П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ, Т. Я. КОЖЕВНИКОВА

Высшая математика в упражнениях и задачах

В двух частях

Часть 2

6-е издание

Москва
«ОНИКС 21 век»
«Мир и Образование»
2003

УДК 516+517
ББК 22.1я73
Д17

Данко П. Е.

Д17 Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — 6-е изд. — М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. — 416 с.: ил.

ISBN 5-329-00327-X (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-009-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Содержание второй части охватывает следующие разделы программы: кратные и криволинейные интегралы, ряды, дифференциальные уравнения, теорию вероятностей, теорию функций комплексного переменного, операционное исчисление, методы вычислений, основы вариационного исчисления.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельной работы.

УДК 516+517
ББК 22.1я73

Учебное издание

Данко Павел Ефимович, Попов Александр Георгиевич,
Кожевникова Татьяна Яковлевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ

В двух частях

Часть 2

Редактор *А. М. Суходский*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 31.03.2003. Формат 60 × 90 1/16.
Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,0.
Доп. тираж 30 000 экз. Заказ № 79.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век».
Изд. лиц. ИД № 02795 от 11.09.2000. 105066, Москва, ул. Доброслободская, 5а.
Отдел реализации: тел. (095) 310-75-25, 150-52-11. Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26. E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru
Издание осуществлено при участии
ООО «Издательство АСТ»

ОАО «Санкт-Петербургская типография № 6». 191144, Санкт-Петербург, ул. Моисеенко, 10.
Телефон отдела маркетинга 271-35-42.

ISBN 5-329-00327-X (ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»)
ISBN 5-94666-009-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть функция $f(x, y)$ определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей, имеющих площади $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$ (*диаметром области* называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_k(\xi_k; \eta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на площадь этой области.

Интегральной суммой для функции $f(x, y)$ по области D называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k = f(\xi_1, \eta_1)\,\Delta\sigma_1 + f(\xi_2, \eta_2)\,\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\,\Delta\sigma_n.$$

Если при $\max d_k \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел $I = \lim\limits_{\max d_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k$, не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и от выбора точек P_k в пределах каждой из них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ в области D и обозначается следующим образом:

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta\sigma_k.$$

Если $f(x, y) > 0$ в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma$ равен *объему цилиндрического тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу областью D плоскости xOy.

Основные свойства двойного интеграла

1°. $\iint\limits_{D} [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,d\sigma = \iint\limits_{D} f_1(x, y)\,d\sigma \pm \iint\limits_{D} f_2(x, y)\,d\sigma.$

2°. $\iint\limits_{D} cf(x, y)\,d\sigma = c\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma$, где c — постоянная.

3°. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,d\sigma.$$

4°. Оценка двойного интеграла. Если $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, то $mS \leqslant \iint\limits_{D} f(x, y)\,d\sigma \leqslant MS$, где S — площадь области D, а m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x, y)$ в области D.

Правила вычисления двойных интегралов

Различают два основных вида области интегрирования.

1. Область интегрирования D ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ $[\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)]$, каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (рис. 1).

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy$, в котором x считается постоянным.

2. Область интегрирования D ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c<d)$, а слева и справа — непрерывными кривыми $x=\psi_1(y)$ и $x=$

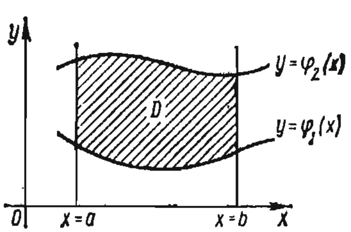

Рис. 1

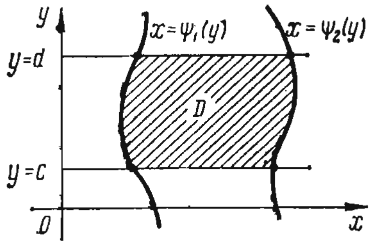

Рис. 2

$=\psi_2(y)$ $[\psi_1(y)\leqslant\psi_2(y)]$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке (рис. 2)

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx,$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx$, в котором y считается постоянным.

Правые части указанных формул называются *двукратными* (или *повторными*) интегралами.

В более общем случае область интегрирования путем разбиения на части сводится к основным областям.

1. Вычислить $\iint\limits_D x\ln y\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 4,\ 1\leqslant y\leqslant e$.

△ $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy=\int\limits_0^4 x\,dx\int\limits_1^e \ln y\,dy=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4\cdot[y\ln y-y]_1^e=8(e-e+1)=8.$ ▲

2. Вычислить $\iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)\,dx\,dy$, если область D — квадрат $0\leqslant x\leqslant \pi/4$, $0\leqslant y\leqslant \pi/4$.

$$\triangle \qquad \iint\limits_D (\cos^2 x+\sin^2 y)\,dx\,dy=\int\limits_0^{\pi/4} dx\int\limits_0^{\pi/4}(\cos^2 x+\sin^2 y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}\left[y\cos^2 x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\sin 2y\right]_0^{\pi/4} dx=\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\cos^2 x+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\pi}{8}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}. \blacktriangle$$

3. Вычислить $I=\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(2x-y)\,dy$.

$$\triangle\ I=\int\limits_1^2\left[2xy-\frac{1}{2}y^2\right]_x^{x^2} dx=\int\limits_1^2\left(2x^3-\frac{1}{2}x^4-2x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^3\right]_1^2=0{,}9. \blacktriangle$$

4. Вычислить $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

$\triangle$ Построим область D. Первая линия — парабола с вершиной в точке $(0;\ 2)$, симметричная относительно оси Oy. Вторая линия — прямая. Решая совместно уравнения $y=2-x^2$ и $y=2x-1$, найдем координаты точек пересечения: $A(-3;\ -7)$, $B(1;\ 1)$ (рис. 3).

Область интегрирования принадлежит к первому виду. Находим

$$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy=\int\limits_{-3}^{1} dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=\int\limits_{-3}^{1}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{2x-1}^{2-x^2} dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}. \blacktriangle$$

5. Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, если область D ограничена прямыми $y=x$, $y=2x$, $x=2$, $x=3$.

$$\triangle \qquad \iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{2x}(x+2y)\,dy=\int\limits_2^3 [xy+y^2]_x^{2x}\,dx=$$

$$=\int\limits_2^3 (2x^2+4x^2-x^2-x^2)\,dx=4\int\limits_2^3 x^2\,dx=\frac{4}{3}x^3\Big|_2^3=25\frac{1}{3}. \blacktriangle$$

6. Вычислить $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos y\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

7. Вычислить $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

8. Вычислить $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

9. Изменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy.$$

△ Область интегрирования D ограничена линиями $x=-1$, $x=1$, $y=-\sqrt{1-x^2}$, $y=1-x^2$ (рис. 4). Изменим порядок интегрирования, для чего

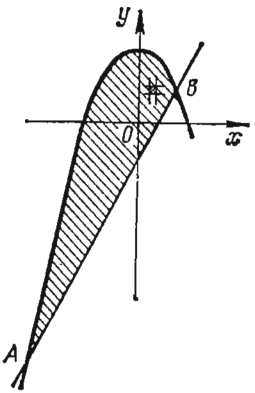

Рис. 3

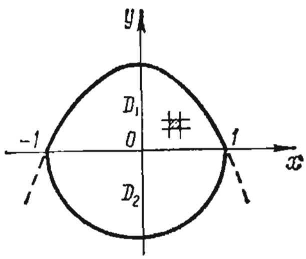

Рис. 4

заданную область представим в виде двух областей (второго вида): D_1, ограниченную слева и справа ветвями параболы $x=\pm\sqrt{1-y}$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, и D_2, ограниченную дугами окружности $x=\pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \leqslant y \leqslant 0)$. Тогда

$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx. \blacktriangle$$

10. Вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2 x\,dx \int\limits_{0}^{a} y\,dy$.

11. Вычислить $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{x^3}^{x} (x-y)\,dy$.

12. Вычислить $\iint\limits_D y\ln x\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$.

13. Вычислить $\iint\limits_D (\cos 2x + \sin y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$.

14. Вычислить $\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy$, если область D определяется неравенствами $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant (2/3)\,x+3$.

15. Вычислить $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=0$, $y=\pi/2$, $y=x$.

16. Вычислить $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, если область D — треугольник с вершинами A (2; 3), B (7; 2), C (4; 5).

Изменить порядок интегрирования:

17. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y)\,dy$. **18.** $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x, y)\,dy$.

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$. **20.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy$.

21. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$. **22.** $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x, y)\,dy$.

23. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{3y/4}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\,dx$.

24. $\int\limits_{0}^{9/16} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{9/16}^{3/4} dy \int\limits_{y}^{3/4} f(x, y)\,dx$.

25. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{4}^{6} dx \int\limits_{\sqrt{x-2}}^{2} f(x, y)\,dy$.

§ 2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Двойной интеграл в полярных координатах. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к *полярным координатам* ρ, θ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Если область интегрирования D ограничена двумя лучами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$, выходящими из полюса, и двумя кривыми $\rho=\rho_1(\theta)$ и $\rho=\rho_2(\theta)$, где $\rho_1(\theta)$ и $\rho_2(\theta)$ — однозначные функции при $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ и $\rho_1(\theta)\leqslant\rho_2(\theta)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho,$$

где $F(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, причем сначала вычисляется интеграл $\int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho, \theta)\rho\, d\rho$, в котором θ считается постоянным.

2. Двойной интеграл в криволинейных координатах. Пусть двойной интеграл преобразуется от прямоугольных координат x, y к *криволинейным координатам* u, v, связанным с прямоугольными координатами соотношениями **$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, где функции $x(u, v)$ и $y = (u, v)$, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области D плоскости xOy и точками области D' плоскости $uO'v$ (рис. 5) и определитель преобразования, называемый *якобианом*, в области D' не обращается в нуль:**

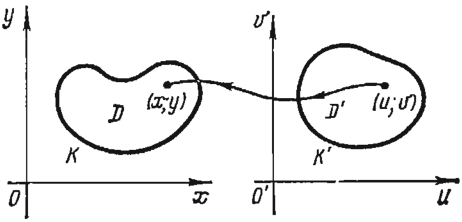

Рис. 5

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда пользуются формулой

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\, |J|\, du\, dv.$$

Для случая полярных координат

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

26. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$, если D — I четверть круга $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

△ Полагая $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, имеем

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \rho^3 \Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}. \ ▲$$

27. Вычислить $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$, если область D — кольцо между окружностями $x^2 + y^2 = e^2$ и $x^2 + y^2 = e^4$.

△ Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy = \iint\limits_D \ln\rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = 2\iint\limits_D \rho\ln\rho\, d\rho\, d\theta = 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_e^{e^2} \rho\ln\rho\, d\rho.$$

Взяв по частям интеграл, зависящий от ρ, получим

$$2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}d\theta=\pi e^2(3e^2-1).\ \blacktriangle$$

28. Вычислить $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$, если область D — квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ (рис. 6).

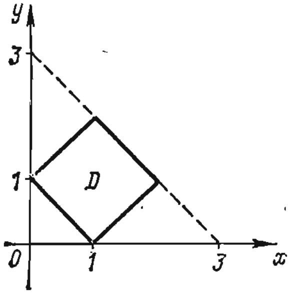

Рис. 6

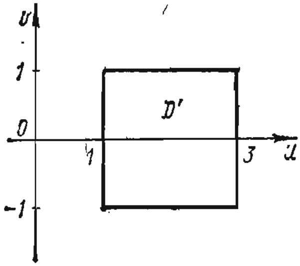

Рис. 7

$\triangle$ Положим $x+y=u$, $x-y=v$, откуда $x=(1/2)(u+v)$, $y=(1/2)(u-v)$. Тогда якобиан преобразования

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\ \text{т. е. } |J|=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint\limits_{D'} u^3v^2\,du\,dv$. Так как область D' также является квадратом (рис. 7), то

$$\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,du\int_{-1}^1 v^2\,dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 u^3\left[\frac{1}{3}v^3\right]_{-1}^1 du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^3(1+1)\,du=\frac{1}{12}u^4\Big|_1^3=\frac{20}{3}.\ \blacktriangle$$

29. Вычислить $\iint\limits_D \frac{x^2\sin(xy/2)}{y}\,dx\,dy$, если область D ограничена четырьмя параболами $x^2=\pi y/3$, $x^2=2\pi y/3$, $y^2=2x$, $y^2=4x$ (рис. 8).

$\triangle$ Произведем замену переменных так, чтобы $xy=uv$ и $x^2/y=v$; тогда $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$ и область D' окажется прямоугольником: $u=2$, $u=4$, $v=\pi/3$, $v=2\pi/3$ (рис. 9). Находим якобиан преобразования:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \dfrac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\\ \dfrac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \dfrac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3}\end{vmatrix}=\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{3},\ \text{т. е. } |J|=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_D \frac{x^2 \sin(xy/2)}{y}\, dx\, dy = \frac{1}{3} \iint\limits_{D'} \frac{u^{2/3} v^{4/3} \sin(uv/2)}{u^{2/3} v^{1/3}}\, du\, dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3} v\, dv \int\limits_2^4 \sin(uv/2)\, du = \frac{2}{3} \int\limits_{\pi/3}^{2\pi/3} (\cos v - \cos 2v)\, dv =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577. \blacktriangle$$

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

30. $\iint\limits_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx\, dy$, если область D — круг $x^2 + y^2 \leqslant \pi^2$.

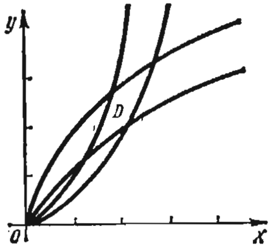

Рис. 8

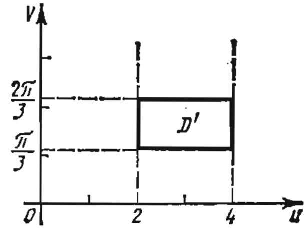

Рис. 9

31. $\iint\limits_D \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2 + 1}$, если область D ограничена полуокружностью $y = \sqrt{1 - x^2}$ и осью Ox.

32. $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

33. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = \pi^2/9$, $x^2 + y^2 = \pi^2$.

34. $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, если область D ограничена линиями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$.

35. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} dy$, введя новые переменные $x = u(1 - v)$, $y = uv$.

36. Вычислить $\iint\limits_D dx\,dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$.

● Произвести замену переменных $x=(u/v)^{1/2}$, $y=(uv)^{1/2}$.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле

$$S=\iint\limits_D dx\,dy.$$

Если область D определена, например, неравенствами $a\leqslant x\leqslant b$, $\varphi_1(x)\leqslant \leqslant y\leqslant \varphi_2(x)$, то

$$S=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, $\varphi(\theta)\leqslant\rho\leqslant f(\theta)$, то

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_\alpha^\beta d\theta\int\limits_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)}\rho\,d\rho.$$

37. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

△ Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений $x=4y-y^2$ и $x+y=6$ (чертеж рекомендуется выполнить самостоятельно). В результате получим $A(4;\ 2)$, $B(3;\ 3)$. Таким образом,

$$S=\iint\limits_D dx\,dy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx=\int\limits_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy=$$

$$=\int\limits_2^3(-y^2+5y-6)\,dy=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right]_2^3=\frac{1}{6}\text{ (кв. ед.)}. \ ▲$$

38. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho=1$, $\rho=(2/\sqrt{3})\cos\theta$ (вне окружности $\rho=1$; рис. 10).

