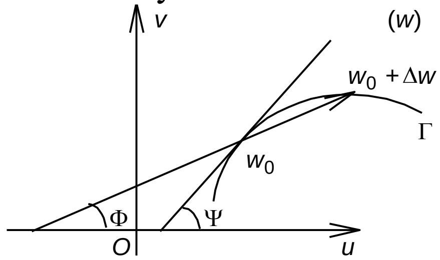


Рис. 3.4

Обозначим через φ угол наклона вектора Δz к положительному направлению оси Ox, а через Φ − угол наклона вектора Δw к положительному направлению оси Ou. Далее, пусть ψ − угол наклона касательной к γ в точке z_0, Ψ − угол наклона касательной к Γ в точке w_0.

Так как $\arg f'(z_0)=\alpha$, то из равенств (3.2) и (3.3) получаем

$$\alpha=\arg f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z.$$

Но $\arg\Delta w=\Phi$, $\arg\Delta z=\varphi$ и, следовательно,

$$\alpha=\lim_{\Delta z\to 0}\Phi-\lim_{\Delta z\to 0}\varphi=\Psi-\psi.$$

Итак, $\alpha = \Psi - \psi$ или $\Psi = \psi + \alpha$, т.е. α − тот угол, на который нужно повернуть касательную в точке z_0, к дуге γ, чтобы получить направление касательной к дуге Γ в точке w_0.

Вывод: $\arg f'(z_0)$ равен углу поворота дуги γ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ (при $f'(z_0) \neq 0$).

Способов стремления $\Delta z \to 0$ бесконечно много. Проведём из точки z_0 кривую γ_1, которая отобразится в кривую Γ_1, выходящую из точки w_0 (рис.32, 33). Повторяя предыдущие рассуждения, найдём $\alpha = \Psi_1 - \psi_1$. Тогда $\Psi_1 - \psi_1 = \Psi - \psi$ или $\Psi_1 - \Psi = \psi_1 - \psi$, где $\Psi_1 - \Psi$ − угол между кривыми Γ и Γ_1 в точке w_0, $\psi_1 - \psi$ угол между кривыми γ и γ_1 в точке z_0. Следовательно, при отображении посредством аналитической функции $w = f(z)$, производная которой отлична от нуля, все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0, поворачиваются на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$. Отсюда следует также, что угол между двумя кривыми при отображении посредством аналитической функции не меняется, так как касательные к обеим кривым повернутся на один и тот же угол. Это свойство называется *свойством постоянства углов при отображении* $w = f(z)$.

3°. Геометрический смысл модуля производной

Вернёмся к равенству (3.1):

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0).$$

Выпишем свойство, относящееся к модулю предела

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \left| f'(z_0) \right|. \tag{3.4}$$

Так как $\left| f'(z_0) \right| = k$, то имеем

$$k = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \tag{3.5}$$

Здесь $|\Delta w|$ − длина хорды, стягивающей дугу с концами в точках w_0 и $w_0 + \Delta w$, $|\Delta z|$ − длина хорды, стягивающей дугу с концами в точках z_0 и $z_0 + \Delta z$. Предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ называется *коэффициентом растяжения в точке* z_0. Он показывает во сколько раз бесконечно малая дуга на кривой Γ больше (меньше) бесконечно малой дуги на кривой γ.

Вывод: При отображении посредством аналитической функции, производная которой отлична от нуля, все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0, получают одно и то же растяжение, равное $k = |f'(z_0)|$. При $k > 1$ бесконечно малая дуга при отображении удлиняется, а при $k < 1$ она укорачивается.

В итоге можно сформулировать **т е о р е м у**:

Если в точке z_0 производная аналитической функции не равна нулю, то все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0, при отображении поворачиваются на один и тот же угол, равный аргументу производной, и получают одно и то же растяжение, равное модулю производной.

Решение типовых примеров

Пример 3.3.1. Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = z^2 + 2z$.

Решение: Найдём производную $w' = 2z + 2$ и подставим число $z_0 = i$. Имеем $w'(i) = 2i + 2$. Тогда $|2i + 2| = \sqrt{8}$, $\arg(2i + 2) = \dfrac{\pi}{4}$. Значит, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $k = \sqrt{8}$.

Пример 3.3.2. Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ при отображении $w = z + \dfrac{1}{z}$.

Решение: Найдём производную $w' = 1 - \dfrac{1}{z^2}$ и подставим заданное число $z_0 = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$:

$$w'(z_0) = 1 - \frac{2}{(1-i)^2} = \frac{-2i-2}{-2i} = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i.$$

Тогда $|1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg(1 - i) = -\dfrac{\pi}{4}$, т.е. $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$, $k = \sqrt{2}$.

Пример 3.3.3. Выяснить, какая часть плоскости (z) сжимается и какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w = z^3$.

Решение. Коэффициент растяжения k находится по формуле $k = |w'(z)|$. В тех точках z, для которых $k > 1$ происходит растяжение, а в точках z, для которых $k < 1$ − сжатие. Имеем $w' = 3z^2$. Растяжение произойдёт при $\left|3z^2\right| > 1$, т.е. при $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ – часть плоскости, лежащая вне круга радиуса $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ с центром в начале координат. Сжатие произойдёт при $\left|3z^2\right| < 1$, т.е. при $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ – часть плоскости, лежащая внутри круга радиуса $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ с центром в начале координат.

Проверьте себя

7.1. Проверьте, что следующие функции двух вещественных переменных являются гармоническими

а) $\varphi(x, y) = x^2 + 2x - y^2$; б) $\varphi(x, y) = 2e^x \cos y$;

в) $\varphi(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; г) $\varphi(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

7.2. Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части и значению $f(z_0)$

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x,\ f(i) = 2i - 1.$$

7.3. Восстановите аналитическую функцию аргумента z, мнимая часть которой равна

$$v(x, y) = 2xy + 3x.$$

7.4. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k при отображении $w = z^3$ в точке $z_0 = -\dfrac{1}{4}$.

7.5. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k при отображении $w = z^3$ в точке $z_0 = \sqrt{3} - i$.

7.6. Выясните, какая часть плоскости (z) сжимается и какая растягивается при отображении $w = z^2 + 2z$.

Глава 4. Конформные отображения

§ 1. Определение конформного отображения

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0.

Определение 4.1.1. *Отображение* $w = f(z)$ *называется конформным в точке* z_0*, если оно сохраняет углы между кривыми и обладает свойством постоянства растяжений в точке* z_0.

Из результатов § 3 главы 3 вытекает, что если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0 (аналитична в точке z_0) и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.

Определение 4.1.2. *Пусть функция* $f(z)$ *однолистна в ограниченной области* G *и пусть отображение* $w = f(z)$ *является конформным в каждой точке области* G*. Тогда это отображение называется конформным в области* G.

Таким образом, если функция $f(z)$:

1) дифференцируема в ограниченной области G,

2) однолистна в области G,

3) её производная отлична от нуля в этой области,

то отображение $w = f(z)$ является конформным в области G.

З а м е ч а н и е. Условие $f'(z_0) \neq 0$ является существенным для конформности отображения в точке z_0. Например, рассмотрим функцию $w = z^2$. Эта функция аналитична в точке $z_0 = 0$ (проверьте!), но её производная $w' = 2z$ и $w'(0) = 0$. При этом угловая область $\alpha < \arg z < \beta$ отображается в угловую область $2\alpha < \arg z < 2\beta$, т.е. углы в точке z_0 удваиваются, конформность в этой точке нарушена.

Перейдём к рассмотрению основных элементарных функций комплексного переменного и отображений осуществляемых ими.

§2. Линейная функция

Определение 4.2.1. *Преобразование* $w = az + b$*, где* a*,* b *– комплексные числа и* $a \neq 0$*, называется линейным.*

Линейная функция $w = az + b$ определена на расширенной комплексной плоскости (z). Т.к. $w' = a \neq 0$, то отображение $w = az + b$ конформно на расширенной комплексной плоскости.

Рассмотрим частные случаи.

1) $w = z + b$ $(a = 1)$ − *преобразование переноса*.
Представим плоскости (z) и (w) наложенными друг на друга. Так как комплексные числа складываются как векторы, то точка w получена путём смещения точки z на вектор b. (рис.34)

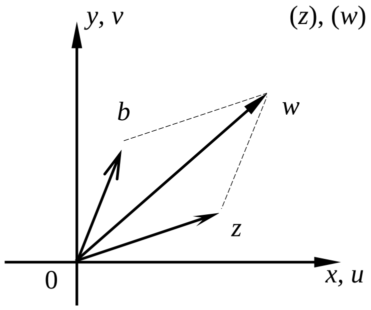


Рис.34

Таким образом, отображение $w = z + b$ осуществляет параллельный перенос точек плоскости (z) на вектор b. При этом на вектор b смещается и всякая дуга и всякая область. Например, $w = z + 2$ есть перенос точек z на две единицы вправо параллельно оси Ox (рис. 35), $w = z - i$ это перенос точек z на одну единицу ниже параллельно оси Oy.

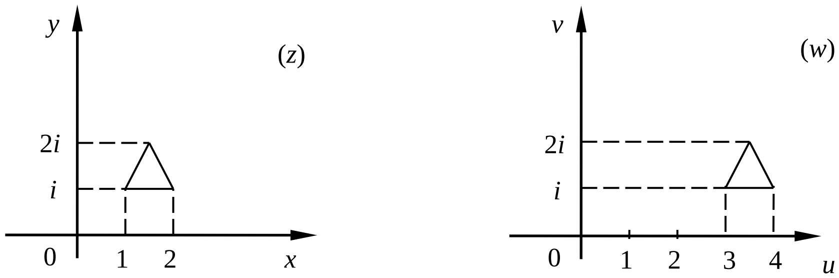


Рис.35

2) $w = e^{i\alpha} z$ $(a = e^{i\alpha}, b = 0)$. *Преобразование вращения на угол* α.
Имеем $|w| = |e^{i\alpha}||z|$, отсюда $|w| = |z|$, т.к. $|e^{i\alpha}| = 1$,

$\arg w = \arg e^{i\alpha} + \arg z = \alpha + \arg z$.

Таким образом, при переходе от z к w модуль не меняется, а аргумент увеличивается на угол α, т.е. точка z переходит в точку w при помощи поворота вектора z около начала координат на угол α. При этом на угол α повернутся и всякая дуга, и всякая область. Следовательно, отображение $w = e^{i\alpha} z$ есть вращение около начала координат на угол α (рис 36).

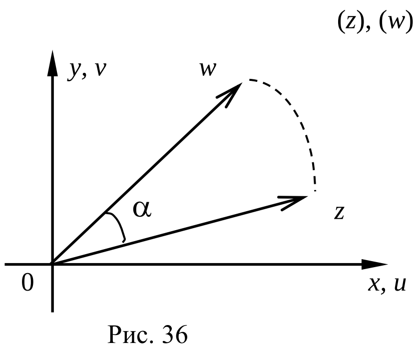


Рис. 36

3) $w = kz$ $(b = 0,$ $a = k$ − действительное, положительное число). *Преобразование подобия.*
В данном случае имеем $|w| = k|z|$, $\arg w = \arg k + \arg z$, но $\arg k = 0$, поэтому $\arg w = \arg z$. Таким образом, аргумент не изменился, а модуль увеличился в k раз, т.е. точка w получается перемещением точки z по лучу, выходящему из начала координат так,

что её расстояние от начала координат изменяется в k раз. Это так называемое преобразование подобия с центром подобия в точке O и коэффициентом подобия k (рис. 37).

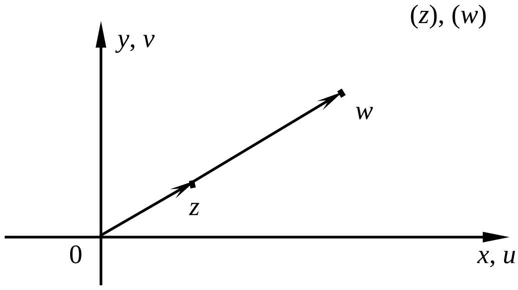


Рис. 37

Теперь в общем линейном преобразовании $w = az + b$ положим $a = ke^{i\alpha}$, получим

$$w = ke^{i\alpha}z + b.$$

Итак, линейная функция $w = az + b$ представляет собой суперпозицию трёх преобразований:

1) преобразование вращения вокруг начала координат на угол $\alpha = \arg a$;

2) преобразование подобия с центром подобия в точке O и коэффициентом подобия $k = |a|$;

3) параллельный перенос на вектор b.

Пример 4.2.1. Найти функцию, отображающую полосу $1 < \mathrm{Im}\, z < 2$ (рис. 38) в полосу $3 < \mathrm{Re}\, w < 5$ (рис. 39).

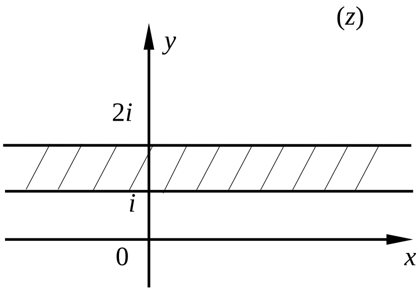


Рис. 38

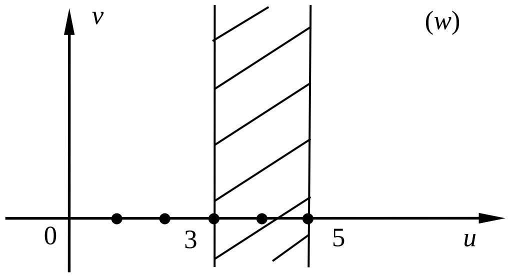


Рис. 39

Решение: Функция $t = e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -iz$ повернёт заданную полосу в плоскости (z) на 90° по часовой стрелке вокруг начала координат. Получим полосу $1 < \mathrm{Re}\, t < 2$ в плоскости (t) (рис.40).