△ Найдем координаты точки A; имеем $1=(2/\sqrt{3})\cos\theta$, $\cos\theta=\sqrt{3}/2$, $\theta=\pi/6$, т. е. $A(1;\ \pi/6)$. Тогда

$$S=\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{\pi/6} d\theta\int\limits_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta}\rho\,d\rho=2\int\limits_0^{\pi/6}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^{(2/\sqrt{3})\cos\theta}d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/6}\left(\frac{4}{3}\cos^2\theta-1\right)d\theta=\int\limits_0^{\pi/6}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos 2\theta-1\right)d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/6}(2\cos 2\theta-1)\,d\theta=\frac{1}{3}\left[\sin 2\theta-\theta\right]_0^{\pi/6}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{18}(3\sqrt{3}-\pi)\text{ (кв. ед.)}. \ ▲$$

39. Найти площадь, ограниченную лемнискатой $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

△ Полагая $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, преобразуем уравнение кривой к полярным координатам. В результате получим $\rho^2=2a^2\sin\theta\cos\theta=a^2\sin 2\theta$.

Очевидно, что изменению полярного угла θ от 0 до $\pi/4$ соответствует четверть искомой площади. Следовательно,

$$S=4\iint\limits_D \rho\,d\rho\,d\theta=4\int\limits_0^{\pi/4}d\theta\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\rho\,d\rho=2\int\limits_0^{\pi/4}\rho^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}d\theta=$$

$$=2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\sin 2\theta\,d\theta=-a^2\cos 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=a^2. \blacktriangle$$

40. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^3+y^3=axy$ (площадь петли; рис. 11).

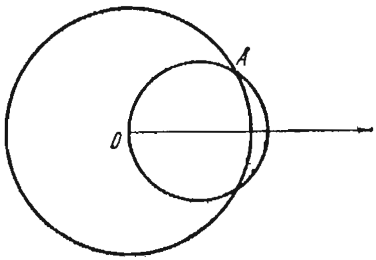

Рис. 10

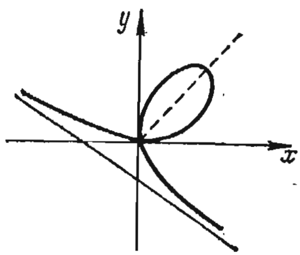

Рис. 11

△ Преобразуем данное уравнение к полярным координатам: $\rho^3(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=a\rho^2\sin\theta\cos\theta$, т. е. $\rho=a\sin\theta\cos\theta/(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$. Осью симметрии петли является луч $\theta=\pi/4$, поэтому

$$S=2\iint\limits_D\rho\,d\rho\,d\theta=2\int\limits_0^{\pi/4}d\theta\int\limits_0^{a\sin\theta\cos\theta/(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}\rho\,d\rho=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}d\theta=a^2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cos^4\theta}{\cos^6\theta(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{3\operatorname{tg}^2\theta\,d(\operatorname{tg}\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\frac{a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d(1+\operatorname{tg}^3\theta)}{(1+\operatorname{tg}^3\theta)^2}=\left[-\frac{a^2}{3(1+\operatorname{tg}^3\theta)}\right]_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{6}. \blacktriangle$$

Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

41. $x=y^2-2y$, $x+y=0$.

42. $y=2-x$, $y^2=4x+4$.

43. $y^2=4x-x^2$, $y^2=2x$ (вне параболы).

44. $3y^2=25x$, $5x^2=9y$.

45. $y^2+2y-3x+1=0$, $3x-3y-7=0$.

46. $y=\cos x$, $y=\cos 2x$, $y=0$ (площадь ближайшей от начала координат фигуры).

47. $y=4x-x^2$, $y=2x^2-5x$.

48. $x=4-y^2$, $x+2y-4=0$.

49. $\rho=2-\cos\theta$, $\rho=2$ (вне кардиоиды)

50. $\rho=2(1+\cos\theta)$, $\rho=2\cos\theta$.

51. $y^2=4(1-x)$, $x^2+y^2=4$ (вне параболы).

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x, y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D, вычисляется по формуле

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

52. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

△ Тело, объем которого надо вычислить, ограничено сверху плоскостью $z=3x$, сбоку — параболическим цилиндром $y=1+x^2$ и плоскостью $y=5$. Следовательно, это — цилиндрическое тело. Область D ограничена параболой $y=1+x^2$ и прямыми $y=5$ и $x=0$. Таким образом, имеем

$$V=\iint\limits_D 3x\,dx\,dy=3\int\limits_0^2 x\,dx\int\limits_{1+x^2}^5 dy=3\int\limits_0^2 x\cdot[y]_{1+x^2}^5\,dx=$$

$$=3\int\limits_0^2 (4x-x^3)\,dx=3\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=12 \text{ (куб. ед.)}. \ ▲$$

53. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=1-x^2-y^2$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=0$ и расположенного в I октанте.

△ Данное тело ограничено сверху параболоидом $z=1-x^2-y^2$. Область интегрирования D — круговой сектор, ограниченный дугой окружности $x^2+y^2=1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z=0$, и прямыми $y=x$ и $y=x\sqrt{3}$. Следовательно,

$$V=\iint\limits_D (1-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция зависит от x^2+y^2, целесообразно перейти к полярным координатам. Уравнение окружности $x^2+y^2=1$ в этих координатах примет вид $\rho=1$, подынтегральная функция равна $1-\rho^2$, а пределы интегрирования по θ определяем из уравнений прямых: $\operatorname{tg}\theta_1=1$, т. е. $\theta_1=\pi/4$; $\operatorname{tg}\theta_2=\sqrt{3}$, т. е. $\theta_2=\pi/3$. Таким образом, имеем

$$V=\iint\limits_D (1-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta\int\limits_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\frac{1}{2}\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\theta=\frac{\pi}{48} \text{ (куб. ед.)}. \ ▲$$

54. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$.

△ Рассмотрим восьмую часть заданного тела (рис. 12):

$$\frac{1}{8}V=\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy=$$

$$=\int_0^a (a^2-x^2)\,dx=\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

Следовательно, $V=16a^3/3$. ▲

Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями:

55. $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$.

56. $x=2y^2$, $x+2y+z=4$, $y=0$, $z=0$.

57. $x^2+4y^2+z=1$, $z=0$.

58. $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

59. $z=4-x^2$, $2x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

60. $z^2=xy$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=4$, $z=0$.

61. $z=5x$, $x^2+y^2=9$, $z=0$.

62. $x+y+z=6$, $3x+2y=12$, $3x+y=6$, $y=0$, $z=0$.

63. $z=x+y+1$, $y^2=x$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

64. $z=0$, $z=xy$, $x^2+y^2=4$.

65. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, $y=0$, $z=x/2$, $z=x$.

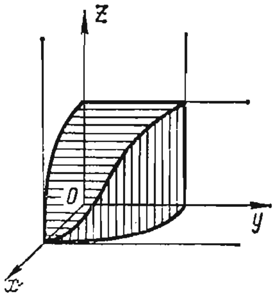

Рис. 12

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ

Если гладкая поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, то *площадь поверхности* выражается формулой

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

где D — проекция данной поверхности на плоскость xOy. Аналогично, если поверхность задана уравнением $x=f(y, z)$, то

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz,$$

где D — проекция поверхности на плоскость yOz; если же уравнение поверхности имеет вид $y=f(x, z)$, то

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz,$$

где D — проекция поверхности на поверхность xOz.

66. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=ay$ (рис. 13).

△ Из уравнения сферы имеем (для I октанта):

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Часть сферы, расположенная в I октанте, проецируется в полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=ay$ и осью Oy. Этот полукруг и является областью интегрирования D.

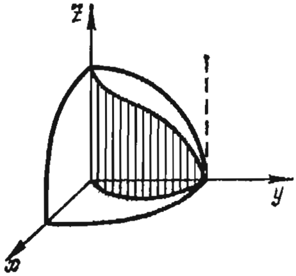

Рис. 13

Поверхность расположена в четырех октантах, а потому искомая площадь

$$S=4a\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам, тогда уравнение окружности примет вид $\rho=a\sin\theta$ и

$$S=4a\iint\limits_D \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=4a\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{a\sin\theta}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=$$

$$=-4a\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\Big|_0^{a\sin\theta}d\theta=-4a^2\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\theta-1)\,d\theta=$$

$$=-4a^2[\sin\theta-\theta]_0^{\pi/2}=4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\quad \text{(кв. ед.)}.$$

67. Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$ (рис. 14).

△ Из уравнения конуса имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Областью интегрирования D является круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$, или $\rho=2\cos\theta$. Тогда

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D dx\,dy=\sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}\rho\,d\rho=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\rho^2\,\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}4\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=2\sqrt{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}=\pi\sqrt{2}\quad \text{(кв. ед.)}\ ▲$$

68. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2=2z$, отсеченной плоскостями $x-2y=0$, $y=2x$, $x=2\sqrt{2}$ (рис. 15).

△ Областью интегрирования служит треугольник OAB. Из уравнения цилиндра имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Тогда

$$S=\iint\limits_{0}\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,dx\int\limits_{x/2}^{2x}dy=$$

$$=\int\limits_0^{2\sqrt{2}}\frac{3}{2}x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{3}{4}\int\limits_0^{2\sqrt{2}}(1+x^2)^{1/2}\,d(1+x^2)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{2}}=13\ (\text{кв. ед.}).\ ▲$$

69. Вычислить площадь части поверхности параболоида $x=1-y^2-z^2$, вырезанной цилиндром $y^2+z^2=1$.

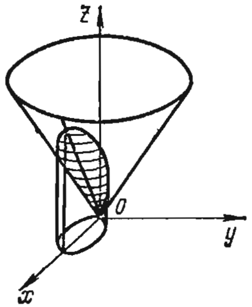

Рис. 14

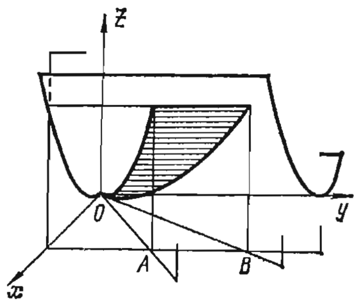

Рис. 15

△ Область интегрирования — окружность $y^2+z^2=1$ (она расположена в плоскости yOz). Из уравнения параболоида имеем $\frac{\partial x}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial x}{\partial z}=-2z$. Тогда

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=\iint\limits_D\sqrt{1+4(y^2+z^2)}\,dy\,dz.$$

Перейдя к полярным координатам, получим

$$S=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1d\theta=$$

$$=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\theta=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi\ (\text{кв. ед.}).\ ▲$$

70. Найти площадь части поверхности $y=x^2+z^2$, вырезанной цилиндром $x^2+z^2=1$ и расположенной в I октанте.

71. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2/4+y^2=1$.

72. Найти площадь той части плоскости $z=x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2+y^2=4$ выше плоскости $z=0$.

73. Найти площадь части поверхности цилиндра $z=x^2$, вырезанной плоскостями $x+y=\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$.

74. Вычислить площадь поверхности конуса $x^2-y^2-z^2=0$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

75. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2+z^2=4$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

76. Найти площадь части поверхности $z^2=2xy$, вырезанной плоскостями $x=1$, $y=4$, $z=0$.

§ 6. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Если пластинка занимает область D плоскости xOy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma=\gamma(x, y)$, то *масса* M пластинки выражается двойным интегралом:

$$M=\iint\limits_D \gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy находятся по формулам

$$M_x=\iint\limits_D y\gamma(x, y)\,dx\,dy,\quad M_y=\iint\limits_D x\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

В случае однородной пластинки $\gamma=\text{const}$.

Координаты центра тяжести пластинки можно вычислить по формулам

$$\bar{x}=M_y/M,\quad \bar{y}=M_x/M,$$

где M — масса пластинки, а M_x, M_y — ее статические моменты относительно осей координат.

В случае однородной пластинки эти формулы принимают вид

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,dx\,dy}{S},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{S},$$

где S — площадь области D.

Моменты инерции пластинки *относительно осей* Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x=\iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy,\quad I_y=\iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy,$$

а момент инерции относительно начала координат — по формуле

$$I_0=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\gamma(x, y)\,dx\,dy=I_x+I_y.$$

Полагая в этих формулах $\gamma(x, y)=1$, получим формулы для вычисления геометрических моментов инерции плоской фигуры.

77. Найти кооординаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$ (рис. 16).

△ Так как фигура симметрична относительно оси Ox, то $\bar{y}=0$. Остается найти $\bar{x}$. Найдем площадь данной фигуры;

$$S=\iint_D dx\,dy=2\int_0^2 dy\int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} dx=$$

$$=2\int_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=$$

$$=2\int_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=6\left[y-\frac{1}{12}y^3\right]_0^2=8.$$

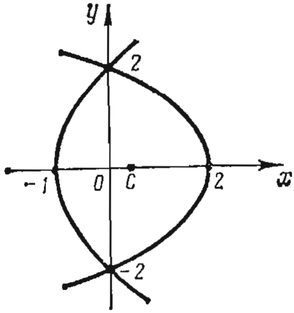

Рис. 16

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{1}{8}\cdot 2\int_0^2 dy\int_{(y^2-4)/4}^{(4-y^2)/2} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\left[\frac{1}{4}(4-y^2)^2-\frac{1}{16}(y^2-4)^2\right]dy=\frac{1}{8}\int_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=$$

$$=\frac{1}{8}\left[3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right]_0^2=\frac{2}{5}.\ ▲$$

78. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $x^2/25+y^2/9=1$ и его хордой $x/5+y/3=1$.

△ Найдем площадь сегмента:

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_0^5 dx\int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\int_0^5\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}-3+\frac{3}{5}x\right)dx=\frac{15}{4}(\pi-2).$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_D x\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5 x\,dx\int_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\int_0^5\left[\frac{3}{5}x\sqrt{25-x^2}-3x\left(1-\frac{x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left[-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(25-x^2)^{3/2}-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{5}\right]_0^5=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\left(25-\frac{75}{2}+25\right)=\frac{10}{3(\pi-2)};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,dx\,dy=\frac{4}{15(\pi-2)}\int\limits_0^5 dx\int\limits_{3(1-x/5)}^{(3/5)\sqrt{25-x^2}} y\,dy=$$

$$=\frac{4}{15(\pi-2)}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left[\frac{9}{25}(25-x^2)-9\left(1-\frac{x}{5}\right)^2\right]dx=$$

$$=\frac{2\cdot 9\cdot 2}{15(\pi-2)\cdot 25}\int\limits_0^5(5x-x^2)\,dx=\frac{12}{125(\pi-2)}\left[\frac{5x^2}{2}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^5=$$

$$=\frac{12}{125(\pi-2)}\left(\frac{125}{2}-\frac{125}{3}\right)=\frac{2}{\pi-2}.\ \blacktriangle$$

79. Вычислить полярный момент инерции фигуры, ограниченной линиями $x/a+y/b=1$, $x=0$, $y=0$.