Функция $\zeta = 2t$ преобразует полосу в плоскости (t) в подобную полосу шириной в 2 единицы с центром подобия в точке 0. Получим полосу $2 < \mathrm{Re}\,\zeta < 4$ в плоскости (ζ) (рис.41). Осталось с помощью функции $w = \zeta + 1$ сдвинуть эту полосу на одну единицу вправо. Получим полосу $3 < \mathrm{Re}\, w < 5$ в плоскости (w) (рис. 39). Чтобы получить искомую функцию, подставим $\zeta = 2t$, $t = -iz$. Получим $w = \zeta + 1 = 2t + 1 = -2iz + 1$.

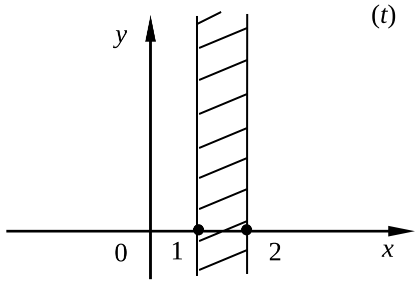


Рис. 40

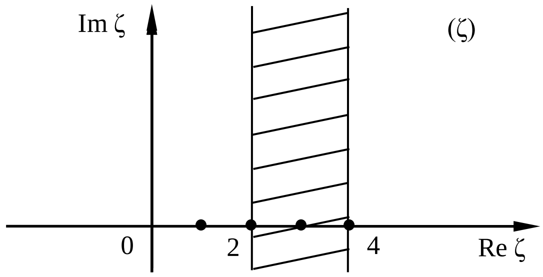


Рис.41

З а м е ч а н и е. Для решения этой задачи можно выбрать и другую последовательность преобразований.

§3. Функция $w = \dfrac{1}{z}$

Доопределим функцию $w = \dfrac{1}{z}$ в точках $z = 0$ и $z = \infty$, полагая $w = 0$ при $z = \infty$ и $w = \infty$ при $z = 0$.

Равенство однозначно разрешимо относительно z: $z = \dfrac{1}{w}$. Положим $z = 0$ при $w = \infty$ и $z = \infty$ при $w = 0$. Тогда функция $w = \dfrac{1}{z}$ является однолистной в расширенной комплексной плоскости (z).

1°. Геометрические свойства функции $w = \dfrac{1}{z}$

Имеем $|w| = \dfrac{1}{|z|}$. Отсюда следует, что:

а) окружность $|z| = 1$ отобразится сама в себя, т.е. $|z| = 1 \to |w| = 1$;

б) внутренность круга $|z| < 1 \to |w| > 1$ – во внешность;

в) внешность круга $|z| > 1 \to |w| < 1$ – во внутренность.

Далее, $\arg w = -\arg z$, т.е. если $\arg z = \alpha$, то $\arg w = -\alpha$ (рис. 42).

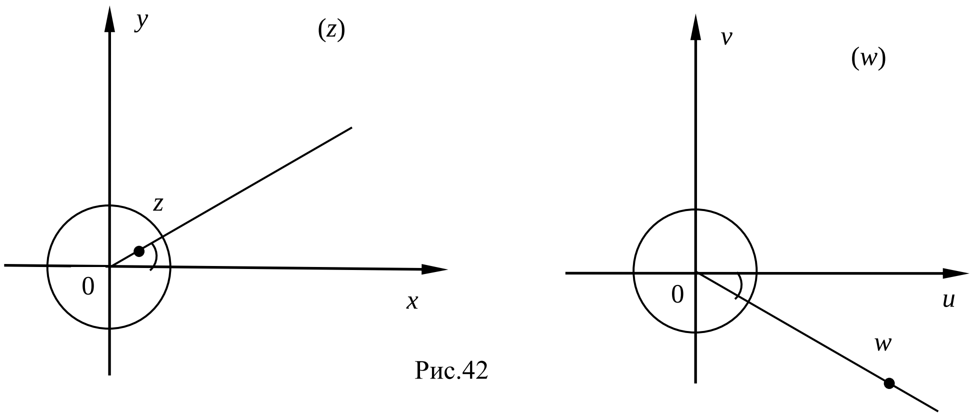


Рис.42

Чтобы получить образ точки z, выполним последовательно два преобразования: 1) $t=\frac{1}{\bar z}$, 2) $w=\bar t$ и, подставляя, найдём $w=\frac{1}{\bar{\bar z}}=\frac{1}{z}$. Для преобразования $t=\frac{1}{\bar z}$ имеем $|t|=\frac{1}{|z|}$, $\arg t=-\arg \bar z=\arg z$. Таким образом, точки t и z лежат на одном луче, выходящем из точки O, а расстояние точки t от точки O таково, что $|z||t|=1$. Преобразование $t=\frac{1}{\bar z}$ называется *инверсией относительно окружности* $|z|=1$ (или *симметрией относительно окружности* $|z|=1$).

Для преобразования $w=\bar t$ имеем $|w|=|t|$, $\arg w=\arg \bar t=-\arg t$. Другими словами, w симметрична t относительно действительной оси.

Итак, преобразование $w=\frac{1}{z}$ представляет собой суперпозицию двух отображений:

1) преобразование симметрии относительно окружности единичного радиуса;
2) преобразование симметрии относительно действительной оси (рис. 43).

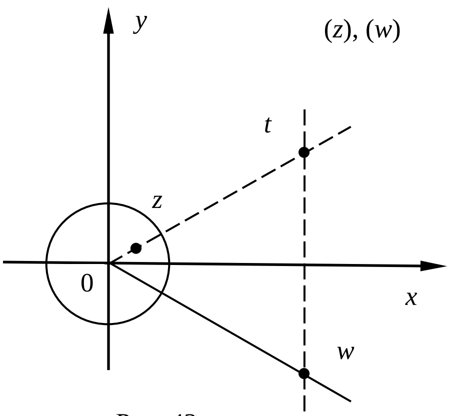


Рис. 43

Рассмотрим ещё одно геометрическое свойство отображения $w=\frac{1}{z}$.

Теорема 4.3.1. При отображении $w=\frac{1}{z}$ окружность переходит в окружность или прямую; прямая переходит в прямую или в окружность, причём отображение $w=\frac{1}{z}$ конформно в расширенной комплексной плоскости.

Доказательство.▶ Так как производная $w'=-\frac{1}{z^2}$ отлична от нуля всюду, кроме $z=\infty$, то отображение $w=\frac{1}{z}$ конформно во всех точках $z\neq\infty$. Рассмотрим отдельно точку $z=\infty$. Для этого вместо плоскости (z) возьмём сферу комплексных чисел. Под углом между линиями в бесконечно удалённой точке понимается угол между их сферическими изображениями в точке N. Возьмём две прямые на плоскости (w), проходящие через точку O и образующие между собой угол α (рис. 44). По свойству стереографической проекции сферическими изображениями этих прямых являются окружности, проходящие через точки O и N. И так как углы при стереографической проекции сохраняются, то угол в точке N также равен α. Следовательно, отображение $w=\dfrac{1}{z}$ конформно всюду на расширенной комплексной плоскости, включая точки $z=0$ и $z=\infty$.◄

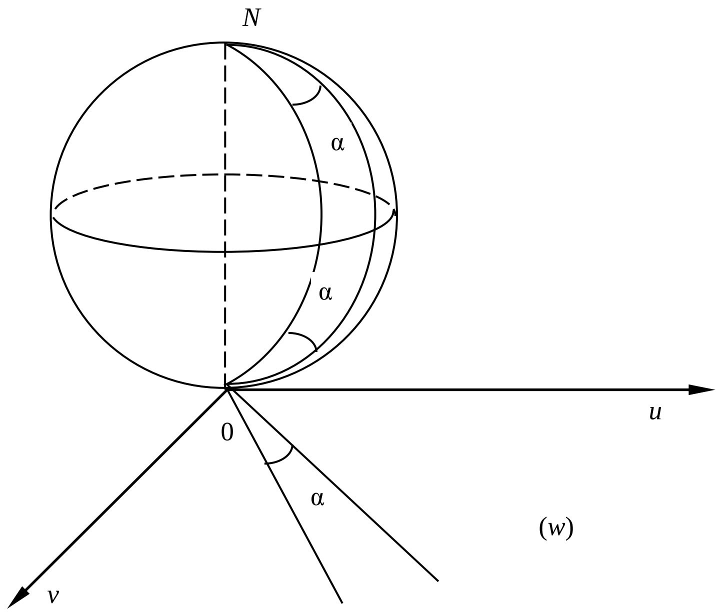


Рис. 44

Так как образом точки $z=0$ при отображении $w=\dfrac{1}{z}$ является точка $w=\infty$, то если в плоскости (z) прямая или окружность проходят через точку $z=0$, то их образом будет прямая, проходящая через бесконечно удалённую точку $w=\infty$. Другими словами, отображение $w=\dfrac{1}{z}$ преобразует любую окружность сферы комплексного переменного z в окружность сферы w. Это свойство отображения $w=\dfrac{1}{z}$ называется круговым свойством.

§4. Дробно – линейная функция

1º. Определение 4.4.1. *Дробно – линейной функцией называется функция вида* $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, (3.1)

где a, b, c, d *− фиксированные комплексные числа, причём* $ad-bc\neq 0$. *При* $c=0$ *получаем линейную функцию.*

Справедлива следующая теорема, которая приводится здесь без доказательства.

Т е о р е м а 4.4.1. Каковы бы ни были три различные точки z_1, z_2, z_3 на плоскости (z) и три различные точки w_1, w_2, w_3 на плоскости (w), существует единственное дробно – линейное преобразование, которое переводит точки z_k в точки w_k $(k = 1, 2, 3)$ по формуле

$$\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим геометрические свойства дробно – линейного преобразования.

При $c \neq 0$ функцию (3.1) можно представить в виде

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{(cz + d)c}.$$

Следовательно, дробно – линейная функция представляет суперпозицию трёх последовательных преобразований:

$$1)\ t = cz + d; \qquad 2)\ \zeta = \frac{1}{t}; \qquad 3)\ w = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c}\right)\zeta.$$

Отображения 1) и 3) являются линейными. Они, как известно, конформны в расширенной комплексной плоскости и переводят бесконечно удалённую точку в бесконечно удалённую. Отображение 2) также является конформным в расширенной комплексной плоскости, которое переводит бесконечно удалённую точку в начало координат и обладает круговым свойством.

Итак, дробно – линейная функция $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, где $ad - bc \neq 0$ обладает всеми свойствами, присущими линейной функции и свойствами, которыми обладает функция вида $w = \dfrac{1}{z}$, а именно: дробно – линейное отображение конформно в расширенной комплексной плоскости и обладает круговым свойством.

Сформулируем без доказательства ещё одно свойство, присущее дробно – линейному отображению, *свойство сохранения симметрии*, которое заключается в следующем:

При дробно – линейном преобразовании две точки, симметричные относительно прямой или окружности в расширенной комплексной плоскости (z), переводятся в точки, симметричные относительно образа (окружности или прямой) в расширенной комплексной плоскости (w). При этом центр любой окружности считается симметричной точкой для $z = \infty$ относительно заданной окружности.

Точки z_1 и z_2, не совпадающие с центром окружности, называются симметричными относительно этой окружности, если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности и произведение их расстояний от этого центра равно квадрату радиуса окружности.

Решение типовых примеров

Пример 4.4.1. Найти образ прямой $\operatorname{Re} z = 0$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

Решение. Прямая $\operatorname{Re} z = 0$ $(x = 0)$ проходит через точку $z = 0$ плоскости (z). Тогда по круговому свойству функции $w = \frac{1}{z}$ образом этой прямой будет также прямая в плоскости (w). Для отыскания образа достаточно найти отображение двух любых точек, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = 0$

$$z = i \rightarrow w = \frac{1}{i} = -i;$$

$$z = 2i \rightarrow w = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Следовательно, прямая $\operatorname{Re} z = 0$ отобразится в прямую $\operatorname{Re} w = 0$ (рис.45).

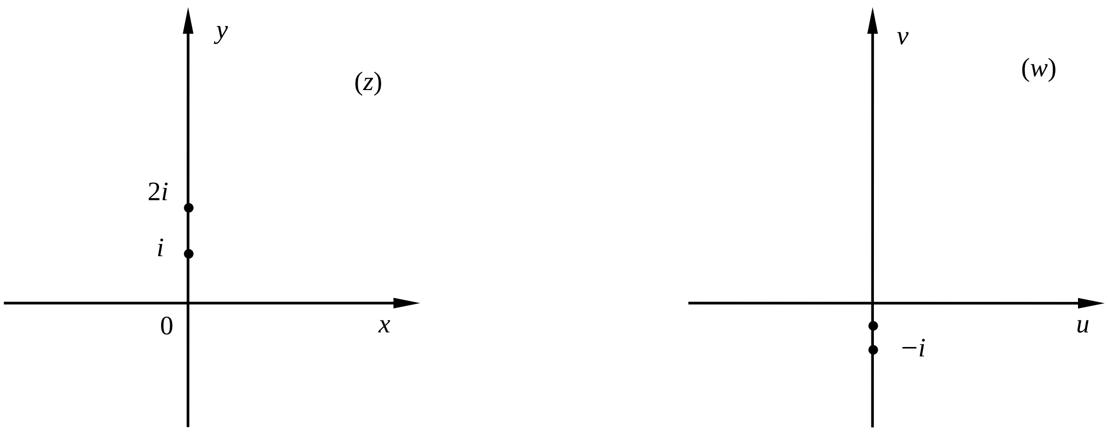


Рис. 45

Пример 4.4.2. Найти образ области $D = \{z : |z| < 1, 0 < \arg z < \pi\}$ при отображении $w = \frac{1}{z}$.