$\triangle$ Момент инерции относительно начала координат равен

$$I_0=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{(b/a)(a-x)}(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^a\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{(b/a)(a-x)}dx=\int\limits_0^a\left[\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}(a-x)^3\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{3}bx^3-\frac{b}{4a}x^4-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot\frac{1}{4}(a-x)^4\right]_0^a=\frac{ab(a^2+b^2)}{12}.\ \blacktriangle$$

80. Вычислить момент инерции относительно оси Ox фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\theta)$.

$\triangle$ Перейдя к полярным координатам в формуле $I_x=\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$, получим

$$I_x=\iint\limits_D\rho^2\sin^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^3\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^4\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta)\,d\theta=\frac{21}{32}\pi a^4.\ \blacktriangle$$

81. Определить центр тяжести площади, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=1$, $x=2$.

82. Определить центр тяжести площади, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\theta)$.

83. Определить центр тяжести полусегмента параболы $y^2=ax$, отсеченного прямыми $x=a$, $y=0$ $(y>0)$.

84. Найти центр тяжести площади, ограниченной одной петлей кривой $\rho=a\sin 2\theta$.

85. Найти центр тяжести площади, ограниченной параболами $y^2=x$, $x^2=y$.

86. Найти центр тяжести площади, ограниченной параболой $y^2=2px$ и прямой $x=2p$.

87. Найти центр тяжести площади, ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$.

88. Вычислить момент инерции площади, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}$, $x+y=3$, $y=0$, относительно оси Ox.

89. Вычислить полярный момент инерции площади, ограниченной прямыми $x+y=2$, $x=0$, $y=0$.

90. Вычислить момент инерции площади, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$, относительно оси Ox.

91. Вычислить момент инерции площади эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ относительно его большой оси.

92. Вычислить массу квадратной пластинки со стороной a, плотность которой в любой точке пропорциональна квадрату расстояния этой точки от одной из вершин квадрата.

93. Вычислить массу круглой пластинки радиуса r, если плотность ее обратно пропорциональна расстоянию точки от центра и равна δ на краю пластинки.

94. Вычислить статический момент пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $|OA|=a$, $|OB|=b$, относительно катета OA, если плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета OA.

§ 7. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в ограниченной замкнутой пространственной области T. Разобьем область T произвольным образом на n элементарных областей $T_1, T_2, \ldots, T_n$ с диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. В каждой элементарной области возьмем произвольную точку $P_k(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ и умножим значение функции в точке P_k на объем этой области.

Интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по области T называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V_k$.

Предел интегральной суммы при стремлении к нулю наибольшего из диаметров всех элементарных областей ΔV_k называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается следующим образом:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta V_k.$$

Конечный предел такого вида может существовать только для ограниченной функции.

Если $f(x, y, z) > 0$ в области T, то тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dV$ представляет собой *массу* тела, занимающего область T и имеющего переменную плотность $\gamma=f(x, y, z)$ (физическое истолкование тройного интеграла).

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

В декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде $\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

Пусть область интегрирования T определяется неравенствами $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, $z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — непрерывные функции. Тогда тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$, распространенный на область T, вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Если при вычислении тройного интеграла требуется перейти от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, где функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$,

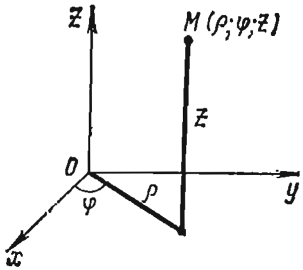

Рис. 17

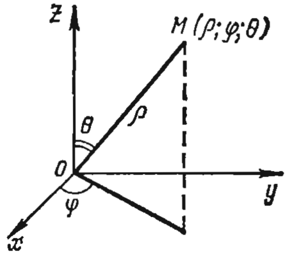

Рис. 18

$z(u, v, w)$, непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка, устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области T пространства $Oxyz$ и точками некоторой области T' пространства $Ouvw$ и якобиан J в области T' не обращается в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то пользуются формулой

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_{T'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J|\,du\,dv\,dw.$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к *цилиндрическим координатам* ρ, φ, z (рис. 17), связанным с x, y, z соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z \quad (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < +\infty),$$

якобиан преобразования $J=\rho$ *и формула преобразования тройного интеграла к цилиндрическим координатам* имеет вид

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho\,d\rho\int\limits_{z_1}^{z_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$$

При переходе от декартовых координат x, y, z к *сферическим координатам* ρ, φ, θ (рис. 18), связанным с x, y, z соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta\quad (0\leqslant\rho\leqslant+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$, и *формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам* имеет вид

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_T f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,d\rho.$$

95. Вычислить $I=\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, где область T определяется неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1/2,\ x\leqslant y\leqslant 2x,\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$\triangle\quad I=\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x} dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x} z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2} dx\int\limits_x^{2x}(1-x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left[y-yx^2-\frac{1}{3}y^3\right]_x^{2x} dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left(2x-2x^3-\frac{8}{3}x^3-x+x^3+\frac{1}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{1/2}\left(x-\frac{10}{3}x^3\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{6}x^4\right]_0^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{7}{192}.\ \blacktriangle$$

96. Вычислить $I=\iiint\limits_T x^2yz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z-2=0$.

$\triangle$ Область T ограничена сверху плоскостью $z=2-x-y$, а снизу — плоскостью $z=0$. Проекцией тела на плоскость xOy служит треугольник, образованный прямыми $x=0$, $y=0$, $y=2-x$. Следовательно,

$$I=\int_0^2 x^2\,dx \int_0^{2-x} y\,dy \int_0^{2-x-y} z\,dz = \int_0^2 x^2\,dx \int_0^{2-x} y\,\frac{(2-x-y)^2}{2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2\left[\frac{(2-x)^4}{2}+\frac{(2-x)^4}{4}-\frac{2(2-x)^4}{3}\right]dx=\frac{1}{24}\int_0^2 x^2(2-x)^4\,dx=\frac{16}{315}. \blacktriangle$$

97. Вычислить $I=\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, где T — верхняя половина эллипсоида $x^2/9+y^2/4+z^2\leqslant 1$.

$\triangle$ Проекцией тела на плоскость xOy является эллипс $x^2/9+y^2/4\leqslant 1$. Поэтому

$$I=\int_{-3}^{3} dx \int_{-(2/3)\sqrt{9-x^2}}^{(2/3)\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2/9-y^2/4}} z\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} dx \int_{-(2/3)\sqrt{9-x^2}}^{(2/3)\sqrt{9-x^2}} \left(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\left[\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdot\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{16}{27}(9-x^2)^{3/2}\right]dx=$$

$$=\frac{4}{81}\int_{-3}^{3}(9-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{8}{81}\int_0^3 (9-x^2)^{3/2}\,dx=\frac{8}{81}\int_0^{\pi/2} 81\cos^4 t\,dt=$$

$$=8\int_0^{\pi/2}\frac{(1+\cos 2t)^2}{4}\,dt=2\left[t+\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi/2}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

(при интегрировании сделана подстановка $x=3\sin t$, $dx=3\cos t\,dt$). $\blacktriangle$

98. Вычислить $I=\iiint\limits_T x^2\,dx\,dy\,dz$, если T — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

$\triangle$ Перейдем к сферическим координатам. В области T координаты ρ, φ и θ изменяются так: $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Следовательно,

$$I=\iiint\limits_T \rho^4\sin^3\theta\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^R\rho^4\,d\rho=$$

$$=\frac{R^5}{5\cdot 2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi R^5}{5}\int_0^{\pi}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=\frac{4\pi R^5}{15}. \blacktriangle$$

99. Вычислить $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена цилиндром $x^2+y^2=2x$ и плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=a$.

△ Перейдем к цилиндрическим координатам. Уравнение цилиндра в этих координатах примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$, или $\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2\rho\cos\varphi$, т. е. $\rho=2\cos\varphi$. Следовательно, в области T координаты ρ, φ и z изменяются так: $0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$, $0\leqslant z\leqslant a$. Поэтому

$$\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T z\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho\int\limits_0^a z\,dz=\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi=\frac{4}{3}a^2\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi/2}=\frac{8}{9}a^2. \ \blacktriangle$$

100. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$.

△ Введем сферические координаты; новые переменные изменяются в пределах $0\leqslant\rho\leqslant r$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. Таким образом,

$$\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T \rho^4\sin^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\theta-1)\,d(\cos\theta)=$$

$$=2\pi\int\limits_0^r\rho^4\,d\rho\left[\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi r^5. \ \blacktriangle$$

101. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, если область T — прямоугольный параллелепипед, определенный неравенствами $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

102. Вычислить $\iiint\limits_T xyz\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$.

103. Вычислить $\iiint\limits_T xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

104. Вычислить $\iiint\limits_T (2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, если область T — трехгранная призма, ограниченная плоскостями $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

105. Вычислить $\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена конической поверхностью $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$.

106. Вычислить $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=3$ и $x+z=2$.

107. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y+z^2)^3\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена цилиндром $x^2+z^2=1$ и плоскостями $y=0$, $y=1$.

108. Вычислить $\iiint\limits_T (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, где область T — общая часть параболоида $z\geqslant(x^2+y^2)/(2a)$ и шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

109. Вычислить $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $z=(x^2+y^2)/2$, $z=2$.

110. Вычислить $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$, где область T — шар x^2+y^2+ $+z^2\leqslant r^2$.

111. Вычислить $\iiint\limits_T \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$, если T — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Объем тела, занимающего область T, определяется по формуле

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz.$$

Если плотность тела переменная, т. е. $\gamma=\gamma(x,\ y,\ z)$, то *масса* тела, занимающего область T, вычисляется по формуле

$$M=\iiint\limits_T \gamma(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

Координаты центра тяжести тела определяются по формулам

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma x\,dx\,dy\,dz,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma y\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_T \gamma z\,dx\,dy\,dz.$$

При $\gamma=1$ имеем

$$\bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz;\ \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz;\ \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz$$

($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты геометрического центра тяжести).

Моменты инерции (геометрические) относительно осей координат соответственно равны

$$I_x=\iiint\limits_T (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y=\iiint\limits_T (z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

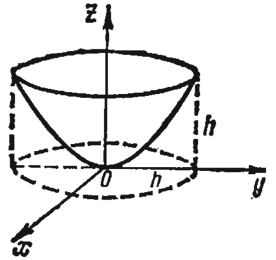

Рис. 19

112. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $hz=x^2+y^2$, $z=h$ (рис. 19).

△ Данное тело ограничено снизу параболоидом $z=(x^2+y^2)/h$, сверху плоскостью $z=h$ и проецируется в круг $x^2+y^2\leqslant h^2$ плоскости xOy. Используем цилиндрические координаты, в которых уравнение параболоида примет вид $z=\rho^2/h$. Объем тела равен

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\iiint\limits_T \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^h \rho\,d\rho\int\limits_{\rho^2/h}^{h} dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^h\left(h-\frac{\rho^2}{h}\right)\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{h\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4h}\right]_0^h d\varphi=\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{4}\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi h^3}{2}. \ ▲$$

113. Найти координаты центра тяжести призматического тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $z=0$, $y=1$, $y=3$, $x+2z=3$.

△ Найдем объем рассматриваемого тела:

$$V=\iiint\limits_T dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3\frac{3-x}{2}\,dy=$$

$$=\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\left[3x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}.$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_1^3\frac{3-x}{2}\,dy=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 x(3-x)\,dx=\frac{2}{9}\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1;$$

$$\bar{y}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y\,dy\int\limits_0^{(3-x)/2} dz=$$

$$=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 y(3-x)\,dy=\frac{4}{9}\int\limits_0^3 (3-x)\,dx=\frac{4}{9}\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_0^3=2;$$

$$\bar{z}=\frac{2}{9}\iiint\limits_T z\,dx\,dy\,dz=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 dx\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^{(3-x)/2} z\,dz=$$

$$=\frac{2}{9}\int\limits_0^3 \frac{(3-x)^2}{8}\,dx\int\limits_1^3 dy=\frac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3=\frac{1}{2}.\ \blacktriangle$$

114. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

115. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$, цилиндрической поверхностью $x=(x^2+y^2)/2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=4$ (внутри цилиндра).

116. Найти массу куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$, если плотность в точке $(x;\ y;\ z)$ есть $\gamma(x,\ y,\ z)=x+y+z$.

117. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x+y=1$, $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

118. Найти координаты центра тяжести, ограниченного поверхностями $z^2=xy$, $x=5$, $y=5$, $z=0$.

119. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного плоскостями $2x+3y-12=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ и цилиндрической поверхностью $z=y^2/2$.

120. Найти момент инерции куба $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant a$ относительно его ребра.

§ 9. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda)=\int\limits_a^b f(x,\ \lambda)\,dx, \tag{1}$$

в котором λ — переменный параметр, а функция $f(x,\ \lambda)$ двух переменных определена для всех значений x в промежутке $[a,\ b]$ и всех значений λ во множестве $\{\lambda\}$. При этих условиях интеграл (1) является функцией параметра λ.

Большое значение имеет вопрос о производной функции $I(\lambda)$ по параметру λ. Пусть функция $f(x,\ \lambda)$ и частная производная $\frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}$ непрерывны в прямоугольнике $a\leqslant x\leqslant b$, $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$. В этом случае существует производная

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\int\limits_a^b f(x,\ \lambda)\,dx=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}\,dx. \tag{2}$$

Если допустима перестановка знаков производной (по λ) и интеграла (по x), то говорят, что функцию (1) можно *дифференцировать по параметру под знаком интеграла*. В формуле (2) предполагается, что пределы интегрирования a и b не зависят от параметра λ. Если же a и b зависят от λ, то

$$\frac{dI(\lambda)}{d\lambda}=\int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} \frac{\partial f(x,\ \lambda)}{\partial\lambda}\,dx+b'(\lambda)\,f[b(\lambda),\ \lambda]-a'(\lambda)\,f[a(\lambda),\ \lambda]. \tag{3}$$

Пусть функция $f(x, \lambda)$ задана для всех значений $x \geqslant a$ и всех значений λ в некоторой области D, причем при каждом λ в этой области существует интеграл

$$I(\lambda) = \int_a^\infty f(x, \lambda)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x, \lambda)\, dx.$$

Если этот интеграл стремится к $I(\lambda)$ равномерно относительно λ в области D, то интеграл $I(\lambda)$ называют *равномерно сходящимся* относительно λ для указанных значений параметра.

Из этого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящее от λ число $b_0 \geqslant a$, что как только $b \geqslant b_0$ неравенство

$$\left| \int_a^\infty f(x, \lambda)\, dx - \int_a^b f(x, \lambda)\, dx \right| = \left| \int_b^\infty f(x, \lambda)\, dx \right| < \varepsilon$$

будет выполнено для всех значений λ в области D.