Решение. Имеем $|w| = \dfrac{1}{|z|}$, $\arg w = -\arg z$. Луч $\arg z = 0 \to \arg w = 0$, луч $\arg z = \pi \to \arg w = -\pi$, окружность $|z| = 1 \to |w| = 1$. При этом точка $z = i \to w = -i$, а внутренняя точка $z = \dfrac{i}{2} \to w = -2i$. Таким образом, внутренность верхнего полукруга перейдёт во внешность нижнего полукруга радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 46).

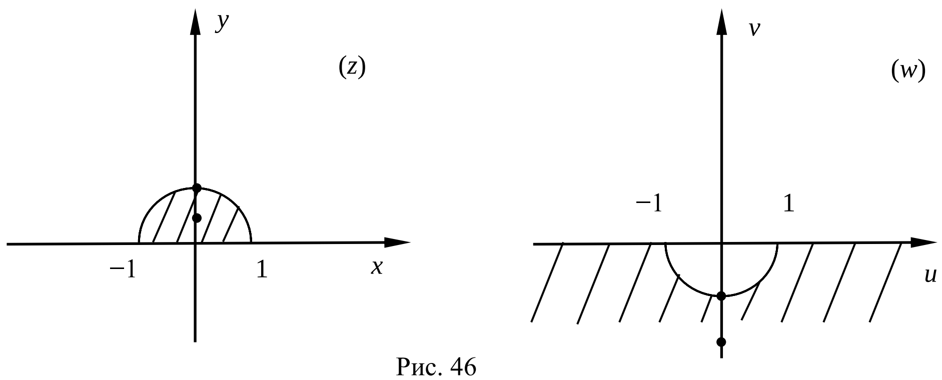


Рис. 46

Пример 4.4.3. Найти образ окружности $|z + i| = \dfrac{1}{2}$ при отображении $w = \dfrac{z - i}{2z + i}$.

Решение. Построим окружность в плоскости (z) (рис. 47*a*). Так как она проходит через точку $z = -\dfrac{i}{2}$, отображающуюся функцией $w = \dfrac{z - i}{2z + i}$ в точку $w = \infty$, то по круговому свойству эта окружность перейдёт в прямую плоскости (w). Для отыскания образа достаточно отобразить две точки, лежащие на окружности:

$$z = -\frac{3i}{2} \to w = \frac{-\frac{3i}{2} - i}{-3i - i} = \frac{5}{4};$$

$$z=\frac{1}{2}-i\ \rightarrow w=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}i.$$

Получили в плоскости (w) прямую $\operatorname{Re} z=\frac{5}{4}$, параллельную мнимой оси (рис. 47*б*).

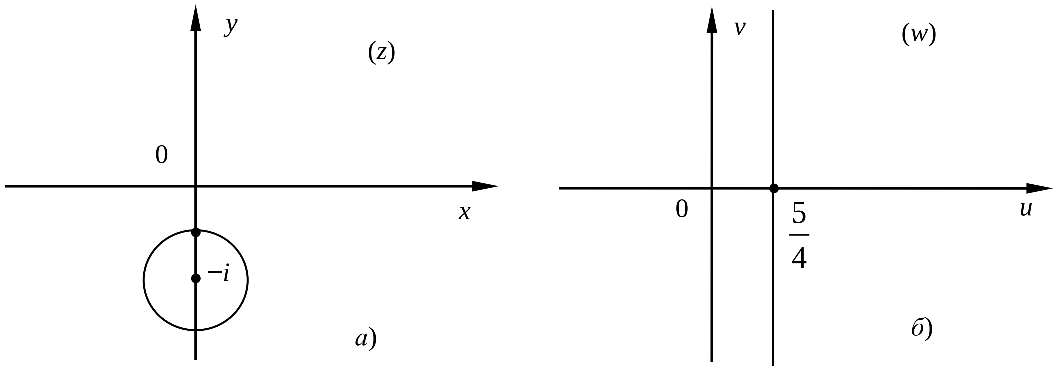


Рис.47

Пример 4.4.4. Найти образ области $\operatorname{Im} z>1$ при отображении $w=\frac{z-i}{z}$.

Решение. Построим область $\operatorname{Im} z>1$ (полуплоскость, лежащая выше прямой $\operatorname{Im} z=1$) (рис.48*а*). Прямая $\operatorname{Im} z=1$ не проходит через точку $z=0$, следовательно, по круговому свойству дробно – линейного преобразования прямая плоскости (z) перейдёт в окружность плоскости (w). Для построения окружности надо знать центр и любую точку окружности. В расширенной комплексной плоскости центр круга и бесконечно удалённая точка симметричны относительно окружности. Тогда на основании принципа сохранения симметрии, если точка $z=0\rightarrow w=\infty$, то симметричная относительно прямой $\operatorname{Im} z=1$ точка $z=2i$ перейдёт в центр окружности плоскости (w). Имеем $z=0\rightarrow w=\infty$, $z=2i\rightarrow w_{ц}=\frac{2i-i}{2i}=\frac{1}{2}$. Значит, центр окружности в точке $w=\frac{1}{2}$. Возьмём произвольную точку прямой $\operatorname{Im} z=1$, например, $z=1+i$, которая перейдёт в точку $w=\frac{1-i}{2}$. Таким образом, окружность с центром в точке $w=\frac{1}{2}$ должна пройти через точку $w=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$. Поэтому радиус $R=\frac{1}{2}$.

Итак, полуплоскость $\operatorname{Im} z > 1$ отобразится во внутренность круга радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $w = \frac{1}{2}$.

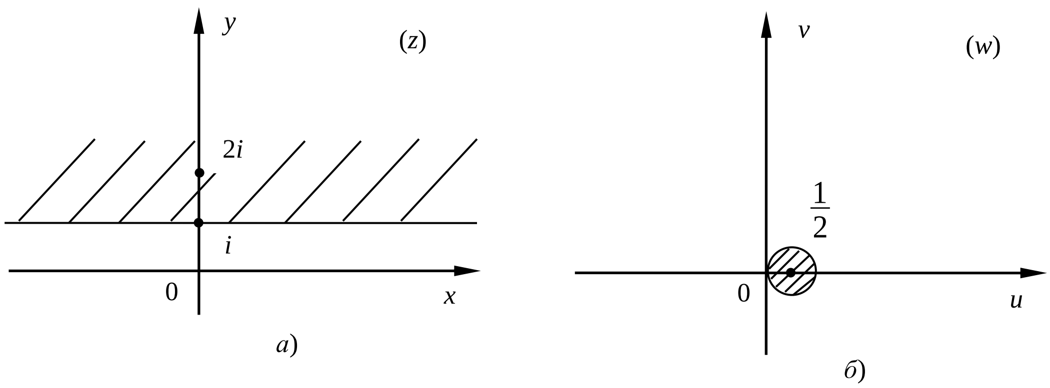


Рис.48

Проверьте себя

8.1. Укажите геометрический смысл (параллельный перенос, подобие, вращение) следующих преобразований:

$$а)\, w = z + 3i; \qquad б)\, w = -iz; \qquad в)\, w = e^{i\frac{\pi}{6}} z; \qquad г)\, w = 3z.$$

8.2. Дана функция $w = \dfrac{z}{z + 2i}$. Определите, в какую линию (прямую или окружность) плоскости (w) отобразится каждый из следующих прообразов:

а) прямая $\operatorname{Re} z = 0$; *б*) окружность $|z| = 2$;

в) окружность $|z| = 1$; *г*) прямая $\operatorname{Im} z = -2$;

д) прямая $\operatorname{Im} z = 1$; *е*) окружность $|z - i| = 1$.

8.3. Прямая $\operatorname{Im} z = 1$ функцией $w = \dfrac{z}{z + 2i}$ отобразится в окружность плоскости (w). Найдите центр этой окружности.

8.4. Окружность $|z| = 2$ функцией $w = \dfrac{z}{z + 2i}$ отобразится в прямую плоскости (w). Найдите уравнение образа.

§5. Экспоненциальная функция

Определение 4.5.1. *Экспоненциальной функцией называется функция, определённая формулой*

$$w = \exp z = e^z(\cos y + i \sin y).$$

Наряду с $\exp z$ употребляется обозначение e^z.

Функция $w = \exp z$ определена для всех $z \neq \infty$. При $z = x$ имеем $\exp x = e^x$; при $z = iy$ получаем формулу Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

Свойства функции $w = \exp z$:

1) $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$;

2) $\exp z \neq 0$ при любом z;

3) $\exp z$ периодическая функция с периодом $2\pi i$.

► $\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i) = \exp z$, так как $\exp(2\pi i) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$.◄

4) Выражение $\exp \infty$ лишено смысла, так как

$$\text{если } z = x > 0, \text{ то } \lim_{x \to +\infty} e^x = \infty;$$

$$\text{если } z = x < 0, \text{ то } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Единого предела нет, поэтому $\lim\limits_{z \to \infty} \exp z$ не существует.

5) Функция $w = \exp z$ является аналитической на комплексной плоскости (z).

► Действительно, выделим действительную и мнимую части функции $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Отсюда $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

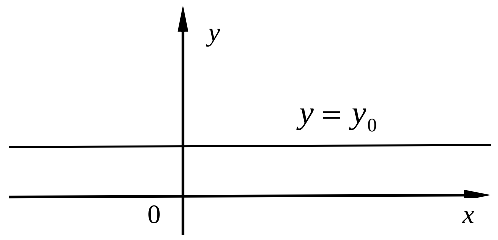
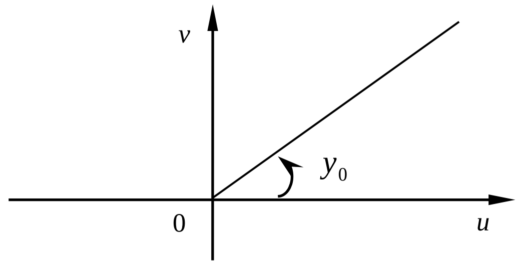
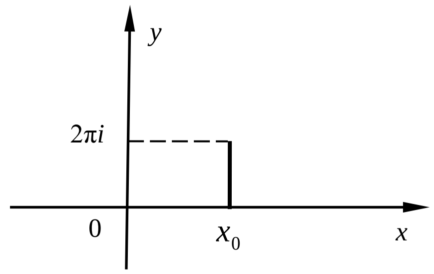
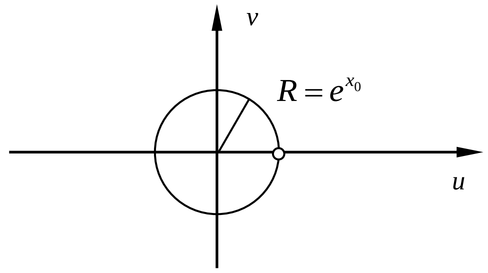
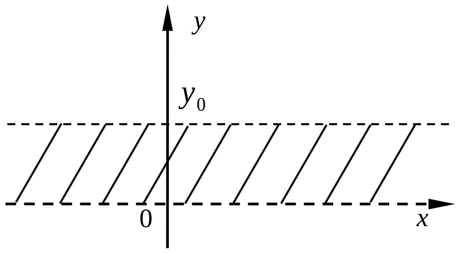
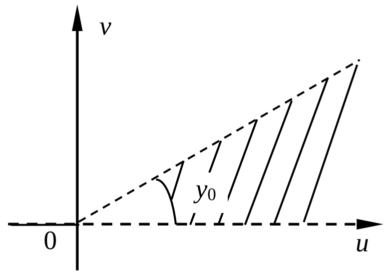
Частные производные непрерывны всюду, условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются во всех точках плоскости, следовательно, функция $w = e^z$ аналитична во всех точках плоскости (z).◄

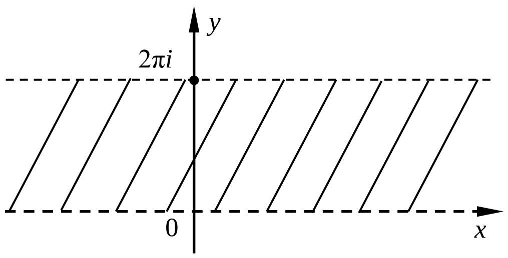
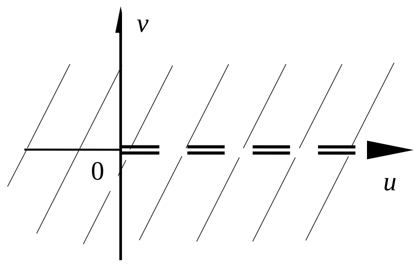
Кроме того, $\left(e^z\right)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$.