Для дифференцирования по параметру несобственного интеграла $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ с бесконечным пределом необходимо, чтобы интегралы $\int_0^\infty f(x, \lambda)\, dx$ и $\int_0^\infty \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx$ существовали при $0 < \lambda < \infty$.

Формула интегрирования по параметру λ определенного интеграла (1) под знаком интеграла в промежутке $[\alpha, \beta]$ имеет вид

$$\int_\alpha^\beta I(\lambda)\, d\lambda = \int_\alpha^\beta d\lambda \int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, \lambda)\, d\lambda. \quad (4)$$

Подынтегральная функция $f(x, \lambda)$ должна быть непрерывной функцией двух переменных в конечной области интегрирования. В случае бесконечной области интегрирования получится несобственный кратный интеграл.

Подробное изложение условий применения формул дифференцирования и интегрирования несобственных интегралов по параметру можно найти в «Курсе высшей математики» В. И. Смирнова (том II).

121. Найти $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\, dx$, где m и n — положительные целые числа.

△ Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1};$$

здесь $f(x, m) = x^m$ — непрерывная функция в интервале $0 < x < 1$ при $m > 0$. Найдем производную этого интеграла по m:

$$\frac{d}{dm} \int_0^1 x^m\, dx = \int_0^1 x^m \ln x\, dx = -\frac{1}{(m+1)^2}.$$

Продифференцировав по m еще раз, получим

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^2\,dx = \frac{2!}{(m+1)^3}.$$

После n-кратного дифференцирования по m находим

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \blacktriangle$$

122. Найти $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}}$, где n — целое положительное число, а $\lambda > 0$.

$\triangle$ Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\lambda}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lambda^{1/2}}.$$

Дифференцируя по параметру λ, имеем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^{3/2}}.$$

В результате n-кратного дифференцирования получим

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\lambda)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} \cdot \frac{\pi}{2\lambda^n \cdot \sqrt{\lambda}}. \blacktriangle$$

123. Найти $I(k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx$ и $I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx$.

$\triangle$ Дифференцируя интеграл I по λ, находим

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_0^\infty e^{-kx} \cos \lambda x\,dx = \left[\frac{e^{-kx}}{k^2+\lambda^2}(\lambda \sin \lambda x - k \cos \lambda x)\right]_0^\infty = \frac{k}{k^2+\lambda^2}.$$

Теперь из уравнения $\frac{dI}{d\lambda} = \frac{k}{k^2+\lambda^2}$ можно найти I; имеем

$$I(k, \lambda) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k}.$$

Интеграл $I_1(\lambda)$ найдем, подставив в выражение для $I(k, \lambda)$ значение $k=0$:

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx = \lim_{k \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{k} = \begin{cases} -\pi/2 & \text{при } \lambda < 0, \\ 0 & \text{при } \lambda = 0, \\ \pi/2 & \text{при } \lambda > 0. \end{cases}$$

График функции $I_1(\lambda)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx$ состоит из двух полупрямых и точки O (рис. 20). ▲

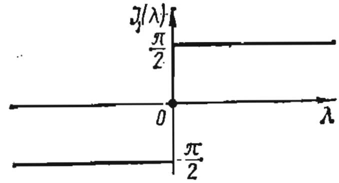

Рис. 20

124. Найти $I=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\,dx$.

△ Дифференцируя по параметру λ, имеем

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}, \text{ т. е. } \frac{dI}{d\lambda}=\frac{1}{\lambda}, \quad I=\ln\lambda. \ ▲$$

125. Вычислить $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ *(интеграл Эйлера—Пуассона).*

△ Положим $x=\lambda t$, где $\lambda>0$; тогда $dx=\lambda\,dt$ и $I=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2t^2}\,dt$. Умножим обе части последнего равенства на $e^{-\lambda^2}\,d\lambda$ и, используя формулу (4), проинтегрируем по λ от 0 до ∞:

$$I\cdot\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda=I^2=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2t^2}\,dt.$$

Изменив порядок интегрирования, получим

$$I^2=\int\limits_0^\infty dt\int\limits_0^\infty e^{-(1+t^2)\lambda^2}\cdot\lambda\,d\lambda=\int\limits_0^\infty\left[-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)\lambda^2}\right]_0^\infty dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{4}, \text{ т. е. } I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \ ▲$$

126. Найти $I(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\,dx$.

△ Дифференцируя по параметру λ, имеем

$$\frac{dI}{d\lambda}=-2\int\limits_0^\infty e^{-x^2-\lambda^2/x^2}\lambda\cdot\frac{dx}{x^2}.$$

Произведем замену переменной интегрирования: $\lambda/x=z$, $(-\lambda/x^2)\,dx=dz$, $x^2=\lambda^2/z^2$; при этом z изменяется от ∞ до 0. Таким образом,

$$\frac{dI}{d\lambda}=2\int\limits_\infty^0 e^{-\lambda^2/z^2-z^2}\,dz=-2\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2/z^2-z^2}\,dz, \text{ или } \frac{dI}{d\lambda}=-2I.$$

Следовательно, $\frac{dI}{I}=-2d\lambda$, $\ln I=-2\lambda+\ln C$, $I=Ce^{-2\lambda}$. Для нахождения C положим $\lambda=0$; тогда $I(0)=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}/2$ (интеграл Эйлера—Пуассона), т. е. $C=\sqrt{\pi}/2$.

Итак, искомый интеграл $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\lambda}$.

127. Найти $I=\int\limits_0^\lambda \frac{\ln(1+\lambda x)}{1+x^2}\,dx$.

△ Найдем полную производную $\frac{dI}{d\lambda}$ по формуле (3):

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int\limits_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx+\frac{\ln(1+\lambda\cdot\lambda)}{1+\lambda^2}\cdot\frac{d\lambda}{d\lambda},$$

или

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}+\int\limits_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx.$$

Подынтегральную дробь разложим на простейшие дроби и проинтегрируем:

$$\int\limits_0^\lambda \frac{x}{(1+\lambda x)(1+x^2)}\,dx=\int\limits_0^\lambda \frac{-\lambda\,dx}{(1+\lambda^2)(1+\lambda x)}+\int\limits_0^\lambda \frac{x+\lambda}{(1+\lambda^2)(1+x^2)}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\ln(1+\lambda x)+\frac{1}{2(1+\lambda^2)}\ln(1+x^2)+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}x\right]_0^\lambda=$$

$$=-\frac{\ln(1+\lambda)^2}{1+\lambda^2}+\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

Таким образом,

$$\frac{dI}{d\lambda}=\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda.$$

Отсюда

$$I=\int\limits_0^\lambda\left[\frac{\ln(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\operatorname{arctg}\lambda\right]d\lambda.$$

Обозначив $\lambda=\operatorname{tg}\varphi$, получим

$$I=\int\limits_0^\varphi \frac{\ln\sec^2\varphi}{2\sec^2\varphi}\sec^2\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sec^2\varphi}\cdot\varphi\sec^2\varphi\,d\varphi=-\int\limits_0^\varphi \ln\cos\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^\varphi \varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi.$$

Взяв первый интеграл по частям, находим

$$I=-\varphi\ln\cos\varphi\Big|_0^\varphi-\int\limits_0^\varphi \varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi+\int\limits_0^\varphi \varphi\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi=-\varphi\ln\cos\varphi,$$

или окончательно

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\lambda\cdot\ln(1+\lambda^2). \blacktriangle$$

Найти интегралы:

128. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\sin x)}{\sin x}\,dx.$ **129.** $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg}\lambda x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

130. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(\lambda\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$ **131.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\ln(1+\sin\alpha\cos x)\frac{dx}{\cos x}.$

132. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\,dx.$ **133.** $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\lambda x}{x(1+x^2)}\,dx.$

134. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{x^{\lambda}-x^{\mu}}{\ln x}\,dx;\quad \lambda>0,\quad \mu>0.$

135. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx;\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

136. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\ln(1-\lambda^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx;\quad \lambda^2<1.$

§ 10. ГАММА-ФУНКЦИЯ. БЕТА-ФУНКЦИЯ

1. Гамма-функция. *Гамма-функцией* (или *интегралом Эйлера второго рода*) называется интеграл вида

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{1}$$

Интеграл (1) — функция параметра p — является несобственным, так как верхний предел равен бесконечности и, кроме того, при $x\to 0$ и $p<1$ подынтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл (1) сходится при $p>0$ и расходится при $p\leqslant 0$. Гамма-функция является одной из важнейших (после элементарных) функций для анализа и его приложений.

Основные свойства гамма-функции

1°. Функция $\Gamma(p)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\Gamma'(p)$ для $p>0$.

2°. Имеет место равенство

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p). \tag{2}$$

3°. После n-кратного применения формулы (2) получается соотношение

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\dots(p+1)p\cdot\Gamma(p). \tag{3}$$

4°. Если в формуле (3) положить $p=1$ и учесть, что $\Gamma(1)=\int\limits_0^{\infty}e^{-x}\,dx=1$, то получится равенство

$$\Gamma(n+1)=n!. \tag{4}$$

Если $n=0$, то $0!=\Gamma(1)=1$.

5^0. Функция $\Gamma(p)$ дает возможность распространить понятие факториала $n!$, определенного лишь для натуральных значений n, на область любых положительных значений аргумента. Из формулы (2) следует, что если $p\longrightarrow 0$, то $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}\longrightarrow+\infty$, т. е. $\Gamma(0)=+\infty$.

6^0. При $p=-n$ из формулы (2) следует, что

$$\Gamma(-n)=\frac{\Gamma(-n+1)}{-n}=\frac{\Gamma(-n+2)}{n(n-1)}=-\frac{\Gamma(-n+3)}{n(n-1)(n-2)}=$$
$$=\ldots=(-1)^n\frac{\Gamma(0)}{n!}=(-1)^n\cdot\infty,$$

т. е. $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty\quad(n=1, 2, 3, \ldots)$.

7^0. Вообще, функцию $\Gamma(p)$ можно распространить на случай отрицательных значений аргумента p. Так как $\Gamma(p)=\dfrac{\Gamma(p+1)}{p}$, то $\Gamma(p+1)$ имеет смысл при $-1<p<0$.

Если $-n<p<-(n-1)$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}.$$

С помощью подстановки $p+n=\alpha$, откуда $p=-n+\alpha$, последняя формула преобразуется к виду

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} \tag{5}$$

и для $-n<p<-(n-1)$ знак $\Gamma(p)$ определяется множителем $(-1)^n$.

8^0. Используя формулу (2), можно получить значения $\Gamma(p)$ для полуцелого аргумента:

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left[1+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right]=\left(m-\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(m-\frac{3}{2}\right)=\ldots$$
$$\ldots=\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots5\cdot3\cdot1}{2^m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

или

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!2^{2m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

9^0. Имеет место *формула дополнения*

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad(0<p<1). \tag{7}$$

Если в этой формуле положить $p=1/2$, то $[\Gamma(1/2)]^2=\pi/\sin(\pi/2)=\pi$, т. е. $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

Пользуясь основными свойствами, можно вычислить $\Gamma(p)$ для любого p. Значения гамма-функции приведены в табл. I на с. 409.

График функции $\Gamma(p)$ изображен на рис. 21.

137. Вычислить интеграл Эйлера—Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

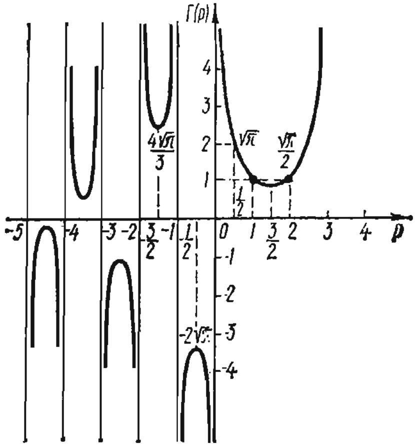

Рис. 21

△ Произведем подстановку $x^2=t$, откуда $x=\sqrt{t}$, $dx=dt/(2\sqrt{t})$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{1/2-1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad ▲$$

138. Вычислить $\Gamma(-1/2)$.

△ Пользуясь формулой $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, получим

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(-1/2+1)}{(-1/2)}=\frac{\Gamma(1/2)}{(-1/2)}=-2\sqrt{\pi}. \quad ▲$$

139. Вычислить $\Gamma(-9/2)$.

△ Используя формулу (5) при $\alpha=1/2$ и $n=5$, получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-5\right)=\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{(-1)^5\cdot\Gamma(1/2)}{(1-1/2)(2-1/2)\ldots(5-1/2)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{\pi}}{(1/2)\cdot(3/2)\cdot(5/2)\cdot(7/2)\cdot(9/2)}=-\frac{32\sqrt{\pi}}{945}. \quad ▲$$

140. Вычислить $\Gamma(5/2)$.

△ Полагая $m=2$ в формуле (6), имеем

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4!\,\Gamma(1/2)}{2!\cdot 2^4}=\frac{24\sqrt{\pi}}{2\cdot 16}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

141. Вычислить $\Gamma(-4/3)$.

△ Используя соотношение $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, имеем

$$\Gamma\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{\Gamma(4/3+1)}{-4/3}=\frac{\Gamma(-1/3)}{-4/3}=\frac{\Gamma(-1/3+1)}{(-4/3)\cdot(-1/3)}=\frac{9}{4}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{\Gamma(5/3)}{2/3}=\frac{27}{8}\Gamma.$$

Из табл. I на с. 409 находим $\Gamma(5/3)=0{,}9033$; следовательно, $\Gamma(-4/3)=$ $=(27/8)\cdot 0{,}9033=3{,}0486$. ▲

142. Вычислить: 1) $(-1/2)!$; 2) $(1/2)!$; 3) $(3/2)!$; 4) $(0{,}21)!$

△ По формуле (4) находим:
1) $(-1/2)! = \Gamma(-1/2+1) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = 1{,}772$;
2) $(1/2)! = \Gamma(1/2+1) = \Gamma(3/2) = (1/2)\,\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2 = 0{,}886$;
3) $(3/2)! = \Gamma(3/2+1) = (3/2)\,\Gamma(3/2) = (3/2)\cdot(1/2)\,\Gamma(1/2) = 3\sqrt{\pi}/4 = 1{,}329$;
4) $(0{,}21)! = \Gamma(0{,}21+1) = \Gamma(1{,}21) = 0{,}9156$ (из табл. I). ▲

143. Вычислить $\Gamma(5/3)\cdot\Gamma(-5/3)$.

△ Находим

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\Gamma(-2/3)}{-5/3} =$$

$$= \frac{2}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\Gamma(1/3)}{(-5/3)(-2/3)} = \frac{3}{5}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right).$$

Так как по формуле дополнения $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, то

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{5}. \ ▲$$

144. Показать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right) = \frac{\pi}{\cos p\pi}$.

△ Полагая в формуле (7) $p = \omega + 1/2$, получим

$$\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left[1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sin(\pi/2+\omega\pi)},$$

или

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right) = \frac{\pi}{\cos\omega\pi}. \ ▲$$

Вычислить:

145. $\Gamma(0{,}8)$. **146.** $\Gamma(-2{,}1)$. **147.** $\Gamma(3{,}2)$. **148.** $\Gamma(7/2)$.
149. $(-1/4)!$. **150.** $(1/3)!$. **151.** $(-2)!$.
152. $\Gamma(7/3)\cdot\Gamma(-7/3)$. **153.** $\Gamma(10/3)\cdot\Gamma(-10/3)$.
154. $\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(-1/4)$. **155.** $\Gamma(5/4)\cdot\Gamma(-5/4)$.
156. Показать, что $\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^m}{(2m-1)!!}\sqrt{\pi}$.
157. Показать, что $\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = (-1)^m\pi$ $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

2. Бета-функция. *Бета-функцией* (или *интегралом Эйлера первого рода*) называется интеграл

$$B(p,\ q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (1)$$

Интеграл (1) есть функция двух параметров p и q; он сходится при $p > 0$, $q > 0$.

Функция B является симметричной относительно параметров, т. е. $B(p, q) = B(q,\ p)$.

Если сделать замену переменной интегрирования, полагая $x = \sin^2 t$, $dx = 2\sin t\cos t\,dt$, причем t изменяется от 0 до $\pi/2$, то формула (1) примет вид

$$B(p,\ q) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}t\,dt,$$

или

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)\ (m > 0,\ n > 0). \qquad (2)$$

К интегралам (1) и (2) приводятся многие интегралы, встречающиеся в прикладных задачах.

Для вычисления значений бета-функции пользуются следующей зависимостью между бета- и гамма-функцией:

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (3)$$

Если $q = 1-p$, то $\mathrm{B}(p,\ 1-p) = \dfrac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ $(0 < p < 1)$.

Используя бета-функцию, легко найти значение $\Gamma(1/2)$. Пусть $p = q = 1/2$; тогда $\mathrm{B}(1/2,\ 1/2) = \dfrac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1)}$. Так как $\mathrm{B}(1/2,\ 1/2) = \mathrm{B}(1/2,\ 1-1/2) = \pi/\sin(\pi/2) = \pi$, а $\Gamma(1) = 1$, то $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

158. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^8 x\,dx$.

△ Используя формулу (2) при $m = 6$ и $n = 8$, получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^8 x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{7}{9},\ \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(7/12)\,\Gamma(9/2)}{\Gamma(8)} = \frac{5\pi}{2^{12}}$$

(значения $\Gamma(7/2)$ и $\Gamma(9/2)$ вычислены по формуле (6) п. 1 при $m = 3$ и $m = 4$, а $\Gamma(8) = 7!$). ▲

159. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dt}{\sqrt{3-\cos t}}$.

△ Положим $\cos t = 1 - 2\sqrt{u}$; тогда $dt = \dfrac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$, $\sqrt{3-\cos t} = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, причем t изменяется от 0 до 1. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^{1} u^{-3/4}\,(1-u)^{-1/2}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{[\Gamma(1/4)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}.$$

Так как $\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}$, а $\Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{\Gamma(1{,}25)}{1/4} = 4\cdot 0{,}9064 = 3{,}6256$, то

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{3-\cos t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(3{,}6256)^2}{\pi\sqrt{2}} = \frac{(3{,}6256)^2}{4\sqrt{\pi}} = 1{,}8545.\ ▲$$

160. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}$.

△ Перепишем данный интеграл в виде $\int\limits_0^1 (1-x^{2/5})^{-1/2}\,dx$. Воспользуемся подстановкой $x^{2/5}=t$; тогда $x=t^{5/2}$, $dx=(5/2)\,t^{3/2}\,dt$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}}}=\frac{5}{2}\int\limits_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\,dt=$$

$$=\frac{5}{2}\,B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\,\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}=\frac{15\pi}{16}. \ ▲$$

161. Доказать, что если $I_1=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ и $I_2=\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, то $I_1 I_2=\frac{\pi}{4}$.

△ *Положим $x^4=t$, откуда $dx=(1/4)\,t^{1/4-1}\,dt$. Тогда получим*

$$I_1=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)};$$

$$I_2=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 t^{3/4-1}(1-t)^{-1/2}\,dt=\frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma(3/4)\cdot\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)}=\frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)},$$

так как $\Gamma(5/4)=(1/4)\,\Gamma(1/4)$. Следовательно,

$$I_1 I_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(1/4)\cdot\Gamma(3/4)\cdot[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}=\frac{1}{4}\,(\sqrt{\pi})^2=\frac{\pi}{4}. \ ▲$$

Вычислить:

162. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^5 x\,dx$. **163.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$.

164. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^5 4x\cos^4 2x\,dx$. **165.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\cos^4 x\,dx$.

166. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}}$; $a>0$. **167.** $\int\limits_0^a x^{2n}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; $a>0$.

● Подстановка $x^a=t$. ● Подстановка $x^2/a^2=t$.

168. $\int\limits_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}\,dx$. **169.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx=\frac{\pi}{b\sin(a\pi/b)}$.

● Подстановка $(1+x^b)/x^b=1/y$.

170. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$; $0 < a < 1$. 171. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x}}$.

● Подстановка $x = u/(1-u)$.

172. $\int\limits_0^\pi \sin^6 x \cos^2(x/2)\, dx$. 173. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

174. $\int\limits_0^1 x^3(1-\sqrt[3]{x})^2\, dx$. 175. $\int\limits_0^1 x^{n-1}(1-x^k)^{m-1}\, dx$; $n > 0$, $m > 0$.

● Подстановка $x = t^3$. ● Подстановка $x^k = t$.

176. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$. 177. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

● Подстановка $\operatorname{tg} x = u^2$.

178. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$. 179. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2n-1} x\, dx$; $0 < n < 1$.

180. Выразить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ через гамма-функцию.

ГЛАВА II

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ДЛИНЕ ДУГИ И ПО КООРДИНАТАМ

1. Криволинейный интеграл по длине дуги (криволинейный интеграл I рода). Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в точках дуги AB гладкой кривой K.

Разобьем дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг точками $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$; пусть Δs_k — длина дуги $A_{k-1}A_k$. На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку $M_k(\xi_k; \eta_k)$ и умножим значение функции $f(\xi_k, \eta_k)$ в этой точке на длину Δs_k соответствующей дуги.

Интегральной суммой для функции $f(x, y)$ *по длине дуги* AB называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$.

Криволинейным интегралом по длине дуги AB от функции $f(x, y)$ (или *криволинейным интегралом* I *рода*) называется предел интегральной суммы при условии, что $\max \Delta s_k \longrightarrow 0$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k$$

(ds — дифференциал дуги).

Криволинейный интеграл I рода в случае, если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, вычисляется по формулам

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} f[x, \varphi(x)]\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\, dx,$$

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_{a}^{b} \frac{f(x, \varphi(x))}{|\cos\alpha|}\, dx,$$

где α — угол между касательной к кривой и осью Ox.

Если кривая K задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$\int\limits_{K} f(x, y)\, ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\, dt.$$

Аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл I рода от функции трех переменных $f(x, y, z)$ по пространственной кривой. Если пространственная кривая задана уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$\int\limits_{K} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\, dt.$$

Если $f(x, y) > 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_K f(x, y)\,ds$ представляет собой *массу кривой* K, имеющей переменную линейную плотность $\gamma = f(x, y)$ (физическое истолкование).

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то криволинейный интеграл I рода $\int\limits_K f(x, y)\,dS$ численно равен *площади части цилиндрической поверхности*, у которой направляющая K лежит в плоскости xOy, а образующие перпендикулярны ей; эта цилиндрическая поверхность ограничена сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу плоскостью xOy (геометрическое истолкование).

Основные свойства криволинейного интеграла I рода

1°. *Криволинейный интеграл* I *рода не зависит от направления пути интегрирования:*

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\,ds = \int\limits_{BA} f(x, y)\,ds.$$

2°. $\int\limits_K [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\,ds = \int\limits_K f_1(x, y)\,ds \pm \int\limits_K f_2(x, y)\,ds.$

3°. $\int\limits_K cf(x, y)\,ds = c\int\limits_K f(x, y)\,ds$, где $c = \text{const}$.

4°. *Если контур интегрирования* K *разбит на две части* K_1 *и* K_2, *то*

$$\int\limits_K f(x, y)\,ds = \int\limits_{K_1} f(x, y)\,ds + \int\limits_{K_2} f(x, y)\,ds.$$

2. Криволинейный интеграл по координатам (криволинейный интеграл II рода). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в точках дуги AB гладкой кривой K, имеющей уравнение $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Интегральной суммой для функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ *по координатам* называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k],$$

где Δx_k и Δy_k — проекции элементарной дуги на оси Ox и Oy.

Криволинейным интегралом по координатам (или *криволинейным интегралом* II рода) от выражения $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ по направленной дуге AB называется предел интегральной суммы при условии, что $\max \Delta x_k \to 0$ и $\max \Delta y_k \to 0$:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k$$ — *криволинейный интеграл по координате* x;

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \lim_{\max \Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k$$ — *криволинейный интеграл по координате* y;

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy$$ — *полный криволинейный интеграл.*

Криволинейный интеграл II рода есть *работа*, совершаемая переменной силой $\mathbf{F} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ на криволинейном пути AB (механическое истолкование).

1°. *Криволинейный интеграл II рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:*

$$\int\limits_{BA} P\,dx+Q\,dy=-\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy.$$

2°. $\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{AB} P\,dx+\int\limits_{AB} Q\,dy.$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла I рода.

Криволинейный интеграл II рода вычисляется по формуле

$$\int\limits_{K} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int\limits_{a}^{b}\{P[x, \varphi(x)]+\varphi'(x)\,Q[x, \varphi(x)]\}\,dx.$$

Если кривая K задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то

$$\int\limits_{K} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\{P[x(t), y(t)]\,x'(t)+Q[x(t), y(t)]\,y'(t)\}\,dt.$$

Аналогичная формула имеет место для вычисления криволинейного интеграла II рода по пространственной кривой K: если кривая задана уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, то

$$\int\limits_{K} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\{P[x(t), y(t), z(t)]\,x'(t)+Q[x(t), y(t), z(t)]\,y'(t)+$$

$$+R[x(t), y(t), z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

Существование и величина криволинейного интеграла $\oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy$ по замкнутому контуру не зависят от того, какую точку контура выбрать за начало интегрирования.

Если путь интегрирования (C) есть простая замкнутая кривая, то $\oint\limits_{C} P\,dx+Q\,dy$ берется по этому контуру в направлении против хода часовой стрелки (положительное направление).

181. Вычислить $\int\limits_{K}(x-y)\,ds$, где K — отрезок прямой от $A(0;\,0)$ до $B(4;\,3)$.

△ Уравнение прямой AB имеет вид $y=(3/4)\,x$. Находим $y'=3/4$ и, следовательно,

$$\int\limits_{K}(x-y)\,ds=\int\limits_{0}^{4}\left(x-\frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}\,dx=\frac{5}{16}\int\limits_{0}^{4}x\,dx=\frac{5}{32}x^2\Big|_0^4=\frac{5}{2}. \ ▲$$

182. Вычислить $\int\limits_K x^2y\,dy-y^2x\,dx$, если $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

△ Найдем $dx=-\dfrac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\,dt$, $dy=\dfrac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}\,dt$. Тогда

$$\int\limits_K x^2y\,dy-y^2x\,dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos t\sqrt{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}+\sin t\cdot\sqrt{\cos t}\cdot\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}\right)dt=\frac{\pi}{4}.\ ▲$$

183. Найти массу M дуги кривой $x=t$, $y=t^2/2$, $z=t^3/3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, линейная плотность которой меняется по закону $\gamma=\sqrt{2y}$.

△
$$M=\int\limits_K\sqrt{2y}\,ds=\int\limits_0^1\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1 t\cdot\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right).\ ▲$$

184. Найти координаты центра тяжести дуги циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$.

△ Координаты центра тяжести однородной дуги кривой K вычисляются по формулам $\bar{x}=\dfrac{1}{s}\int\limits_K x\,ds$, $\bar{y}=\dfrac{1}{s}\int\limits_K y\,ds$, где s — длина дуги. Имеем

$$s=\int\limits_0^\pi\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int\limits_0^\pi\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=2\int\limits_0^\pi\sin\frac{t}{2}\,dt=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi=4.$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{4}\int\limits_K x\,ds=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi(t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\left(t\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2}+4\sin\frac{t}{2}+\frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\left(4+\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3};$$

$$\bar{y}=\frac{1}{4}\int\limits_K y\,ds=\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi(1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\left(\sin\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\cos t\right)dt=\frac{1}{2}\left[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right]_0^\pi=\frac{4}{3}.\ ▲$$

185. Найти координаты центра тяжести дуги окружности $x^2+y^2=R^2$ $(0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant y\leqslant R)$.

△ Так как по условию задана четверть дуги окружности, то ее длина $s=\pi R/2$. В силу того, что биссектриса I координатного угла является осью симметрии, имеем $\bar{x}=\bar{y}$. Теперь находим

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\int\limits_K x\,ds=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R x\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi R}\int\limits_0^R \frac{x}{y}R\,dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{R^2-x^2}\Big|_0^R=\frac{2R}{\pi}.$$

Итак, $\bar{x}=\bar{y}=2R/\pi$. ▲

Вычислить криволинейные интегралы:

186. $\int\limits_{AB}(x^2-y^2)\,dx+xy\,dy$, если путь от $A(1;\ 1)$ до $B(3;\ 4)$ — отрезок прямой.

187. $\int\limits_K(x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$, если K — ломаная OAB, где $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(4;\ 2)$.

188. $\int\limits_{AB}\frac{y\,ds}{\sqrt{x}}$, если AB — дуга полукубической параболы $y^2=(4/9)x^3$ от $A(3;\ 2\sqrt{3})$ до $B(8;\ 32\sqrt{2}/3)$.

189. $\int\limits_K y\,dx-(y+x^2)\,dy$, если K — дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

190. $\int\limits_K y\,dx+2x\,dy$, если K — пробегаемый против хода часовой стрелки контур ромба, стороны которого лежат на прямых $x/3+y/2=\pm1$, $x/3-y/2=\pm1$.

191. $\int\limits_K 2x\,dy-3y\,dx$, если K — контур треугольника с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(3;\ 1)$, $C(2;\ 5)$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

192. $\int\limits_K\frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, если K — I четверть окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

193. $\int\limits_K x^2y\,dx+x^3\,dy$, если K — контур, ограниченный параболами $y^2=x$, $x^2=y$ и пробегаемый против хода часовой стрелки.

194. Найти массу дуги окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$, если линейная плотность ее в точке $(x;\ y)$ равна y.

195. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $y=\operatorname{ch}x$ $(0\leqslant x\leqslant\ln 2)$.

196. Найти координаты центра тяжести однородной дуги кривой $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty\leqslant t\leqslant 0)$.

197. Вычислить $\int\limits_K\sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где K — окружность $x^2+y^2=ax$.