6) Отображение $w = \exp z$ конформно во всех точках комплексной плоскости (z) ($w' = \exp z \neq 0$).

7) Отображение посредством экспоненциальной функции $w = \exp z = e^z(\cos y + i\sin y)$.

Имеем: $|w| = e^x$, $\arg w = y$.

Прообраз в плоскости (z)	**Образ в плоскости (w)**
Горизонтальная прямая $y = y_0$ $(-\infty < x < \infty)$ 	Луч, выходящий из начала координат $\arg w = y_0$ 
Отрезок прямой $x = x_0$, $0 < y < 2\pi$ 	Окружность $\lvert w \rvert = e^{x_0}$ с исключённой точкой $\left(e^{x_0}, 0\right)$ 
Полоса $0 < y < y_0$, где $y_0 < 2\pi$ 	Угловая область $0 < \arg w < y_0$ 

Полоса $0 < y < 2\pi$ 	Плоскость (w) с разрезом вдоль действительной полуоси, т.е. плоскость с исключённой действительной полуосью 

Прямая $y = 0$ отображается в полуось $\arg w = 0$. Прямая $y = 2\pi$ отображается в полуось $\arg w = 2\pi$. Считается, что у разреза вдоль полуоси Ou два берега: верхний берег есть образ прямой $y = 0$, а нижний берег − образ прямой $y = 2\pi$ (рис. 49).

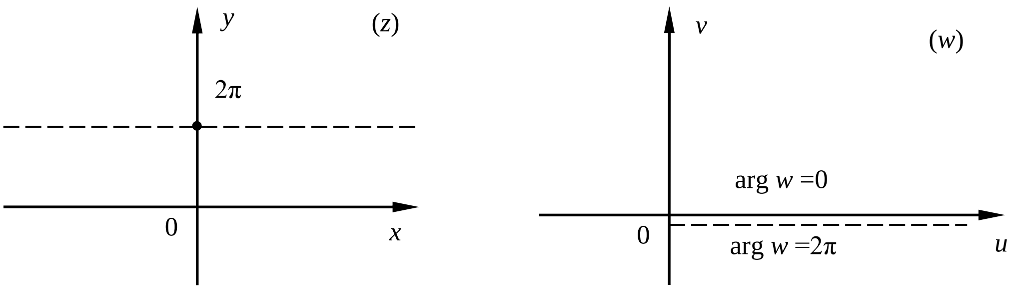


Рис. 49

Если ширина полосы в плоскости (z) будет больше 2π, то однолистность отображения нарушается.

Т е о р е м а 4.5.1. Для однолистности отображения функции $w = \exp z$ в области D, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала двух точек z_1 и z_2, связанных соотношением $z_1 - z_2 = 2k\pi i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. ►следует из очевидного соотношения

$$w_1 = w_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i,$$

где $w_1 = \exp z_1$, $w_2 = \exp z_2$.◄

Итак, условию однолистности удовлетворяет каждая из полос

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Образом каждой горизонтальной полосы является плоскость (w) с разрезом вдоль оси Ou. Чтобы получить взаимно однозначный непрерывный образ плоскости (z), возьмём бесконечно много экземпляров w − плоскостей с разрезом вдоль полуоси Ou. Затем выполним склеивание плоскостей вдоль разрезов так же, как соединяются соответствующие им полосы, а именно:

нижний берег разреза (0)−й плоскости склеиваем с верхним берегом разреза (1)-й плоскости и т.д. Оставшийся свободный верхний берег (0)-й плоскости склеиваем с нижним берегом разреза (-1) – й плоскости и т.д. Полученное геометрическое многообразие называется бесконечнолистной *римановой поверхностью функции* $w = \exp z$ (рис.50).

Решение типового примера

Пример 4.5.1. Полуполосу $\{0 < y < 2\pi, -\infty < x < 0\}$ отобразить посредством функции $w = e^z$.

Решение. Имеем $w = e^x(\cos y + i\sin y)$, $|w| = e^x$, $\arg w = y$. Так как при $x = -\infty$ $|w| = e^{-\infty} = 0$, при $x = 0$ $|w| = e^0 = 1$, т.е. $0 < |w| < 1$, $0 < \arg w < 2\pi$, то получим внутренность единичного круга с центром в начале координат и разрезом вдоль радиуса $[0,1]$ (рис.51).

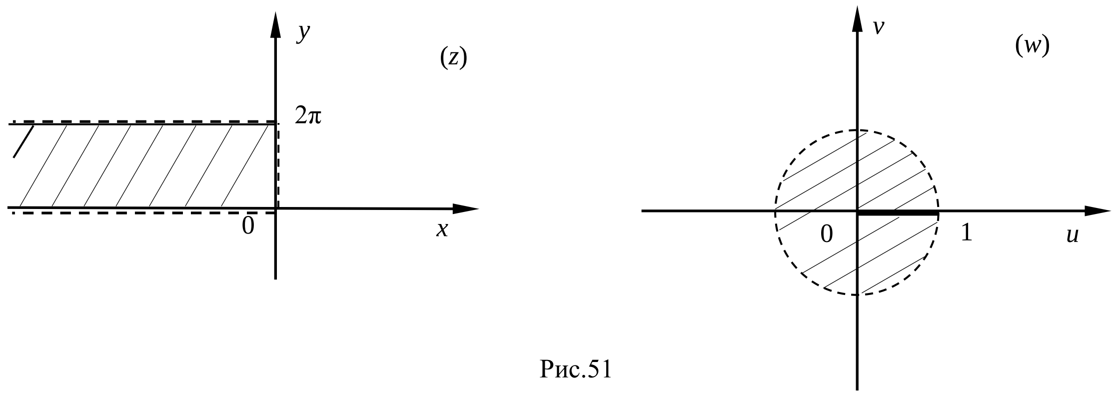
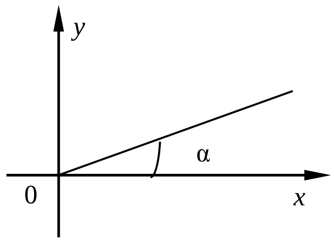
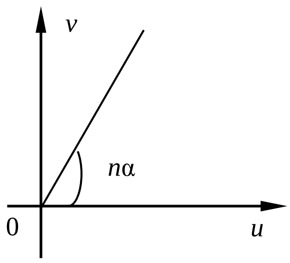
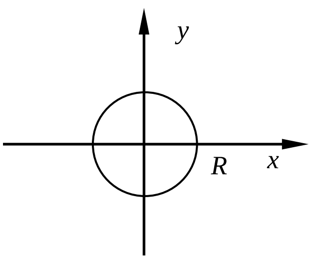
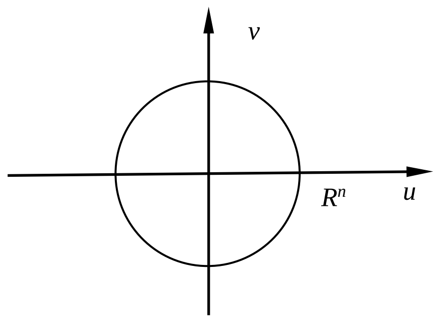
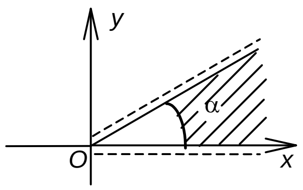
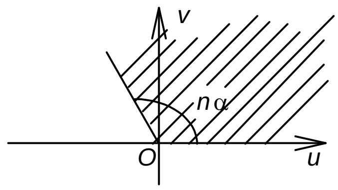
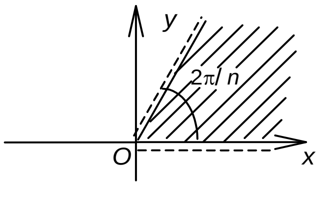
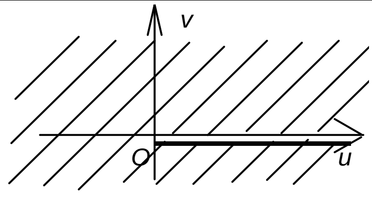


Рис.51

§6. Степенная функция

Рассмотрим степенную функцию $w = z^n$, где n − целое, положительное число. Степенная функция определена всюду на расширенной комплексной плоскости (z). Производная $w' = nz^{n-1}$ отлична от нуля при $z \neq 0$, поэтому отображение конформно для любого $z \neq 0$.

Функция $w = z^n$ отображает расширенную комплексную плоскость (z) на расширенную плоскость (w). Имеем $|w| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} w = n \operatorname{Arg} z$.

Прообраз в плоскости (*z*)	**Образ в плоскости (*w*)**
Луч $\arg z = \alpha$ 	Луч $\arg w = n\alpha$ 
Окружность $|z| = R$ 	Окружность $|w| = R^n$ 
Угловая область $0 < \arg z < \alpha$ $(\alpha < \frac{2\pi}{n})$	Угловая область $0 < \arg w < n\alpha$
	
Угловая область $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$	Плоскость (*w*) с разрезом вдоль действительной положительной полуоси
	
Плоскость (*z*)	n − листная риманова поверхность функции $w = z^n$

Т е о р е м а 4.6.1. Для того, чтобы отображение $w = z^n$ было однолистным в области D, необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала двух точек z_1 и z_2, у которых модули равны, а аргументы отличаются на число кратное $\dfrac{2\pi}{n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.► Обозначим $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Их образы, соответственно, $w_1 = r_1^n e^{in\varphi_1}$, $w_2 = r_2^n e^{in\varphi_2}$. Тогда $w_1 = w_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$, $n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2\pi k$ или $\varphi_1 = \varphi_2 + \dfrac{2\pi}{n}k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$◄

Условию однолистности удовлетворяет каждая из угловых областей

$$k\frac{2\pi}{n} < \arg z < (k+1)\frac{2\pi}{n},\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1).$$

Чтобы найти взаимно однозначный образ плоскости (z) при отображении $w = z^n$, надо построить n – листную риманову поверхность.

Решение типового примера

Пример 4.6.1. Найти функцию $w = f(z)$, которая взаимно однозначно и конформно отображает область

$$D = \left\{ z : -\frac{\pi}{6} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{3} \right\}$$

в плоскости (z) на область G: $\operatorname{Im} z > 0$ в плоскости (w).

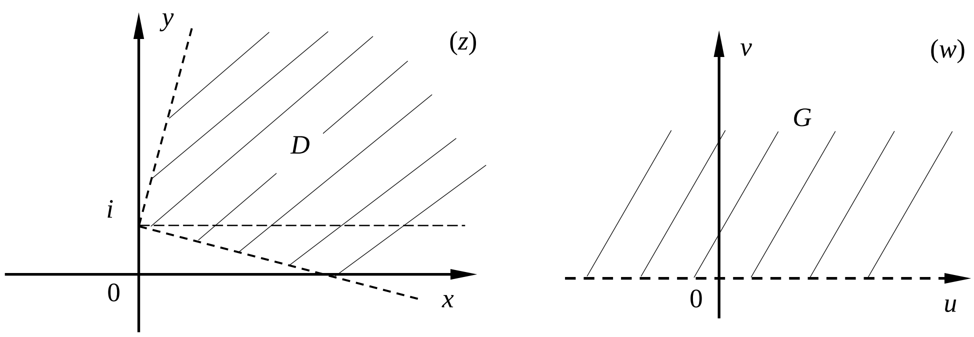


Рис.52

Решение. Построим области D и G (рис.52).

Выполним последовательно следующие преобразования:

1) $t = z - i$; заданная область D параллельно сдвинется на вектор $(-i)$ (рис. 53).

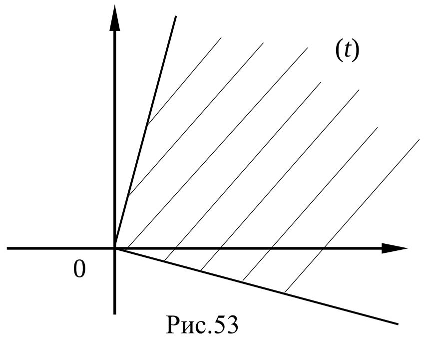


Рис.53

2) $\zeta = te^{i\frac{\pi}{2}}$; область в плоскости (t) повернётся на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ против часовой стрелки вокруг начала координат, получим угловую область раствором 90° (рис.54).

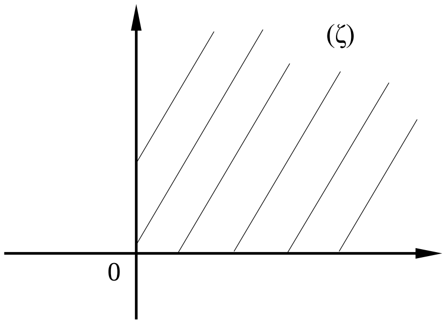


Рис.54

3) $w = \zeta^2$; раствор угла удвоится, т.к. $\arg\zeta = 0 \to \arg w = 0$, $\arg\zeta = \dfrac{\pi}{2} \to \arg w = \pi$ (рис. 55).

Осталось подставить в формулу для w выражения ζ и t: $w = (z - i)^2 e^{i\frac{\pi}{6}}$.