198. Вычислить $\int\limits_K\frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, где K — первый виток винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

199. Найти массу первого витка винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, если плотность в каждой точке равна радиусу-вектору этой точки.

200. Вычислить $\int\limits_{OA}xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$, где OA — четверть окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

§ 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА ОТ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ. НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ПОЛНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛУ

Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в односвязной области D и контур K целиком находится в этой области.

Тогда *необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла* $\int\limits_K P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ *от контура интегрирования является выполнение в области* D *тождества*

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При соблюдении указанных условий *криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру* C, *содержащемуся в области* D, *равен нулю*:

$$\oint\limits_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0.$$

Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{(x_0;\,y_0)}^{(x_1;\,y_1)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

не зависящего от контура интегрирования $\left(\text{т. е. условие } \frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ выполнено}\right)$, в качестве наивыгоднейшего пути интегрирования следует выбрать ломаную, соединяющую точки $(x_0;\ y_0)$ и $(x_1;\ y_1)$, звенья которой параллельны осям Ox и Oy.

Подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ при указанных условиях является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $U=U(x, y)$, т. е.

$$dU(x, y)=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy.$$

Функцию $U(x, y)$ (первообразную) можно найти, вычисляя соответствующий криволинейный интеграл по ломаной A_0A_1B, где $A_0(x_0;\ y_0)$ — произволь-

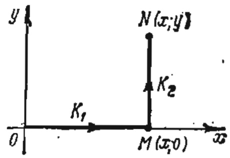

Рис. 22

ная фиксированная точка, $B(x;\ y)$ — переменная точка, а точка A_1 имеет координаты x и y_0. Тогда вдоль A_0A_1 имеем $y=y_0$ и $dy=0$, а вдоль A_1B имеем $x=\text{const}$, $dx=0$. В результате получаем следующую формулу:

$$U(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy+C.$$

Аналогично, интегрируя по ломаной A_0A_2B, где $A_2(x_0;\ y)$, получим

$$U(x,\ y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy+\int_{x_0}^{x} P(x,\ y)\,dx+C.$$

201. Вычислить $I=\int\limits_{(1;\ 1)}^{(2;\ 3)} (x+3y)\,dx+(y+3x)\,dy.$

△ Данный интеграл не зависит от контура интегрирования, так как

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x+3y)=3;\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y+3x)=3,$$

т. е. $\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ (на всей плоскости xOy).

Выбираем в качестве пути интегрирования ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Имеем на первом участке $y=1$, $dy=0$, $1\leqslant x\leqslant 2$, на втором участке $x=2$, $dx=0$, $1\leqslant y\leqslant 3$. Следовательно,

$$I=\int_1^2 (x+3)\,dx+\int_1^3 (y+6)\,dy=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_1^2+\left[\frac{y^2}{2}+6y\right]_1^3=$$
$$=2+6-0{,}5-3+4{,}5+18-0{,}5-6=20{,}5.\ ▲$$

202. Найти первообразную функцию U, если

$$dU=[y+\ln(x+1)]\,dx+(x+1-e^y)\,dy.$$

△ Имеем $P=y+\ln(x+1)$, $Q=x+1-e^y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$. Пусть $x_0=0, y_0=0$ и контуром K является ломаная OMN (рис. 22). Тогда

$$U(x,\ y)=\int_0^x \ln(x+1)\,dx+\int_0^y (x+1-e^y)\,dy=$$
$$=[x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)]_0^x+[xy+y-e^y]_0^y=$$
$$=(x+1)\ln(x+1)-x+xy+y-e^y+1+C.\ ▲$$

203. Найти $U(x,\ y)$, если

$$dU=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy.$$

△ Имеем

$$P=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad Q=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2};\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Здесь в качестве точки $(x_0;\ y_0)$ нельзя взять начало координат, так как при $x=0$ и $y=0$ функции $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ не определены. Поэтому в качестве точки $(x_0;\ y_0)$ возьмем, например, $A_0(1;\ 1)$. Тогда

$$U(x,\ y)=\int_1^x\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int_1^y\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=\ln x+x+2\ln y+\frac{x}{y}-1+C. \ \blacktriangle$$

204. Решить дифференциальное уравнение

$$(4x^3y^3-3y^2+8)\,dx+(3x^4y^2-6xy-1)\,dy=0.$$

$\triangle$ Здесь $P=4x^3y^3-3y^2+8$, $Q=3x^4y^2-6xy-1$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=12x^3y^2-6y$; следовательно, $dU=P\,dx+Q\,dy$, т. е. $U=C$. Пусть $A(0;\ 0)$ и $B(x;\ y)$; тогда

$$U=\int_0^x 8dx+\int_0^y(3x^4y^2-6xy-1)\,dy=C, \text{ т. е. } 8x+x^4y^3-3xy^2-y=C. \ \blacktriangle$$

205. Решить дифференциальное уравнение

$$(2e^{2x}+y+\sin y)\,dx+(e^{3y}+x+x\cos y)\,dy=0.$$

$\triangle$ Имеем $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$, откуда $dU=P\,dx+Q\,dy$, т. е. $U=C$. Пусть $A(0;\ 0)$ и $B(x;\ y)$; тогда

$$U=\int_0^x 2e^{2x}\,dx+\int_0^y(e^{3y}+x+x\cos y)\,dy=C,$$

или

$$e^{2x}+\frac{1}{3}e^{3y}+xy+x\sin y=C. \ \blacktriangle$$

Найти первообразную функцию $U(x,\ y)$ по ее полному дифференциалу:

206. $dU=[e^{x+y}+\cos(x-y)]\,dx+[e^{x+y}-\cos(x-y)+2]\,dy.$
207. $dU=(1-e^{x-y}+\cos x)\,dx+(e^{x-y}+\cos y)\,dy.$
208. $dU=(x^2-2xy^2+3)\,dx+(y^2-2x^2y+3)\,dy.$
209. $dU=(2x-3xy^2+2y)\,dx+(2x-3x^2y+2y)\,dy.$
210. $dU=(\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}y)\,dx+(x\operatorname{sh}y+1)\,dy.$
211. $dU=(\arcsin x-x\ln y)\,dx-\left(\arcsin y+\frac{x^2}{2y}\right)dy.$

Решить дифференциальные уравнения:

212. $(2x\sin y+y\cos x+2x)\,dx+(x^2\cos y+\sin x-\sin y-3y^2)\times$ $\times\,dy=0.$

213. $(2xye^{x^2}+\ln y)\,dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}+e^y\right)dy=0.$

214. Вычислить $\int\limits_{(0;\ 0)}^{(\pi;\ \pi)}(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$ по различным контурам, соединяющим точки $O(0;\ 0)$ и $M(\pi;\ \pi)$; 1) по прямой OM; 2) по кривой $y=x+\sin x$; 3) по ломаной OPM, где $P(\pi;\ 0)$; 4) по параболе $y=x^2/\pi$.

215. Вычислить $\oint\limits_K x\,dy + y\,dx$ по различным замкнутым контурам: 1) по окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$; 2) по контуру, ограниченному дугой параболы $y=x^2$ и отрезком прямой $y=1$.

§ 3. ФОРМУЛА ГРИНА

Если C — граница области D и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в замкнутой области D (включая границу C), то справедлива *формула Грина*

$$\oint\limits_K P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

причем обход контура C выбирается так, что область D остается слева.

216. Применяя формулу Грина, вычислить $I = \oint\limits_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$, если C — контур треугольника с вершинами $L(1;1)$, $M(2;2)$, $N(1;3)$, пробегаемый против хода часовой стрелки. Проверить результат непосредственным интегрированием.

△ Здесь $P(x, y) = 2(x^2+y^2)$, $Q(x, y) = (x+y)^2$. Находим $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y) - 4y = 2(x-y)$. Таким образом,

$$I = \oint\limits_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy = \iint\limits_D 2(x-y)\,dx\,dy,$$

где область D — треугольник LMN. Уравнение прямой LM: $y=x$, уравнение MN: $y=-x+4$. Вычислим двойной интеграл по данной области:

$$I = 2\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{4-x} (x-y)\,dy = 2\int\limits_1^2 \left[xy - \frac{1}{2}y^2\right]_x^{4-x} dx =$$

$$= 2\int\limits_1^2 \left[x(4-x) - \frac{1}{2}(4-x)^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2\right] dx =$$

$$= 4\int\limits_1^2 (4x - x^2 - 4)\,dx = 4\left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_1^2 = -\frac{4}{3}.$$

Вычислим теперь непосредственно криволинейный интеграл по контуру C, состоящему из звеньев LM, MN, NL:

$$I = \int\limits_{LM} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy + \int\limits_{MN} 2(x^2+y^2)\,dx +$$

$$+ (x+y)^2\,dy + \int\limits_{NL} 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy.$$

Уравнение LM: $y=x$; следовательно, $dy=dx$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
Уравнение MN: $y=-x+4$; следовательно, $dy=-dx$, $2 \geqslant y \geqslant 1$.
Уравнение ML: $x=1$; значит, $dx=0$, $3 \geqslant y \geqslant 1$.

Таким образом,

$$I=\int_1^2 [2(x^2+x^2)\,dx+(x+x)^2\,dx]+\int_2^1 \{2[x^2+(4-x)^2]\,dx+(x-x+4)^2(-dx)\}+$$

$$+\int_3^1 (1+y)^2\,dy=8\int_1^2 x^2\,dx+\int_2^1 (4x^2-16x+16)\,dx+\int_3^1 (1+y)^2\,dy=$$

$$=\left[\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+8x^2-16x\right]_1^2+\frac{1}{3}(1+y)^3\Big|_3^1=-\frac{4}{3}. \ \blacktriangle$$

217. Применяя формулу Грина, вычислить $\int\limits_C -x^2y\,dx+xy^2\,dy$, где C — окружность $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

$\triangle$ Здесь $P(x, y)=-x^2y$, $Q(x, y)=xy^2$. Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2$. Следовательно,

$$I=\oint_C -x^2y\,dx+x^2y\,dy=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Введем полярные координаты: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$; значит,

$$I=\iint_D \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R \rho^3\,d\rho=\frac{1}{4}R^4\cdot\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{\pi R^4}{2}. \ \blacktriangle$$

218. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл $I=\oint\limits_C [x+\ln(x^2+y^2)]\,dx+y\ln(x^2+y^2)\,dy$, где контур C ограничивает область D.

219. Применяя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\times$ $\times[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$, где C — контур прямоугольника $1\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 2$.

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ

Площадь S фигуры, ограниченной простым замкнутым контуром C, находится по формуле

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx.$$

Контур интегрирования пробегается так, что ограниченная им область остается слева (положительное направление).

220. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=$ $=x^2$, $x=y^2$, $8xy=1$ (имеется в виду площадь, примыкающая к началу координат; рис. 23).

△ Решая совместно уравнения кривых, найдем $A(1/2;\ 1/4)$, $B(1/4;\ 1/2)$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{AB} x\,dy-y\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{BO} x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1/2} x^2\,dx-\frac{1}{8}\int\limits_{1/2}^{1/4}\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\limits_{1/4}^{0}\sqrt{x}\,dx=\frac{1+3\ln 2}{24}\approx 0{,}13 \text{ (кв. ед.)}. \ ▲$$

221. Вычислить площадь, ограниченную астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, предварительно построив кривую.

△ Для вычисления площади воспользуемся формулой $S=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} x\,dy-y\,dx$, где $dy=3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3a^2\cos^4 t\sin^2 t+3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}a^2\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{8}. \ ▲$$

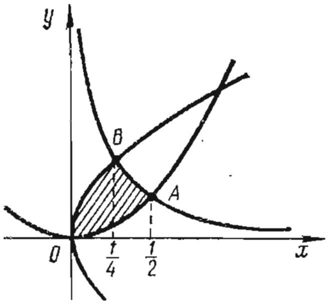

Рис. 23

222. Вычислить площадь, ограниченную параболами $y^2=x$, $x^2=y$.

223. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

224. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A\ (6;\ 1)$, $B\ (4;\ 5)$, $C\ (1;\ 6)$, $D\ (-1;\ 1)$.

225. Вычислить площадь фигуры, ограниченной контуром $OABCO$, если $A\ (1;\ 3)$, $B\ (0;\ 4)$, $C\ (-1;\ 2)$, $O\ (0;\ 0)$, OA, BC, CO — отрезки прямых, а AB — дуга параболы $y=4-x^2$.

226. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой $x=2r\cos t-r\cos 2t$, $y=2r\sin t-r\sin 2t$.

§ 5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $F(x,\ y,\ z)$ — непрерывная функция и $z=f(x,\ y)$ — гладкая поверхность S, где $f(x,\ y)$ задана в некоторой области D плоскости xOy. *Поверхностным интегралом* I *рода* называется предел интегральной суммы при условии, что $\max d_k\to 0$:

$$\lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}F(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta S_k=\iint\limits_{S}F(x,\ y,\ z)\,dS,$$

где ΔS_k — площадь k-го элемента поверхности S, точка $(\xi_k;\ \eta_k;\ \zeta_k)$ принадлежит этому элементу, d_k — диаметр этого элемента, $F(x,\ y,\ z)$ определена в каждой точке поверхности S.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой производится интегрирование.

Поверхностный интеграл I рода вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S F(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D F[x, y, f(x, y)] \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Рассмотрим двустороннюю поверхность S и выберем на ней определенную сторону S^+. Функция $F(x, y, z)$ определена в точках данной поверхности. **Предел интегральной суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\, \Delta\Pi_k(x, y)$, где $\Delta\Pi_k(x, y)$ — проекция на плоскость xOy k-го элемента поверхности S, имеющего площадь ΔS_k, при условии $\max d_k \to 0$ называется *поверхностным интегралом* II *рода*, распространенным на выбранную сторону поверхности S, и обозначается символом $I = \iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\, dx\, dy$.**

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции и S^+ — сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $\mathbf{n}(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$, то соответствующий поверхностный интеграл II рода выражается так:

$$\iint\limits_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет знак на противоположный.

Если поверхность S задана уравнением в неявном виде $\Phi(x, y, z) = 0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{\partial\Phi/\partial x}{\pm\sqrt{(\partial\Phi/\partial x)^2+(\partial\Phi/\partial y)^2+(\partial\Phi/\partial z)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\partial\Phi/\partial y}{\pm\sqrt{(\partial\Phi/\partial x)^2+(\partial\Phi/\partial y)^2+(\partial\Phi/\partial z)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\partial\Phi/\partial z}{\pm\sqrt{(\partial\Phi/\partial x)^2+(\partial\Phi/\partial y)^2+(\partial\Phi/\partial z)^2}},$$

где знак перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности.

Моменты инерции части поверхности относительно осей координат выражаются поверхностными интегралами:

$$I_{Ox} = \iint\limits_S (y^2+z^2)\, dS, \quad I_{Oy} = \iint\limits_S (x^2+z^2)\, dS, \quad I_{Oz} = \iint\limits_S (x^2+y^2)\, dS.$$

Координаты центра тяжести части поверхности можно найти по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\iint\limits_S x\, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{S}\iint\limits_S y\, dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{S}\iint\limits_S z\, dS,$$

где S — площадь данной части поверхности.

Масса материальной поверхности выражается формулой

$$m = \iint\limits_S \gamma\, dS,$$

где γ — поверхностная плотность.

Статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей определяются по формулам

$$M_{xy} = \iint\limits_S z\gamma\, dS, \quad M_{yz} = \iint\limits_S x\gamma\, dS, \quad M_{zx} = \iint\limits_S y\gamma\, dS.$$

227. Вычислить $I=\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где S — часть конической поверхности $z^2=x^2+y^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

△ Имеем

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$
$$=\sqrt{2}\cdot dx\,dy.$$

Тогда искомый интеграл преобразуется в двойной интеграл:

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\cdot\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Областью интегрирования D является круг $x^2+y^2\leqslant 1$; поэтому

$$I=\sqrt{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta\int\limits_0^1 \rho^3 d\rho=\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.\ ▲$$

228. Вычислить интеграл $I=\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$ по верхней стороне верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

△ Проекцией сферы на плоскость xOy является круг D, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$. Уравнение верхней полусферы имеет вид $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$; следовательно, $I=\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,xy$. Переходя к полярным координатам, получим

$$I=\iint\limits_D \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\,d\theta=4\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int\limits_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=$$
$$=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta\int\limits_0^R (R^2-t^2)^2\,t^2\,dt=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

При вычислении $\int\limits_0^R \rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$ была сделана подстановка $\sqrt{R^2-\rho^2}=t$, откуда $R^2-\rho^2=t^2$, $\rho\,d\rho=-t\,dt$, $\rho^4=(R^2-t^2)^2$. ▲

229. Найти момент инерции полусферы $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ относительно оси Oz.

△ Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=\frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$I_{Oz}=\iint_S (x^2+y^2)\,dS=\iint_D (x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$$

Областью интегрирования является проекция полусферы на плоскость xOy, т. е. круг $x^2+y^2\leqslant a^2$; поэтому, переходя к полярным координатам, получим

$$I_{Oz}=\iint_D \rho^2\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,d\rho\,d\theta=4a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a\frac{\rho^3d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=\frac{4}{3}\pi a^4$$

(внутренний интеграл можно вычислить с помощью подстановки $\rho=a\sin t$). ▲

230. Вычислить координаты центра тяжести части плоскости $z=x$, ограниченной плоскостями $x+y=1$, $y=0$, $x=0$ (рис. 24).

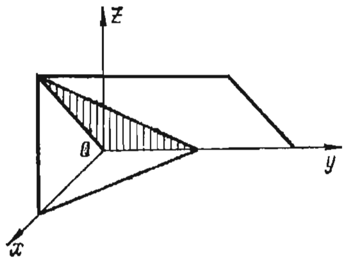

Рис. 24

△ Найдем площадь указанной части плоскости $z=x$. Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$; следовательно,

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1(1-x)\,dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)^2\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\iint_S x\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1x\,dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,dy=2\int_0^1x(1-x)\,dx=$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3};\quad \bar{y}=\frac{1}{S}\iint_S y\,dS=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1dx\int_0^{1-x}\sqrt{2}\,y\,dy=$$

$$=\int_0^1(1-x)^2\,dx=-\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

$$\bar{z}=\frac{1}{S}\iint_S z\,dS=\frac{1}{S}\iint_S x\,dS=\frac{1}{3}$$

(использовано уравнение плоскости $z=x$). ▲

231. Найти массу поверхности сферы и статический момент M_{xy} верхней полусферы, если поверхностная плотность в каждой точке равна расстоянию этой точки от вертикального диаметра.

△ Совместим начало координат с центром сферы, направим ось Oz по вертикали и перейдем к сферическим координатам: $x=R\sin\theta\cos\varphi$, $y=R\sin\theta\sin\varphi$, $z=R\cos\theta$ (R — радиус сферы). Тогда $dS=J\,d\theta\,d\varphi=R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, поверхностная плотность $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=R\sin\theta$. Следовательно,

$$m=\iint\limits_S \gamma\,dS=\iint\limits_S R^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi=R^3\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=R^3\pi\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=\pi R^3\cdot\pi=\pi^2R^3;$$

$$M_{xy}=\iint\limits_S z\gamma\,dS=R^4\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=R^4\cdot 2\pi\left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}\pi R^4. \ ▲$$

232. Найти координаты центра тяжести части поверхности $z=2-(x^2+y^2)/2$, расположенной над плоскостью xOy.

233. Найти момент инерции параболоида $z=(x^2+y^2)/2$ относительно оси O_z при $0\leqslant z\leqslant 1$.

234. Вычислить $\iint\limits_S xyz\,dS$, где S — часть поверхности $z=x^2+$ $+y^2$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

§ 6. ФОРМУЛЫ СТОКСА И ОСТРОГРАДСКОГО — ГАУССА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Если функции $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности S и C — замкнутый контур, ограничивающий поверхность S, то справедлива *формула Стокса*

$$\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S; направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура C казался происходящим против хода часовой стрелки.

Если функции $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области T пространства, ограниченной замкнутой гладкой поверхностью S, то справедлива *формула Остроградского — Гаусса*

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS=\iiint\limits_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Если каждой точке M области V поставлена в соответствие скалярная $u=u(M)$ [векторная $\mathbf{F}=\mathbf{F}(M)$] величина, то говорят, что в области V задано *скалярное* (*векторное*) *поле*.

В декартовой системе координат задание скалярного поля равносильно заданию одной функции трех переменных:

$$u(M)=u(x, y, z),$$

а векторного поля — трех функций трех переменных:

$$\mathbf{F}(M)=P(x, y, z)\,\mathbf{i}+Q(x, y, z)\,\mathbf{j}+R(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

где $P=(x, y, z)$, $Q=(x, y, z)$, $R=(x, y, z)$ — проекции вектора $\mathbf{F}$ на соответствующие координатные оси. Предполагается, что функции $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q=(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ являются непрерывно дифференцируемыми в области V.

Векторной линией называется кривая, направление которой в каждой ее точке M совпадает с направлением вектора $\mathbf{F}$, соответствующего этой точке. Векторная линия определяется системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

Градиентом скалярного поля $u=u(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Дивергенцией векторного поля $\mathbf{F}(M)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ называется скаляр

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вихрем (*ротором*) векторного поля $\mathbf{F}(M)=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Потоком векторного поля $\mathbf{F}(M)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\mathbf{n}=\cos\alpha\cdot\mathbf{i}+\cos\beta\cdot\mathbf{j}+\cos\gamma\cdot\mathbf{k}$ к поверхности S, называется поверхностный интеграл

$$\Pi=\iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_S F_n\,dS=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS,$$

где $\mathbf{F}\mathbf{n}$ — скалярное произведение вектора поля и единичного вектора выбранного направления нормали.

Линейным интегралом от вектора $\mathbf{F}$ по ориентированной кривой K называется криволинейный интеграл

$$\int\limits_K \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\int\limits_K P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

представляющий собой *работу* векторного поля вдоль кривой K. Если контур C — замкнутый, то линейный интеграл

$$\text{Ц}=\oint\limits_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{F}(M)$ вдоль контура C.

Формула Остроградского — Гаусса в векторной форме имеет вид

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \oiint\limits_S \mathbf{Fn}\, dS,$$

т. е. *интеграл от дивергенции векторного поля* $\mathbf{F}$, *распространенный по некоторому объему* T, *равен потоку вектора через поверхность* S, *ограничивающую данный объем.*

Формула Стокса в векторной форме имеет вид

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot} \mathbf{F}\, dS,$$

т. е. *циркуляция вектора вдоль замкнутого контура* C, *ограничивающего некоторую поверхность* S, *равна потоку вихря через эту поверхность* (направления обхода контура и нормали должны быть согласованы друг с другом).

Введем символический вектор (в декартовой системе координат)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k},$$

называемый *оператором Гамильтона* (или *набла-оператором*). Он обладает как свойствами вектора, так и свойствами дифференциального оператора. С его помощью выражения для градиента, дивергенции и ротора можно кратко записать в следующем виде:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \mathbf{F}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называется *потенциальным*, если $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$, т. е. если $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. В этом случае $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \nabla \times \nabla u = 0$; следовательно, потенциальное поле является безвихревым.

Векторное поле $\mathbf{F}(M)$ называется *соленоидальным* (или *трубчатым*), если $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, т. е. в области задания поля V отсутствуют и стоки, и источники. Так как $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, то поле вихрей является соленоидальным.

235. Применяя формулу Стокса, найти $I = \oint x^2y^3\, dx + dy + z\, dz$, если C — окружность $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.

△ Данный контур C ограничивает часть плоскости $z = 0$ с единичным вектором нормали $\mathbf{n} = \mathbf{k}$; следовательно, $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$. Учитывая, что $P = x^2y^3$, $Q = 1$, $R = z$, по формуле Стокса получаем

$$I = \oint\limits_C x^2y^3\, dx + dy + z\, dz =$$

$$= \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS =$$

$$= -\iint\limits_S 3x^2y^2 \cos\gamma\, dS.$$

Так как $\cos\gamma\, dS = dx\, dy$, то последний интеграл примет вид

$$I = -3\iint\limits_D x^2y^2\, dx\, dy,$$

где плоская область D ограничена окружностью $x^2+y^2=r^2$. Вводя полярные координаты $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, получим

$$I=-3\iint_D \rho^5\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\rho\,d\theta=-12\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^r\rho^5\,d\rho=$$

$$=-2r^6\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{r^6}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{r^6}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,4\theta=-\frac{r^6}{4}\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi r^6}{8}.\ \blacktriangle$$

236. Найти интеграл $\oiint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$, распространенный по поверхности S тела, ограниченного этой поверхностью.

△ По формуле Остроградского—Гаусса имеем

$$\oiint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS=$$

$$=\iiint_T\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}+\frac{\partial(y)}{\partial y}+\frac{\partial(z)}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=3\iiint_V dx\,dy\,dz=3V,$$

где V — объем тела.

237. Применяя формулу Остроградского—Гаусса, преобразовать поверхностный интеграл по замкнутой поверхности S

$$I=\oiint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}\,dx\,dy$$

в интеграл по объему, ограниченному этой поверхностью.

△ Данный интеграл можно записать так:

$$I=\oiint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS,$$

а последний интеграл на основании формулы Остроградского—Гаусса равен

$$\iiint_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

Следовательно,

$$I=\iiint_T \Delta u\,dx\,dg\,dz,$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u$. Символ $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется *оператором Лапласа*. ▲

238. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$.

△ Согласно определению, имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(z^2)}{\partial z}=$$
$$=2x+2y+2z=2(x+y+z).\ \blacktriangle$$

239. Дано скалярное поле $u(x, y, z)$. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

△ Так как $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, то

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

или

$$\nabla(\nabla u)=\Delta u, \quad \text{т. е. } \Delta=\nabla^2$$

(оператор Лапласа равен квадрату набла-оператора). ▲

240. Дано электрическое векторное поле, в каждой точке которого по закону Кулона действует вектор $\mathbf{F}=\frac{ke}{r^2}\mathbf{r}_0$, где r — расстояние данной точки от начала координат, e — положительный электрический заряд, $\mathbf{r}_0$ — единичный вектор, направленный по радиусу-вектору данной точки, $k=\text{const}$. Определить поток векторного поля через сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$.

△ Имеем

$$\Pi=\iint\limits_S \mathbf{F}\mathbf{n}\,dS=\iint\limits_S \frac{ke}{r^2}\mathbf{r}_0\mathbf{n}\,dS.$$

Так как $r=R=\text{const}$ и $\mathbf{r}_0\mathbf{n}=1$, то

$$\Pi=\frac{ke}{R^2}\iint\limits_S dS=\frac{ke}{R^2}S_{\text{сф}}=\frac{ke}{R^2}4\pi R^2=4\pi ke.\ \blacktriangle$$

241. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через замкнутую поверхность $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$.

△ Найдем дивергенцию данного векторного поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

Искомый поток найдем по формуле Остроградского—Гаусса (при вычислении интеграла используем цилиндрические координаты):

$$\Pi=\iiint\limits_T \operatorname{div}\mathbf{r}\,dV=3\iiint\limits_T dV=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho\int_0^{1-\rho}dz=$$
$$=3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho(1-\rho)\,d\rho=3\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\pi.\ \blacktriangle$$

242. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового цилиндра, если начало координат совпадает с центром нижнего основания цилиндра, R — радиус основания цилиндра, h — его высота (рис. 25).

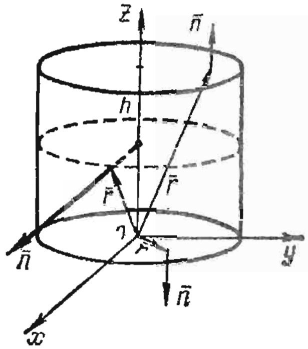

Рис. 25

△ Для вычисления потока вектора $\mathbf{r}$ через внешнюю сторону поверхности цилиндра нужно подсчитать поток этого вектора через нижнее основание, боковую поверхность и верхнее основание цилиндра.

Имеем $\Pi_{\text{н. осн}}=\iint\limits_S r_n\,dS$; так как проекция радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на внешнюю нормаль к основанию цилиндра равна нулю, то $\Pi_{\text{н. осн}}=0$.

Проекция радиуса-вектора на нормаль к боковой поверхности равна радиусу основания цилиндра, т. е. $r_n=R$; тогда $\Pi_{\text{б. пов}}=\iint\limits_S R\,dS=RS_{\text{б. пов}}=$ $=2\pi R^2h$.

Проекция радиуса-вектора на нормаль к верхнему основанию равна h; следовательно, $\Pi_{\text{в. осн}}=h\iint\limits_S dS=hS_{\text{осн}}=\pi R^2h$.

Таким образом, поток вектора $\mathbf{r}$ через внешнюю сторону цилиндра равен

$$\Pi=2\pi R^2h+\pi R^2h=3\pi R^2h. \ ▲$$

243. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}=(2z-x)\mathbf{i}+(x+2z)\mathbf{j}+$ $+3z\mathbf{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x+4y+z-4=0$ координатными плоскостями в том направлении нормали к плоскости, которая образует с осью Oz острый угол.