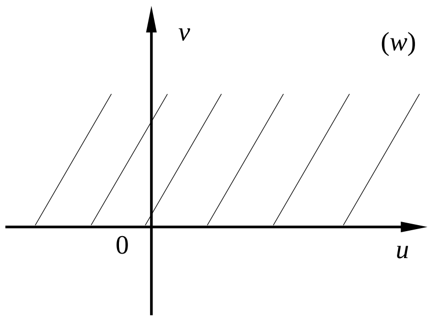


Рис.55

Проверьте себя

9.1. Найдите образ области $D=\left\{z:\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right\}$ при отображении $w=z^2$.

9.2. Найдите образ области $D=\left\{z:0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\}$ при отображении $w=z^8$.

9.3. Найдите функцию, отображающую полосу $D=\{z:0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$.

9.4. Найдите образ области $D=\{z:\operatorname{Re} z>0,\quad 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ при отображении $w=e^z$.

§7. Тригонометрические и гиперболические функции

1°. Из формул $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$ получаем

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{7.1}$$

Правые части формул (7.1) имеют смысл и при комплексном переменном z.

Определение 4.7.1. *Тригонометрические функции* $\sin z$ *и* $\cos z$ *определяются по формулам:*

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{7.2}$$

Определение 4.7.2. *Гиперболическим синусом называется функция, определяемая формулой*

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \qquad (7.3)$$

Гиперболическим косинусом называется функция, определяемая формулой

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}. \qquad (7.4)$$

2º. Свойства тригонометрических и гиперболических функций

1) $w = \sin z$ нечётная функция, так как $\sin(-z) = \dfrac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\sin z$;
2) $w = \cos z$ чётная функция: $\cos(-z) = \cos z$;
3) Все известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области. Например, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$;
4) Функции $\sin z$ и $\cos z$ периодические с периодом 2π. Действительно, $\sin(z + 2\pi) = \dfrac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$. Аналогично, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$.
5) Из сравнения формул (7.1) с формулами (7.2_ и (7.3) следует, что между тригонометрическими и гиперболическими функциями существует связь.

$$\sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z,$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{sh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z,$$

$$\operatorname{ch} iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

таким образом, $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\operatorname{ch} iz = \cos z$.

6) Известно, что для действительного переменного x справедливы неравенства $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, т.е. $\sin x$ и $\cos x$ ограниченные функции. Для $\sin z$ и $\cos z$ это свойство нарушено. Например,

$\sin 2i = \dfrac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = 3{,}62i > 1$. Докажем, что $|\sin z|$ и $|\cos z|$ неограниченно возрастают, когда точка z удаляется от действительной оси.

Имеем $\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$. Выделим действительную и мнимую части функции $u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y$, $v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y$. Для модуля функции $\sin z$ получаем выражение

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \sin^2 x)\operatorname{sh}^2 y} = \\ &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 y}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Здесь было учтено свойство гиперболических функций действительного аргумента $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$. Графики функций $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ и $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ даны на рисунке 55.

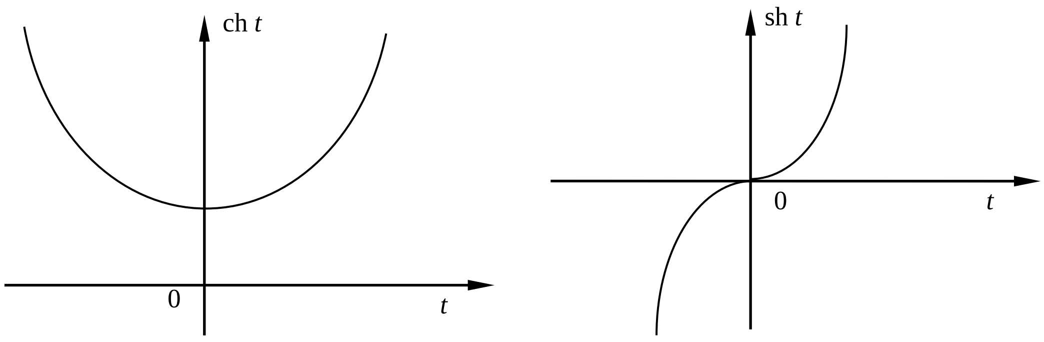


Рис. 55

Очевидно, $|\operatorname{ch} t| \to \infty$ и $|\operatorname{sh} t| \to \infty$ при $|t| \to \infty$. Следовательно, когда точка z удаляется от действительной оси ($|y| \to \infty$), то хотя $|\sin^2 x| \le 1$, но $\operatorname{sh}^2 y \to \infty$, поэтому в силу (7.5) $|\sin z| \to \infty$ при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$.

Аналогично доказывается неограниченность функции $w = \cos z$.

7) Геометрические свойства функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$.

Отображение $w = \cos z$ или $w = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ представляет суперпозицию отображений:

а) $t = iz = ze^{i\frac{\pi}{2}}$ − поворот плоскости (z) на угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки около начала координат.

б) $\zeta = e^{t} = \exp(t)$ (см. §4).

в) $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ (см. §7). Функция $w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ называется *функцией Жуковского*.

Решение типовых примеров

Пример 4.7.1. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$.

Решение. Последовательно получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos i + \cos\frac{\pi}{4}\sin i = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos i + \sin i) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{ch}1 + i\operatorname{sh}1).$$

Пример 4.7.2. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} i\right)$.

Решение. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} i\right) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} i}{\cos\frac{\pi}{2} i} = \dfrac{i\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}} = i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$.

Проверьте себя

10.1. Вычислите $\operatorname{sh}\frac{\pi}{2} i$.

10.2. Вычислите $\operatorname{ch}\frac{\pi}{2} i$.

10.3. Найдите модуль ρ и аргумент φ числа $\operatorname{th}\pi i$.

§8. Функция Жуковского

Определение 4.8.1. *Функцией Жуковского называется преобразование вида*

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right). \qquad (8.1)$$

Эта функция была широко использована Н.Е. Жуковским при решении многих задач гидро- и аэродинамики.

Доопределим функцию Жуковского в точках $z = 0$ и $z = \infty$, полагая $w = \infty$ при $z = 0$ и $w = 0$ при $z = \infty$. Тогда эта функция становится определённой на всей расширенной комплексной плоскости (z).

Исследуем функцию $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$ на аналитичность. Запишем переменную z в показательной форме $z = re^{i\varphi}$ и выделим $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$.

Имеем $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi} \right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(r\cos\varphi + i\sin\varphi + \frac{1}{r}\cos\varphi - \frac{i}{r}\sin\varphi \right).$$

Отсюда $\quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(r + \frac{1}{r} \right), \quad v(r, \varphi) = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(r - \frac{1}{r} \right),$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{2}\sin\varphi\left(r + \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2}\sin\varphi\left(1 + \frac{1}{r^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\cos\varphi\left(r - \frac{1}{r} \right).$$

Частные производные непрерывны во всех точках $z \neq 0$. Условия Коши – Римана в полярных координатах (задача 3.1.4) имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Легко проверить, что эти условия выполняются. Таким образом, функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} \right)$ является аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$.

Производная $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$ отлична от нуля во всех точках плоскости (z), кроме точек $z = \pm 1$. Следовательно, отображение, осуществляемое функцией Жуковского, является конформным всюду, за исключением этих двух точек.

Теперь найдём условие однолистности отображения $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$. Возьмём две различные точки z_1 и z_2 из области определения функции. Равенство $w_1=w_2$ (образы совпадают) выполняется при $\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{2}\left(z_2+\frac{1}{z_2}\right)$ или $(z_1-z_2)\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)=0$. Таким образом, $w_1=w_2 \Rightarrow z_1z_2=1$.

Обратно, пусть $z_1z_2=1$. Тогда, подставляя $z_1=\frac{1}{z_2}$, находим

$$w_1=\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_2}+z_2\right)=w_2, \text{ т.е. } w_1=w_2.$$

Значит, из $z_1z_2=1 \Rightarrow w_1=w_2$.

Таким образом, доказана

Теорема 4.8.1. Для однолистности отображения $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы область D не содержала двух различных точек z_1 и z_2, связанных равенством $z_1z_2=1$.

Этому требованию удовлетворяет как внутренность круга $|z|<1$, так и внешность круга $|z|>1$. Чтобы выяснить геометрический смысл отображения $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ найдём:

1) образ окружности $|z|=R$ и особенности отображения;
2) образ внутренности единичного круга ($R<1$);
3) образ внешности единичного круга ($R>1$);
4) образы радиусов окружности $|z|=1$.

Действительная и мнимая части функции Жуковского найдены: $u(r,\varphi)=\frac{1}{2}\cos\varphi\left(r+\frac{1}{r}\right)$, $v(r,\varphi)=\frac{1}{2}\sin\varphi\left(r-\frac{1}{r}\right)$. Подставляя $r=|z|=R$, находим

$$u=\frac{1}{2}\cos\varphi\left(R+\frac{1}{R}\right), v=\frac{1}{2}\sin\varphi\left(R-\frac{1}{R}\right). \qquad (8.2)$$

Исключая параметр φ, получаем

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1 \qquad (8.3)$$

уравнение эллипса.

Значит, функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ окружность $|z|=R$ взаимно однозначно отображает в эллипс с полуосями

$$a=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right), \qquad b=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right). \qquad (8.4)$$

Известно, что расстояние между фокусами эллипса обозначают через $2c$ и известна формула, связывающая величины a, b, c эллипса

$$c^2=a^2-b^2.$$

Фокусы эллипса (8.3) находятся в точках $(\pm 1, 0)$.

Рассмотрим случай $R<1$.

При $R<1$ величина $R-\frac{1}{R}$ отрицательна, значит, окружность $|z|=R<1$ переходит в эллипс с полуосями

$$a=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right), \qquad b=-\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right),$$

причём из (8.2) следует, что при положительном обходе окружности соответствующий эллипс обходится в отрицательном направлении.

Далее, при $R\to 0$ полуоси $a\to\infty$, $b\to\infty$, причём $a-b=R\to 0$, следовательно, эллипсы увеличиваются, постепенно «округляясь».

При $R\to 1-0$ полуоси $a\to 1$, $b\to 0$, т.е. эллипсы постепенно сжимаются в отрезок $[-1,1]$ оси Ou.

Таким образом, функция $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает внутренность круга $|z|<1$ на внешность отрезка $[-1,1]$ действительной оси Ou.

Окружности $|z|=1$ соответствует двойной отрезок $[-1,1]$, причём точки -1 и 1 остаются неподвижными (это видно из равенства $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$). Верхняя полуокружность переходит в нижний берег отрезка (это видно из (8.2): при $R\to 1-0$ и $0<\varphi<\pi$ имеем $v\to -0$); нижняя полуокружность переходит в верхний берег отрезка (это видно также из (8.2)) (рис. 56 *4.25*).

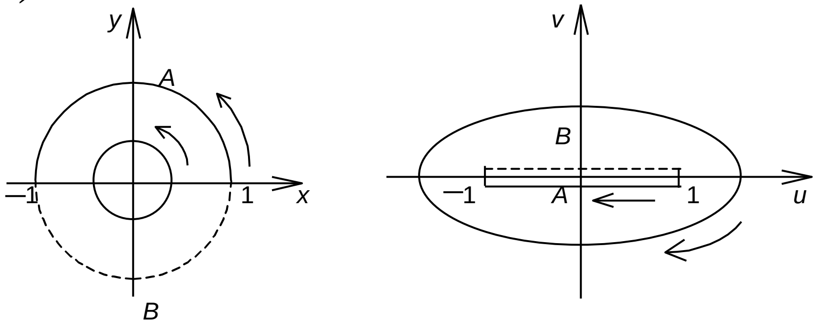


Рис. 4.25

Рассмотрим случай $R > 1$.

При $R > 1$ величина $R - \dfrac{1}{R}$ положительна, значит, окружности $|z| = R > 1$ переходят в эллипсы с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right),$$

т.е. в те же самые эллипсы, что и в первом случае, но обходимые в том же направлении, что и окружности.

При $R \to 1 + 0$ полуоси $a \to 1$, $b \to 0$, следовательно, эллипсы сжимаются в отрезок $[-1, 1]$.

При $R \to \infty$ полуоси $a \to \infty$, $b \to \infty$, причём $a - b = \dfrac{1}{r} \to 0$, следовательно, эллипсы увеличиваются, «округляясь».

Окружность $|z| = 1$ отображается на отрезок $[-1, 1]$, обходимый дважды в противоположных направлениях, причём верхняя полуокружность переходит в верхний берег отрезка, а нижняя полуокружность – в нижний берег.

Итак, внешность круга $|z| > 1$ функция $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ взаимно однозначно отображает на внешность отрезка $[-1, 1]$ действительной оси Ou.

Чтобы получить взаимно однозначный образ плоскости (z), надо взять два экземпляра плоскостей (w) с разрезами вдоль отрезка $-1 \le u \le 1$ и склеить берега разрезов крест – накрест. Получим двулистную риманову поверхность функции $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Теперь найдём образ радиуса окружности $\arg z = \varphi_0$, $0 \le r < 1$. Подставляя в равенства (8.2), получим

$$u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi_0, \qquad v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi_0, \qquad (8.5)$$

или после исключения параметра r

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi_0}=1. \qquad (8.6)$$

Это семейство гипербол с полуосями $a=|\cos\varphi_0|$, $b=|\sin\varphi_0|$ и с фокусами в точках $(\pm 1, 0)$ (для гиперболы справедливо равенство $c^2=a^2+b^2$, где $2c$ – расстояние между фокусами).

Вывод: Функция Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ переводит окружности в эллипсы, а лучи – в ветви гиперболы. Фокусы всех эллипсов и гипербол расположены в точках $(\pm 1, 0)$. Окружность $|z|=1$ отображается в отрезок $[-1,1]$. При $\varphi_0=0$ гипербола (8.6) вырождается в луч $[1,+\infty)$, проходимый дважды: луч $[1,+\infty)$ переходит в луч $[1,+\infty)$ и полуинтервал $(0,1]$ переходит в луч $[1,+\infty)$. Аналогично, луч $\arg z=\pi$ переходит в луч $(-\infty,-1]$, проходимый дважды. А лучи $\arg z=\frac{\pi}{2}$ и $\arg z=\frac{3\pi}{2}$ переходят в мнимую ось Ov (рис.57 *4.26*).

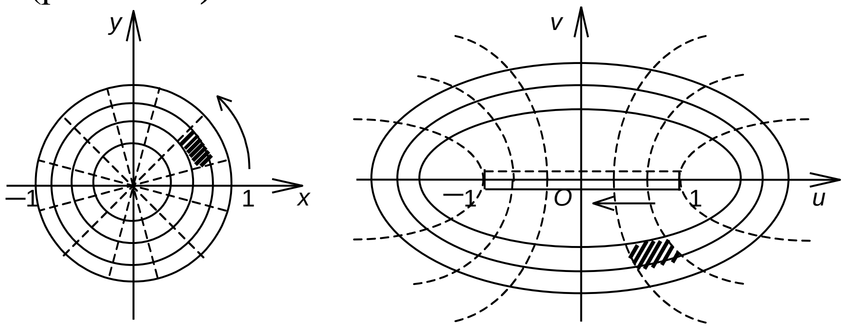


Рис. 4.26

З а м е ч а н и е. Историческую справку о функции Жуковского можно прочитать в конце пособия.

Решение типовых примеров

Пример 4.8.1. Отобразить область

$$D=\{z:\quad 0<\operatorname{Re} z<2\pi, \quad \operatorname{Im} z>0\}$$

с помощью функции $w=\cos z$.

Решение. Построим область D (рис.58). Функция $w = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ представляет суперпозицию трёх отображений. Выполним последовательно:

1) $t = e^{iz}$ – преобразование поворота на угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ вокруг начала координат против часовой стрелки (рис.59 4.27).

2) $\zeta = e^{t}$. Найдём образ области D_1.

$|\zeta| = e^{\mathrm{Re}\,t}$, $\arg\zeta = \mathrm{Im}\,t$, следовательно, $e^{-\infty} < |\zeta| < e^{0}$, т.е. $0 < |\zeta| < 1$, $0 < \arg\zeta < 2\pi$.

В плоскости (ζ) получили внутренность единичного круга с выброшенным радиусом $[0, 1]$ (рис.60 4.28).

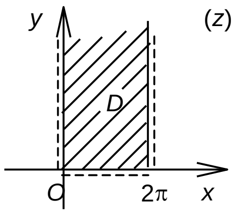


Рис. 4.27

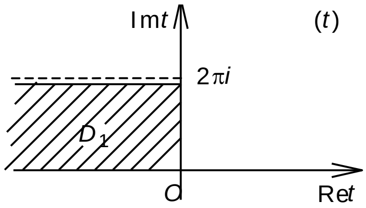


Рис. 4.28

3) $w = \dfrac{1}{2}\left(\zeta + \dfrac{1}{\zeta}\right)$. Функция Жуковского отображает внутренность единичного круга на всю плоскость (w) с выброшенным отрезком $-1 \le u \le 1$. Теперь отобразим радиус $[0, 1]$. При $\zeta \to 0$ $w \to \infty$, при $\zeta \to 1$ $w \to 1$, при этом все действительные числа ζ перейдут в действительные числа w. Получили плоскость (w) с разрезом вдоль луча $-1 \le u < \infty$, $v = 0$ (рис. 61).

Проверьте себя

11.1. Используя функцию Жуковского, найдите функцию, отображающую кольцо $1 < |z| \le 2$ на область $\dfrac{u^2}{25} + \dfrac{v^2}{9} \le 1$ с разрезом $-4 \le u \le 4$, $v = 0$.

§9. Логарифмическая функция

1°. Определение 4.9.1. *Функция, обратная экспоненциальной, называется логарифмической. Обозначается* $w = \mathrm{Ln}\, z$, т. е.

$$w = \mathrm{Ln}\, z, \text{ если } e^{w} = z.$$

Логарифмическая функция определена всюду, кроме точек $z=0$ и $z=\infty$.

Найдём формулу для вычисления $\mathrm{Ln}\,z\left(z\neq 0,\, z\neq\infty\right)$.

Пусть $w=u+iv$, тогда получаем $z=e^{u+iv}$ или $z=e^{u}e^{iv}$. Отсюда следует: $|z|=e^{u}$ или $u=\ln|z|$, $v=\mathrm{Arg}\,z$. Подставляя значения *u* и *v*, найдём

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z, \qquad (9.1)$$

$$\text{или } \mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right),\ k\in Z. \qquad (9.2)$$

Определение 4.9.2. *Главным значением логарифма числа z называется то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа z.*

Главное значение логарифма получим из формулы (9.2.) при $k=0$:

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z. \qquad (9.3)$$

Таким образом, $\mathrm{Ln}\,z=\ln z+2k\pi i,\quad k\in Z$.

2º. Свойства логарифмической функции

1) Логарифмическая функция бесконечнозначная, при этом любые два её значения отличаются на число, кратное $2\pi i$.

Например, $\mathrm{Ln}\left(1-i\right)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\quad k\in Z$,

$$\mathrm{Ln}1=\ln 1+i\left(0+2k\pi\right)=2k\pi i,\quad k\in Z,$$

$$\mathrm{Ln}\left(-2\right)=\ln 2+i\left(\pi+2k\pi\right),\quad k\in Z.$$

2) Известные правила логарифмирования произведения и частного для логарифмической функции комплексного переменного сохраняются

$$\mathrm{Ln}\left(z_1, z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2,$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}\,z_1-\mathrm{Ln}\,z_2.$$

3) Функция $w=\ln z$ взаимно однозначно и конформно$\left(w'=\frac{1}{z}\neq 0\right)$ отображает плоскость (*z*) с разрезом вдоль действительной положительной полуоси на полосу $0<\mathrm{Im}\,w<2\pi,\quad -\infty<\mathrm{Re}\,w<\infty$. Конформность отображения нарушается лишь в точках $z=0$ и $z=\infty$.

Пример 4.9.1. Найти ошибку в рассуждениях (софизм Бернулли)

1) $\mathrm{Ln}\left(-z\right)^2=\mathrm{Ln}\,z^2$;

2) $\mathrm{Ln}\left(-z\right)+\mathrm{Ln}\left(-z\right)=\mathrm{Ln}\,z+\mathrm{Ln}\,z$;

3) $2\,\mathrm{Ln}\left(-z\right)=2\,\mathrm{Ln}\,z$;

4) $\mathrm{Ln}\left(-z\right)=\mathrm{Ln}\,z$, но это неверно.

Решение. Ошибка при переходе от 2) к 3). Равенство $\mathrm{Ln}\left(z_1z_2\right)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$ понимается как равенство множеств, а не чисел, поэтому $\mathrm{Ln}\,z+\mathrm{Ln}\,z\neq 2\,\mathrm{Ln}\,z$.

Решение типовых примеров

Пример 4.9.2. Найти все решения уравнения $e^z + i = 0$.
Решение. Последовательно получаем:
$e^z + i = 0 \Rightarrow e^z = -i \Rightarrow z = \mathrm{Ln}(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.

Таким образом, $z_k = i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k \in Z$.

Пример 4.9.3. Найти все решения уравнения $4\cos z + 5 = 0$.

Решение. По определению $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Уравнение примет вид $2e^{iz} + 2e^{-iz} + 5 = 0$. Обозначим $e^{iz} = t$. Получим квадратное уравнение относительно *t*: $2t^2 + 5t + 2 = 0$. Отсюда $t_1 = -2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}$.

Тогда $e^{iz} = -2$ и $e^{iz} = -\frac{1}{2}$. Из первого уравнения находим

$$iz = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k), \text{ или } z = (\pi + 2\pi k) - i\ln 2.$$

Из второго уравнения находим

$$iz = \mathrm{Ln}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\ln 2 + i(\pi + 2\pi k), \text{ или } z = (\pi + 2\pi k) + i\ln 2.$$

Объединим оба решения: $z_k = (\pi + 2\pi k) \pm i\ln 2, \quad k \in Z$.

Проверьте себя

12.1. Решите уравнения

а) $\ln(z + i) = 0$; *б*) $\ln(i - z) = 1$; *в*) $\mathrm{sh}\, iz = -i$.

12.2 Запишите в алгебраической форме следующие числа:

а) $\sin \pi i$; *б*) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} i$; *в*) $\mathrm{sh}\frac{\pi i}{2}$; *г*) $\mathrm{tg}\,\pi i$.

§10. Обратные тригонометрические функции

Функция $w = \mathrm{Arc}\cos z$ определяется как обратная к функции $z = \cos w$. Найдём формулу для вычисления $\mathrm{Arc}\cos z$.

Заменяя $\cos w$ через $\dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ и полагая $e^{iw} = t$, получим

$$z = \frac{t + t^{-1}}{2}.$$

Откуда $t^2 - 2tz + 1 = 0$ и $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Следовательно,

$$w = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\, t = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Таким образом, бесконечнозначная функция $w = \mathrm{Arc}\cos z$ для любого z выражается через логарифмическую функцию:

$$w = \mathrm{Arc}\cos z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \qquad (10.1)$$

Аналогично можно получить следующие формулы:
$$\operatorname{Arcsin} z = \tfrac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \qquad (10.2)$$
$$\operatorname{Arctg} z = \tfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\tfrac{1+iz}{1-iz}. \qquad (10.3)$$

Решение типовых примеров

Пример. 4.10.1. Вычислить $\operatorname{Arcsin} i$.

Решение. По формуле (10.2) имеем
$$\operatorname{Arcsin} i = \tfrac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(i^2 + \sqrt{2}\right) = \tfrac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) = \tfrac{1}{i}\left(\ln\left(\sqrt{2}-1\right) + 2k\pi i\right) =$$
$$= 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\ k \in Z.$$

Пример 4.10.2. Вычислить $\operatorname{Arctg} 2i$.

Решение. Применим формулу (10.3):
$$\operatorname{Arctg} 2i = \tfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}\tfrac{3i}{i} = \tfrac{1}{2i}\operatorname{Ln}3 = -\tfrac{i}{2}\left(\ln 3 + 2k\pi i\right) = k\pi - i\tfrac{\ln 3}{2},\ k \in Z.$$

Пример 4.10.3. Вычислить i^i.

Решение. Общая степенная функция $w = z^a$ (где a – любое комплексное число) определяется формулой
$$z^a = e^{aLnz}. \qquad (10.4)$$

Общая показательная функция $w = a^z$ (где a – любое комплексное число) определяется формулой
$$a^z = e^{zLna}. \qquad (10.5)$$

Воспользуемся любой из формул (10.4) или (10.5):
$$i^i = e^{iLni} = e^{i\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}, \quad k \in Z.$$

Пример 4.10.4. Вычислить $\left(-1\right)^{\sqrt{2}}$.

Решение. Здесь также можно применить формулу (10.4) или (10.5)
$$\left(-1\right)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln(-1)} = e^{\sqrt{2}\left(\ln 1 + i(\pi + 2\pi k)\right)} = e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i} =$$
$$= \cos\left(\sqrt{2}\left(2k+1\right)\pi\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\left(2k+1\right)\pi\right), \quad k \in Z.$$

Пример 4.10.5. Найти модуль ρ и главное значение аргумента φ комплексного числа 10^i.

Решение. По формуле (10.4) или (10.5) получаем
$$10^i = e^{iLn10} = e^{i\left(\ln 10 + i(2k\pi)\right)} = e^{-2k\pi}e^{i\ln 10}, \quad k \in Z.$$

Отсюда $\rho = e^{-2k\pi}, \quad \varphi = \ln 10$.

(Сравните с показательной формой комплексного числа $z = \rho e^{i\varphi}$).

Проверьте себя

13.1. Запишите в алгебраической форме числа:

а) $\mathrm{Arccos}\, i$;   *б*) $\mathrm{Arctg}\,\frac{i}{3}$;   *в*) $\mathrm{Arccos}\, 2$.

13.2. Выведите формулы для обратных гиперболических функций Arshz, Archz, Arthz.

13.3. Вычислите:

а) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$;   *б*) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{1+i}$.

13.4. Решите уравнения:

а) $\mathrm{sh}\, iz = -i$; *б*) $\ln(i - z) = 1$.

13.5. Найдите модуль ρ и аргумент φ комплексных чисел:

а) $(-2)^{3-i}$;   *б*) $3^{\frac{1}{i}}$.

Глава 5. Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема и формула Коши

§1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

1º. Определение интеграла от функции комплексного переменного

Пусть в некоторой области D на плоскости (z) задана однозначная и непрерывная функция комплексного переменного $w = f(z)$ и пусть Γ – произвольная кусочно-гладкая ориентированная (a – начало, $в$ – конец) кривая, принадлежащая области D вместе со своими концами a и $в$.

Разобьём кривую Γ произвольным образом на n участков (рис. 62) точками $a = z_0, z_1,..., z_n = b$ и обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

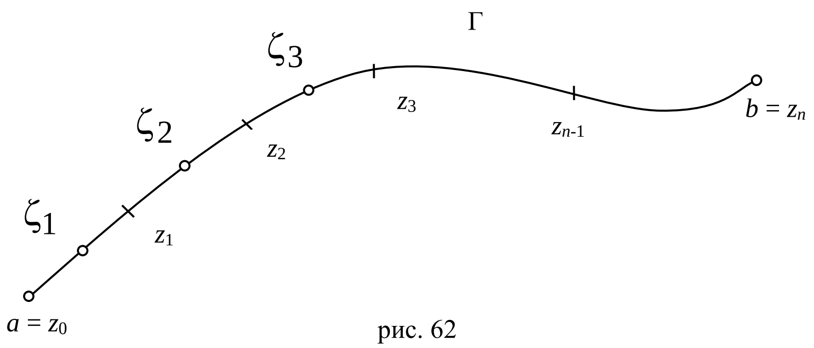


рис. 62

Выберем на каждом участке (z_{k-1}, z_k) кривой Γ произвольную точку ζ_k и образуем сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k. \qquad (1.1)$$

Сумма S_n называется *комплексной интегральной суммой функции* $f(z)$, соответствующей данному разбиению кривой Γ. Сумма S_n в общем случае зависит как от способа разбиения кривой Γ, так и от выбора точек ζ_k на каждой элементарной дуге (z_{k-1}, z_k). Рассмотрим произвольную последовательность разбиений кривой Γ таких, что длина наибольшего отрезка $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Определение 5.1.1. *Предел комплексной интегральной суммы при* $\max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta z_k| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ *называется интегралом от функции* $f(z)$ *вдоль кривой* Γ *и обозначается*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\max\limits_{k}|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k. \qquad (1.2)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5.1.1. Если функция $f(z)$ однозначна и непрерывна на кусочно-гладкой ориентированной кривой Γ, то предел комплексной интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек ζ_k.

Доказательство.► Обозначим $z_k = x_k + iy_k$, $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Тогда $f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$. Далее,

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) =$$
$$= (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Преобразуем интегральную сумму (1.1), чтобы выделить действительную и мнимую части:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \Big[u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v\Big(\xi_k, \eta_k\Big)\Delta y_k\Big] + \qquad (1.3)$$
$$+ i\sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k + v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k].$$

Полученные суммы в правой части (1.3) являются интегральными суммами для действительных криволинейных интегралов

$$\int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy \qquad \int\limits_{\Gamma} u\,dy + v\,dx. \qquad (1.4)$$

Известно, что если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой Γ, то пределы интегральных сумм в правой части (1.3) существуют и не зависят ни от выбора точек (x_k, y_k) (способа разбиения кривой), ни от выбора точек (ξ_k, η_k).

Переходя к пределу при $\max|\Delta z_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy + i\int\limits_{\Gamma} u\,dy + v\,dx. \qquad (1.5)$$

Таким образом, доказана теорема существования интеграла от функции комплексного переменного.◄

Замечания:

1) определение интеграла от функции комплексного переменного сохраняется и на случай замкнутой кривой;

2) будем обозначать Γ^{-} кривую, совпадающую с Γ, но имеющую противоположное направление обхода;

3) в случае замкнутой кривой различаются два противоположных направления обхода: положительным считается то, при котором область, ограниченная контуром, остаётся слева, и отрицательным – если область остаётся справа.

2º. Свойства интегралов

1) $\int\limits_{\Gamma^{-}} f(z)dz = -\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$. Следует из определения интеграла;

2) $\int\limits_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1$, где z_1 – начало пути интегрирования, z_2 – конец;

3) Свойство линейности: $\int\limits_{\Gamma}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\ f_k(z)\right] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \int\limits_{\Gamma} f_k(z)dz$;

4) Свойство аддитивности: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz$, где Γ – кривая, состоящая их двух частей таких, что конец Γ_1 совпадает с началом Γ_2, т.е. $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$;

5) Оценка интеграла по модулю.

Рассмотрим $\left|S_n\right| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\right|\left|\Delta z_k\right|$,

но $\left|\Delta z_k\right| \le \Delta l_k$, где Δl_k – длина дуги $\left(z_{k-1}, z_k\right)$, Δz_k – длина стягивающей хорды, значит $\left|S_n\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n}\left|f\left(\zeta_k\right)\right|\Delta l_k$. Переходя к пределу при $\max\left|\Delta z_k\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, получаем

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\Gamma}\left|f(z)\right| dl .$$

6) Если функция $f(z)$ ограничена на Γ, т.е. $\left|f(z)\right| \le M \quad \forall z \in \Gamma$, то получим оценку интеграла

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)dz\right| \le Ml\text{, где } l - \text{длина кривой } \Gamma.$$

Решение типовых примеров

Пример 5.1.1. Вычислить $\int_{\Gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz,$ где Г – отрезок, соединяющий точки $z_1 = i, z_2 = 1$.

Решение. Положим $z = x + iy,$ тогда $\operatorname{Im} z^2 = 2xy, \quad dz = dx + idy$. Сведём интеграл от функции комплексного переменного к двум действительным криволинейным интегралам от функций двух действительных переменных. Имеем:

$$\int_{\Gamma} z \operatorname{Im} z^2 dz = \int_{\Gamma} (x+iy)2xy(dx+idy) = \int_{\Gamma} 2x^2ydx - 2xy^2dy +$$

$$+ i\int_{\Gamma} 2x^2ydy + 2xy^2dx.$$

Сведём криволинейные интегралы к определённым интегралам. Построим отрезок, соединяющий точки $z_1 = i,\ z_2 = 1$ (Рис.63). Уравнение линии Г: $y = 1 - x$, отсюда $dy = -dx$.

При движении точки z от $z_1 = i$ к $z_2 = 1$ переменная x меняется от 0 до 1. Таким образом, получаем

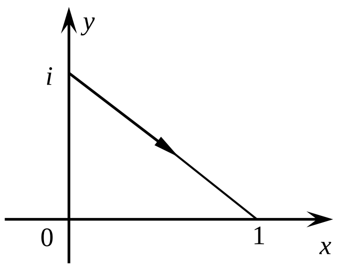


рис. 63

$$\int_0^1 2x^2(1-x)dx - 2x(1-x)^2(-dx) +$$

$$+ i\int_0^1 2x^2(1-x)(-dx) + 2x(1-x)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right) dx + i\int_0^1 \left(2x - 6x^2 + 4x^3\right) dx = 1/3.$$

Пример 5.1.2. Вычислить $\int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z\, dz,$ где $\Gamma : |z| = 1$. Обход против часовой стрелки.

Решение. Построим окружность $|z| = 1$ (Рис.64).

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int_\Gamma z\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_\Gamma (x+iy)x(dx+idy) =$$

$$= \int_\Gamma x^2dx - xy\,dy + i\int_\Gamma xy\,dx + x^2dy.$$

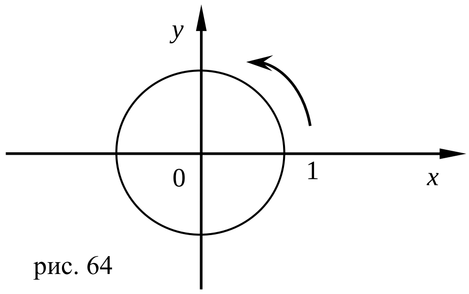


рис. 64

Контуром интегрирования является окружность. Запишем уравнение окружности в параметрической форме $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$. Тогда $dx = -\sin t\,dt,\ dy = \cos t\,dt,\ t \in [0, 2\pi]$. Интеграл принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t(-\sin t)\,dt - \cos^2 t \sin t\,dt +$$

$$+ i\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t(-dt) + \cos^3 t\,dt == \frac{2}{3}\cos^3 t\Big|_0^{2\pi} + i\left(\sin t - \frac{2\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Проверьте себя

14.1. Вычислите $\int_\Gamma \mathrm{Re}\,z\,dz$, где Γ – ломаная, состоящая из отрезка $[0, 2]$ действительной оси и отрезка, соединяющего точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$.

14.2. Вычислите $\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$,

где $\Gamma = \{z:\quad \mathrm{Im}\,z \ge 0,\quad |z| = 1,\quad \sqrt{1} = 1\}$.

Указание: Положите $z = re^{i\varphi}$, где $r = 1,\ 0 \le \varphi \le \pi$. Из условия $\sqrt{1} = 1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\frac{\varphi}{2}}$.

14.3. Вычислите $\int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, где $\Gamma = \{z : \mathrm{Im}\,z \ge 0, |z| = 1, \sqrt{1} = -1\}$.

Указание: Положите $z = re^{i\varphi}$, где $r = 1$, $0 \le \varphi \le \pi$. Из условия $\sqrt{1} = -1$ следует, что $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$.

§2. Интегральная теорема Коши

1°. Теорема Коши для односвязной области

Теорема 5.2.1. Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, а C – замкнутая, кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D, то

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{2.1}$$

Доказательство.► Доказательство проведём при дополнительном предположении о непрерывности $f'(z)$. Известно, что интеграл от функции комплексного переменного сводится к двум действительным криволинейным интегралам

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C u\,dy + v\,dx. \tag{2.2}$$

Известно также, что для равенства нулю криволинейного интеграла $\oint_C P\,dx + Q\,dy$ вдоль замкнутого контура C, лежащего в односвязной области D, достаточно:

1) существования и непрерывности в области D функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частных производных;

2) выполнения в каждой точки области равенства $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Для интегралов $\oint_C u\,dx - v\,dy$ и $\oint_C u\,dy + v\,dx$ условие 1) выполняется в силу аналитичности функции $f(z)$ и предположения непрерывности $f'(z)$. Условие 2) для этих интегралов записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Но условия (2.3) совпадают с условиями Коши – Римана, которым удовлетворяет аналитическая (по условию) функция $f(z)$. Таким образом, оба криволинейных интеграла в равенстве (2.2) равны нулю, и мы получаем

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0. \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е: справедлива теорема, обратная теореме Коши.

Т е о р е м а 5.2.2. Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D, и для любого замкнутого контура C, лежащего в D

$$\oint\limits_C f(z)dz = 0,$$

то $f(z)$ аналитична в области D.

2º. Независимость интеграла от пути интегрирования

Т е о р е м а 5.2.3. Если $f(z)$ − аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл от неё вдоль любой дуги $L \subset D$ не зависит от формы дуги L, а зависит только от начальной точки a и конечной точки b пути интегрирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о.► Пусть L_1 и L_2 − две произвольные дуги, ведущие от точки a в точку b (рис.65).

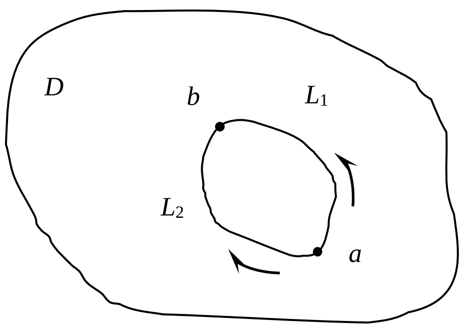


Рис.65

Рассмотрим замкнутый контур $C = L_1 + L_2^-$, где L_2^- есть дуга с противоположным L_2 направлением обхода. Так как $f(z)$ аналитична в D, то по теореме Коши имеем

$$\oint\limits_{L_1+L_2^-} f(z)dz = 0.$$

По свойствам интегралов получаем

$$\int\limits_{L_1+L_2^-} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz - \int\limits_{L_2} f(z)dz = 0$$

или

$$\int\limits_{L_1} f(z)dz = \int\limits_{L_2} f(z)dz \qquad (2.4)$$

С л е д с т в и е 5.2.4. Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то какова бы ни была дуга L внутри этой области, величина

$$\int\limits_L f(z)dz$$

зависит только от начальной точки a и конечной точки b дуги L, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением

$$\int_a^b f(z)dz.$$

С л е д с т в и е 5.2.5. Если $\Phi(z)$ какая-нибудь функция, для которой $\Phi'(z)= f(z)$, где $f(z)$ – аналитическая функция, то справедлива формула

$$\int_a^b f(z)dz = \Phi(z)+C \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) совпадает с формулой Ньютона – Лейбница.

Решение типовых примеров

Пример 5.2.1. Вычислить $\int_1^i ze^z dz$.

Решение. Убедившись, что подынтегральная функция является всюду аналитической, воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница (2.5). Имеем

$$\int_1^i ze^z dz = \left(ze^z - e^z\right)\Big|_1^i = e^i(i-1) = (\cos 1 + i\sin 1)(i-1) =$$

$$= -(\cos 1 + \sin 1) + i(\cos 1 - \sin 1).$$

Пример 5.2.2. Вычислить $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{dz}{z}$.

Решение. Внутри окружности $|z-2|=1$ и на самой окружности подынтегральная функция $f(z)=\frac{1}{z}$ аналитична (аналитичность теряется в точке $z=0$). По теореме Коши $\int\limits_{|z-2|=1} \frac{dz}{z} = 0$.

Пример 5.2.3. Вычислить $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z}$

Решение. Функция $f(z)-\frac{1}{z}$ внутри контура интегрирования не является аналитической, поэтому теорему Коши применить нельзя.

Уравнение контура интегрирования имеет вид $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Отсюда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$. Тогда $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i$.

Проверьте себя

15.1. Вычислите $\int\limits_{|z-1|=1} \operatorname{Im} z dz$.

Указание: Уравнение контура интегрирования запишите в виде $z - 1 = e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$. Отсюда $x = \cos\varphi + 1, \quad y = \sin\varphi$.

15.2. Вычислить $\int\limits_L |z| dz$, где $L = \{z : |z| = 2, \operatorname{Im} z \le 0\}$, пробегаемый от точки $z_1 = -2$ до $z_2 = 2$.

3º. Теорема Коши для многосвязной области

Дана $(n+1)$ – связная область G, граница Γ которой состоит из внешнего контура C_0 и n внутренних замкнутых контуров $C_1, C_2, \dots, C_n$. Пусть $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Проведём разрезы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (рис. 67 5.6), которые превратят многосвязную область G в односвязную G_1. Обозначим границу односвязной области через Γ_1.

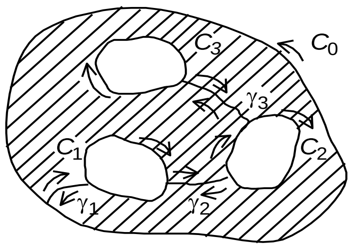


Рис. 5.6

Граница Γ_1 состоит из замкнутых контуров $C_0, C_1^-, C_2^-, \dots, C_n^-$ и разрезов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, каждый из которых обходим дважды в противоположных направлениях. Функция $f(z)$ аналитична в G_1 и на Γ_1, тогда по теореме Коши для односвязной области $\int\limits_{\Gamma_1} f(z) dz = 0$

или

$$\int_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^-} f(z)dz + \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k^-} f(z)dz \right) = 0,$$

а т.к. $\int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz$, то получим

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k^-} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \qquad (2.6)$$

Доказана

Теорема 5.2.6. Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области G, ограниченной несколькими замкнутыми кривыми, и на границе Γ, то $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$, причём обход сложного контура Γ происходит так, что область остаётся слева.

Замечание. Другая формулировка теоремы Коши.

Запишем равенство $\oint\limits_{C_0} f(z)dz + \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k^-} f(z)dz = 0$ в виде

$$\oint_{C_0} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0.$$

Отсюда

$$\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz. \qquad (2.7)$$

Таким образом, если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$, граница Γ которой состоит из нескольких замкнутых кривых, то интеграл от $f(z)$ по внешнему контуру равен сумме интегралов по всем внутренним контурам. При этом обход контуров происходит в одном направлении, т.е. все контуры обходятся против часовой стрелки (или все – по часовой).

4°. Вычисление интеграла $\oint\limits_C (z-a)^n\,dz$, где n – любое целое число и обход контура ведётся против часовой стрелки

I. Интегрирование ведётся по окружности $C: |z-a| = R$.

1) если $n \geq 0$, то $f(z) = (z-a)^n$ аналитическая всюду на комплексной плоскости. По теореме Коши получим

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = 0;$$

2) если $n < 0$, то теорема Коши не применима. Пусть $n+1 \neq 0$. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде: $z - a = Re^{i\varphi}$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Так как $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$, то

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = \int\limits_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} Rie^{i\varphi}d\varphi = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1\right) = 0.$$

3) при $n = -1$

$$\oint\limits_C \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Итак, $\oint\limits_{|z-a|=R} (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{при } n = -1 \end{cases}$, где обход контура производится против часовой стрелки.

П. Интегрирование ведётся по произвольному замкнутому контуру C на комплексной плоскости. Рассмотрим два случая:

1) Точка a лежит вне контура C. Тогда $f(z)=(z-a)^n$ аналитическая функция внутри контура C и на самом контуре для любого n. Тогда по теореме Коши для односвязной области $\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = 0$.

2) Точка a лежит внутри контура C. Опишем окружность γ с центром в точке a и лежащую внутри контура C (рис. 68 5.7). По теореме Коши для двусвязной области имеем

$$\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_\gamma f(z)dz.$$

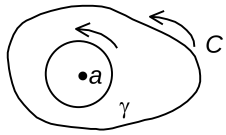


Рис. 5.7

Но $\oint\limits_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$

Следовательно, если G – односвязная область, ограниченная замкнутым контуром C, точка a лежит внутри области G, то

$$\oint\limits_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0, \text{при} \quad n \neq -1 \\ 2\pi i, \text{при} \quad n = -1 \end{cases},$$

где обход контура C производится так, что точка a остаётся слева (т.е. против часовой стрелки).

§3. Интегральная формула Коши

1°. Т е о р е м а 5.3.1. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D} = D \cup C$, и z_0 – внутренняя точка области D, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz, \qquad (3.1)$$

где обход контура C производится в положительном направлении.

Равенство (3.1) называетс *интегральной формулой Коши*.

Д о к а з а т е л ь с т в о.► Подынтегральная функция $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична всюду в области D за исключением точки z_0. Опишем с центром в точке z_0 окружность $\gamma_\rho \subset D$ (рис. 69 5.8). Тогда $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ будет аналитической в двусвязной области и на её границе $C \bigcup \gamma_\rho$. По теореме Коши для двусвязной области получаем

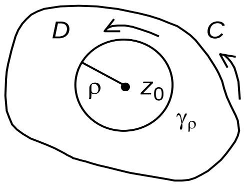


Рис. 5.8

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0}. \qquad (3.2)$$

Заметим, что в равенстве (3.2) радиус ρ окружности γ_ρ может быть выбран произвольно, лишь бы эта окружность лежала внутри области D.

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}dz =$$

$$= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz. \qquad (3.3)$$

Функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, значит, непрерывна в этой точке. Тогда по определению непрерывной функции для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $z \in \gamma_\rho$ выполняется условие $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$, если только радиус ρ достаточно мал (т.к. z_0 – центр окружности и, следовательно, $|z-z_0| = \rho$). Тогда в первом слагаемом равенства (3.3) подынтегральная функция является ограниченной.

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

По теореме об оценке интеграла получим

$$\left|\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot дл.\gamma_\rho=\frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho=2\pi\varepsilon=\varepsilon_1 \qquad (3.4)$$

и в силу произвольности ε $\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz=0$. Возвращаясь к равенствам (3.2) и (3.3), запишем

$$\oint\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0+\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=f(z_0)\cdot 2\pi i,$$

откуда $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$. Теорема доказана.◄

Замечания.

1). Интегральная формула Коши позволяет находить значение аналитической функции в любой точке области, зная значение функции только на границе области.

2). Если точка z_0 лежит вне контура C, то функция $\frac{f(z)}{z-z_0}$ аналитическая всюду в $\overline{D}=D\bigcup C$ и по теореме Коши для односвязной области $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=0$.

3). Формула Коши справедлива и в том случае, если $f(z)$ аналитична лишь внутри области D и непрерывна на контуре C.

2°. Существование высших производных для аналитической функции. Интегральная формула Коши позволяет выразить значение аналитической функции во внутренней точке z_0 односвязной области D через интеграл по контуру C, ограничивающему область D:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Однако этот интеграл будет иметь смысл и в том случае, когда задана произвольная кривая Γ (не обязательно замкнутая) и на ней – произвольная непрерывная функция $f(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=F(z_0) \qquad (3.5)$$

Интеграл в этом случае называется *интегралом типа Коши*. Следующую теорему сформулируем без доказательства.

Теорема 5.3.2. Функция $F(z_0)$, определённая интегралом типа Коши, является аналитической в каждой точке плоскости, не лежащей на кривой Γ. Она обладает в таких точках производными всех порядков, причём

$$F^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

Так как интеграл Коши является частным случаем интеграла типа Коши, то имеет место

Следствие 5.3.3. Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{D}=D\bigcup C$, то внутри этой области $f(z)$ обладает производными всех порядков, причём эти производные представляются формулами:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad z_0\in D, \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (3.6)$$

Замечание. Из сформулированной теоремы и её следствия следует, что все производные аналитической функции также являются аналитическими (т.к. они, в свою очередь, дифференцируемы). Другими словами, из существования в некоторой области первой производной функции комплексного переменного следует существование всех её производных.

Решение типовых примеров

Пример 5.3.1. Вычислить $\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z-i}{(z+1)(z-i)}dz$

Решение. Подынтегральная функция $\varphi(z)=\frac{2z-i}{(z+1)(z-i)}$ является аналитической в круге $|z|\le 2$, за исключением точек $z=-1$ и $z=i$. Опишем около точек $z=-1$ и $z=i$ окружности γ_1 и γ_2 столь малых радиусов, чтобы они друг с другом не пересекались и целиком лежали внутри круга $|z| \le 2$ (рис.70 5.9).

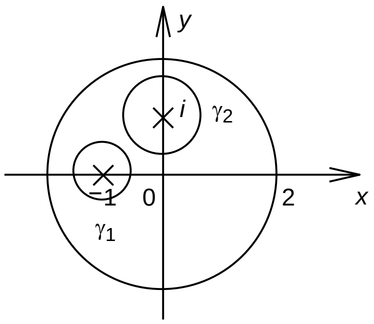


Рис. 5.9

По теореме Коши для многосвязной области

$$\int\limits_{|z|=2} \varphi(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} \varphi(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} \varphi(z)dz.$$

Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы в числителе дроби оказалась функция $f(z)$ – аналитическая внутри контуров γ_1 и γ_2, а в знаменателе – разность $(z - z_0)$, где точка z_0 внутри указанных контуров. Получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{2z-i}{(z+1)(z-i)}dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{2z-i}{z-i}}{z-(-1)}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{2z-i}{z+1}}{z-i}dz.$$

К каждому из интегралов применим формулу Коши:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{2z-i}{z-i}}{z-(-1)} = 2\pi i \left.\frac{2z-i}{z-i}\right|_{z_0=-1} = 2\pi i \frac{-2-i}{-1-i} = \pi(1+3i),$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{2z-i}{z+1}}{z-i}dz = 2\pi i \left.\frac{2z-i}{z+i}\right|_{z_0=i} = 2\pi i \frac{i}{1+i} = \pi(-1+i).$$

И окончательно получаем

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{2z-i}{(z+1)(z-i)}dz = \pi(1+3i) + \pi(-1+i) = 4\pi i.$$

Пример 5.3.2. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{z^2+9}$.

Решение. В замкнутом круге $|z| \le 4$ подынтегральная функция аналитична, за исключением точек $z_1 = 3i$ и $z_2 = -3i$. По аналогии с предыдущим примером получаем

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{zdz}{z^2+9} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{z}{z-3i}}{z+3i}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{z}{z-3i}\right|_{z_0=-3i} + 2\pi i \left.\frac{z}{z+3i}\right|_{z_0=3i} = \pi i + \pi i = 2\pi i .$$

Пример 5.3.3. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}\,dz$.

Решение. В круге $|z| \le 1$ подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки $z_0 = 0$. Здесь нужно применить формулу вычисления аналитической функции:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

отсюда $\displaystyle\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$, где $f(z)$ – аналитическая внутри контура C и на C функция, точка z_0 лежит внутри C.

В нашем примере в качестве аналитической функции имеем $f(z) = \operatorname{sh}^2 z$. Полагая $n = 2$, получим

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left.\left(\operatorname{sh}^2 z\right)''\right|_{z_0=0} = \pi i 2 \operatorname{ch} 2z\Big|_{z_0=0} = \pi i .$$

Пример 5.3.4. Вычислить $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=1,5} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2-1\right)^2}dz$.

Решение. В круге $|z-1| \le 1{,}5$ подынтегральная функция теряет аналитичность в двух точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ (рис.71 5.10). Представим интеграл в виде суммы двух интегралов, выделяя каждый раз в числителе аналитическую функцию

$$\int\limits_{|z-1|=1,5} \varphi(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2}}{z}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{iz}}{z(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz .$$

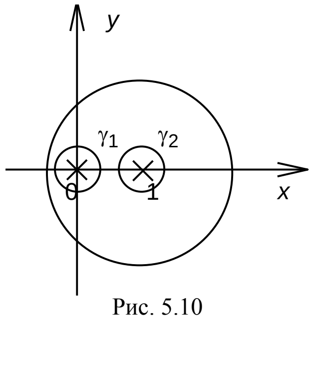


Рис. 5.10

К первому интегралу применим интегральную формулу Коши:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{\dfrac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2}}{z}\,dz = 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{\left(z^2-1\right)^2}\right|_{z_0=0} = 2\pi i .$$

Ко второму интегралу применим формулу вычисления производной:

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{\dfrac{e^{iz}}{z(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left.\left(\frac{e^{iz}}{z(z+1)^2}\right)'\right|_{z_0=1} = \frac{e^{i}(i-2)}{2}\pi i .$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z-1|=1{,}5} \frac{e^{iz}}{z\left(z^2-1\right)^2}\,dz = 2\pi i + \frac{\pi i}{2}e^{i}(i-2) =$$

$$= 2\pi i + \frac{\pi i}{2}(\cos 1 + i\sin 1)(i-2) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(2\sin 1 - \cos 1) + \frac{\pi i}{2}(4 - 2\cos 1 - \sin 1).$$

Проверьте себя

16.1. Вычислите интегралы с помощью интегральной формулы Коши или формулы вычисления производной

а) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}dz$;

б) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz$;

в) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^3(z+4)}$;

г) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1-\sin z}{z^2}dz$.