△ Единичный вектор нормали к плоскости $x+4y+z-4=0$, обеспечивающий требуемое направление ориентации поверхности, имеет вид $\mathbf{n}=(1/\sqrt{17})\,\mathbf{i}+(4/\sqrt{17})\,\mathbf{j}+(1/\sqrt{17})\,\mathbf{k}$, т. е. $\cos\alpha=1/\sqrt{17}$, $\cos\beta=4/\sqrt{17}$, $\cos\gamma=1/\sqrt{17}$. Имеем $\cos\alpha\,dS=dy\,dz$; $\cos\beta\,dS=dx\,dz$; $\cos\gamma\,dS=dx\,dy$. Для данного векторного поля $P=2z-x$, $Q=x+2z$, $R=3z$ и по определению потока получаем

$$\Pi=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=$$

$$=\iint\limits_S (2z-x)\,dy\,dz+(x+2z)\,dz\,dx+3z\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_S (2z+4y+z-4)\,dy\,dz+(x+2z)\,dz\,dx+3\,(4-x-4y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{4-4y}(3z+4y-4)\,dz+\int\limits_0^4 dz\int\limits_0^{4-z}(x+2z)\,dx+3\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{1-x/4}(4-x-4y)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{3}{2}\cdot 16(1-y)^2-16(1-y)^2\right]dy+\int_0^4\left[\frac{1}{2}(4-z)^2+2z(4-z)\right]dz+$$

$$+3\int_0^4\left[\frac{1}{4}(4-x)^2-\frac{(4-x)^2}{8}\right]dx=42\frac{2}{3}. \ \blacktriangle$$

244. Вычислить линейный интеграл от радиуса-вектора $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ вдоль дуги винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=at$, если $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

$\triangle$ Имеем

$$\int_K \mathbf{r}\,d\mathbf{r}=\int_K x\,dx+y\,dy+z\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}[R^2(-\cos t\sin t+\sin t\cos t)+a^2t]\,dt=\frac{a^2t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}=2\pi^2a^2.$$

Эта величина равна работе вектора $\mathbf{r}$ вдоль заданной дуги винтовой линии. $\blacktriangle$

245. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{F}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}$ по окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ в положительном направлении.

$\triangle$ По определению циркуляции получаем

$$\oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\oint_C -\omega y\,dx+\omega x\,dy=\omega\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t)\,dt=2\pi a^2\omega. \ \blacktriangle$$

246. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}=(x+3y+2z)\,\mathbf{i}+(2x+z)\,\mathbf{j}+(x-y)\,\mathbf{k}$ по контуру треугольника MNP, где $M(2;\ 0;\ 0)$, $N(0;\ 3;\ 0)$, $P(0;\ 0;\ 1)$.

$\triangle$ Согласно формуле Стокса, $\text{Ц}=\oint_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\iint_S \mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\,dS$. Здесь C — контур треугольника MNP, лежащего в плоскости $3x+2y+6z-6=0$, проходящей через три данные точки. Найдем ротор данного векторного поля:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+3y+2z & 2x+z & x-y\end{vmatrix}=$$

$$=\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial y}-\frac{\partial(2x+z)}{\partial z}\right]\mathbf{i}-\left[\frac{\partial(x-y)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial z}\right]\mathbf{j}+$$

$$+\left[\frac{\partial(2x+z)}{\partial x}-\frac{\partial(x+3y+2z)}{\partial y}\right]\mathbf{k}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$Ц=\iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS=\iint\limits_S (\operatorname{rot}\mathbf{F})_x\,dy\,dz+(\operatorname{rot}\mathbf{F})_y\,dz\,dx+(\operatorname{rot}\mathbf{F})_z\,dx\,dy=$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}} dy\,dz+\iint\limits_{D_{zx}} dz\,dx-\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy=-2\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{1-y/3} dz+\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{2-2z} dx-$$

$$-\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3-3x/2} dy=-2\left[y-\frac{y^2}{6}\right]_0^3+[2z-z^2]_0^1-\left[3x-\frac{3}{4}x^2\right]_0^2=-5.\ ▲$$

247. Тело вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найти вихрь скорости в произвольной точке тела.

△ Имеем $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Далее, находим

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k},$$

причем $P=z\omega_y-y\omega_z$, $Q=x\omega_z-z\omega_x$, $R=y\omega_x-x\omega_y$. Следовательно,

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=2(\omega_x\mathbf{i}+\omega_y\mathbf{j}+\omega_z\mathbf{k})=2\boldsymbol{\omega},$$

т. е. вихрь скорости $\mathbf{v}$ точки равен удвоенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ вращения тела. ▲

248. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+a\mathbf{k}$ $(a=\mathrm{const})$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении.

△ I способ (непосредственное вычисление циркуляции). Параметрические уравнения данного контура C имеют вид $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Далее, имеем $P=y=\sin t$, $Q=-x=-\cos t$. По определению циркуляции получаем

$$Ц=\oint\limits_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int\limits_0^{2\pi}\sin t(-\sin t)\,dt-\cos t\cdot\cos t\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=-2\pi.$$

II способ (применение формулы Стокса). Ротор вектора $\mathbf{F}$ равен

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & a\end{vmatrix}=-2\mathbf{k},$$

а нормаль, обеспечивающая положительное направление обхода контура, $\mathbf{n}=\mathbf{k}$. Следовательно,

$$Ц=\iint_S \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dS=-2\iint_S \mathbf{nk}\,dS=-2\iint_S dx\,dy=$$

$$=-2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho\,d\rho=-2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=-2\pi. \ \blacktriangle$$

249. Показать, что поле $\mathbf{F}=(2xy+3y^2+9y)\,\mathbf{i}+(x^2+6xy+9x)\,\mathbf{j}$ является потенциальным, и найти потенциал этого поля.

$\triangle$ Данное векторное поле определено на всей плоскости xOy, являющейся односвязной областью. Покажем, что $\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$, т. е. что поле безвихревое, а следовательно, и потенциальное. Действительно, так как $P=2xy+3y^2+9y$, $Q=x^2+6xy+9x$, $R=0$, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+3y^2+9y & x^2+6xy+9x & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Потенциал $u=u(x,\ y)$ вычислим по формуле

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy+C,$$

т. е.

$$u(x,\ y)=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y (x^2+6xy+9x)\,dy+C=x^2y+3xy^2+9xy.$$

Здесь в качестве начальной точки взята точка $M_0(0;\ 0)$. $\blacktriangle$

250. Найти потенциал ньютоновского поля притяжения.

$\triangle$ Пусть точка с массой m помещена в начало координат O; тогда согласно закону Ньютона на помещенную в каждой точке A плоскости единичную массу действует сила $\mathbf{F}$, модуль которой $F=m/r^2$, где $r=|OA|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Ньютоновское поле является потенциальным, так как его ротор, как в этом можно убедиться, равен нулю.

Найдем потенциал этого плоского поля:

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy+C=$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{-mx\,dx}{\sqrt{(x^2+y_0^2)^3}}+\int_{y_0}^{y}\frac{-my\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}+C=$$

$$=\frac{m}{\sqrt{x^2+y^2}}+C_1,\ \text{где}\ C_1=C-\frac{m}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}. \ \blacktriangle$$

251. Применяя формулу Стокса, найти криволинейный интеграл $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, где C — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

252. Найти интеграл $\iint\limits_S (x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\,dS$, взятый по поверхности шара $x^2+y^2+z^2=a^2$, где α, β, γ — углы внешней нормали с осями координат.

253. Найти $\iint\limits_S [(z^2-y^2)\cos\alpha+(x^2-z^2)\cos\beta+(y^2-x^2)\cos\gamma]\,dS$, где S — внешняя сторона поверхности полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$.

254. Вычислить $\iint\limits_S (x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,dS$, где S — внешняя сторона поверхности эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

255. Вычислить $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(-h\leqslant x\leqslant h)$.

256. Найти поток вектора $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2+y^2\leqslant (R^2/h^2)\,z^2$, $0\leqslant z\leqslant h$.

257. Найти поток векторного поля $\mathbf{F}=(y-x)\,\mathbf{i}+(x+y)\,\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x+y+z-1=0$ координатными плоскостями.

258. Найти поток вектора $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ через часть сферы $x^2+y^2+z^2=4$, если $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$, $0\leqslant z\leqslant 2$.

259. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r}$ через внешнюю сторону поверхности прямого кругового конуса, если h — высота конуса и R — радиус основания.

260. Найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{F}=(x+y)\,\mathbf{i}+(x-z)\,\mathbf{j}+(y+z)\,\mathbf{k}$ по контуру треугольника ABC, где $A\,(0;\,0;\,0)$, $B\,(0;\,1;\,0)$, $C\,(0;\,0;\,1)$.

261. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{A}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ по окружности $x^2+(y-1)^2=1$.

262. Найти циркуляцию вектора $\mathbf{u}=(x+z)\,\mathbf{i}+(x-y)\,\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ по эллипсу $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

263. Найти дивергенцию градиента функции $u=e^{x+y+z}$.

264. Найти $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, где $\mathbf{u}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$.

265. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

266. Найти $\operatorname{rot}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{b}$, где $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

267. Показать, что $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}$.

268. Показать, что $\operatorname{div}(f\mathbf{A})=f\operatorname{div}\mathbf{A}+\mathbf{A}\operatorname{grad}f$.

ГЛАВА III

РЯДЫ

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Пусть $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, где $u_n = f(n)$,— бесконечная числовая последовательность. Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется бесконечным *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ — *членами* ряда; $u_n = f(n)$ называется *общим членом*. Ряд часто записывают в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют n-й *частичной суммой ряда*:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Ряд называется *сходящимся*, если его n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т. е. если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$. Число S называют *суммой* ряда. Если же n-я частичная сумма ряда при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу, то ряд называют *расходящимся*.

Ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (|q| < 1),$$

составленный из членов любой убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся и имеет сумму $a/(1-q)$.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

называемый *гармоническим*, расходится.

Приведем основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

1. *Если сходится ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

то сходится и ряд

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots,$$

получаемый из данного ряда отбрасыванием первых m членов (этот последний ряд называют m-м *остатком* исходного ряда); наоборот, *из сходимости m-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда.*

2. *Если сходится ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

и суммой его является число S, то сходится и ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \ldots,$$

причем сумма последнего ряда равна aS.

3. *Если сходятся ряды*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \quad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

имеющие соответственно суммы S и σ, то сходится и ряд

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots,$$

причем сумма последнего ряда равна $S+\sigma$.

4. *Если ряд*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, т. е. при $n\longrightarrow\infty$ предел общего члена сходящегося ряда равен нулю (необходимый признак сходимости ряда).

Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$, то ряд расходится.

Перечислим важнейшие признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

Первый признак сравнения. *Пусть даны два ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

и

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \tag{2}$$

причем каждый член ряда (1) *не превосходит соответствующего члена ряда* (2), *т. е. $u_n\leqslant v_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Тогда если сходится ряд* (2), *то сходится и ряд* (1); *если расходится ряд* (1), *то расходится и ряд* (2).

Этот признак остается в силе, если неравенства $u_n<v_n$ выполняются не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера $n=N$.

Второй признак сравнения. *Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n/v_n)=k$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Признак Коши. *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$, то этот ряд сходится при $C<1$ и расходится при $C>1$.

Признак Даламбера. *Если для ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

существует $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=D$, то этот ряд сходится при $D<1$ и расходится при $D>1$.

Интегральный признак. *Если $f(x)$ при $x\geqslant 1$ — непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n=f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int\limits_N^{\infty} f(x)\,dx$ $(N\geqslant 1)$.*

Рассмотрим теперь ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т. е. ряды вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots,$$

где $u_n>0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница). *Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член стремится к нулю*, т. е. если выполняются следующие два условия: 1) $u_1>u_2>u_3>\ldots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Возьмем n-ю частичную сумму сходящегося знакочередующегося ряда, для которого выполняется признак Лейбница:

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n.$$

Пусть R_n — n-й остаток ряда. Его можно записать как разность между суммой ряда S и n-й частичной суммой S_n, т. е. $R_n = S - S_n$. Нетрудно видеть, что

$$R_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots).$$

Величина $|R_n|$ оценивается с помощью неравенства $|R_n| < u_{n+1}$.

Остановимся теперь на некоторых свойствах знакопеременных рядов (т. е. знакочередующихся рядов и рядов с произвольным чередованием знаков своих членов).

Знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots.$$

В этом случае исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся,* если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно сходится, то ряд, полученный после любой перестановки бесконечного множества его членов, абсолютно сходится и имеет ту же сумму, что и первоначальный ряд.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ условно сходится, то при перестановке бесконечного множества его членов сумма ряда может измениться. В частности, при соответствующей перестановке членов условно сходящегося ряда можно превратить его в расходящийся ряд.

Если ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ сходятся абсолютно и имеют соответственно суммы S_1 и S_2, то сходится абсолютно и ряд

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + v_1u_2) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) + \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1) + \ldots.$$

Этот ряд называется *произведением рядов* (по Коши). Его сумма равна S_1S_2.

269. Дан общий член ряда $u_n = \frac{n}{10^n + 1}$. Написать первые четыре члена ряда.

△ Если $n = 1$, то $u_1 = 1/11$; если $n = 2$, то $u_2 = 2/101$; если $n = 3$, то $u_3 = 3/1001$; если $n = 4$, то $u_4 = 4/10001$; .... Ряд можно записать в виде

$$\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \ldots. \ \blacktriangle$$

270. Найти общий член ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots.$$

△ Последовательные числители образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7 ...; n-й член прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n - 1$. Последовательные знаменатели образуют геометрическую прогрессию 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...; n-й член этой прогрессии $b_n=2^n$. Следовательно, общий член ряда $u_n=(2n-1)/2^n$.

Вообще нужно иметь в виду, что несколько первых членов ряда полностью ряд не определяют. ▲

271. Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots.$$

△ Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени n-го члена равен n. Числители дробей 2/3, 3/7, 4/11, 5/15, ... образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому n-й числитель равен $n+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Следовательно, n-й знаменатель равен $4n-1$. Итак, общим членом ряда является $u_n=\left(\frac{n+1}{4n-1}\right)^n$. ▲

272. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$$

△ Общий член ряда можно представить в следующем виде:

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

откуда

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),\ u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\ u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),\ \ldots.$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма равна 1/2. ▲

273. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots.$$

△ Представим общий член ряда u_n в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}.$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придем к тождеству

$$1\equiv A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1).$$

Полагая последовательно $n=0, -1, -2$, находим: при $n=0$: $1=2A$; $A=1/2$; при $n=-1$: $1=-B$; $B=-1$; при $n=-2$: $1=2C$; $C=1/2$. Таким образом,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2},\ \text{т. е. } u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\quad u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),$$

$$u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),\quad u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ \ldots$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=1/4$; следовательно, ряд сходится и имеет сумму 1/4. ▲

274. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots.$$

△ Данный ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Найдем его сумму. Здесь $a=2/3$, $q=1/2$ (знаменатель прогрессии). Следовательно,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/3}{1-1/2}=\frac{4}{3}.\ ▲$$

275. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n+10}+\ldots.$$

△ Данный ряд получен из гармонического отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится. ▲

276. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{3n-1}+\ldots.$$

△ Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-1/n}=\frac{1}{3},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости). ▲

277. Исследовать сходимость ряда

$$0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+[0{,}5+(0{,}1)^n]+\ldots.$$

△ Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0{,}5\neq 0$ и ряд расходится. ▲

278. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

△ Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, т. е. ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходится и данный ряд. ▲

279. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots, \text{ если } p<1.$$

△ Члены этого ряда, начиная со второго, больше соответствующих членов гармонического ряда. Следовательно, ряд расходится. ▲

280. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n=\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

△ Сравним этот ряд с рядом, у которого общий член $v_n=1/2^n$ (т. е. с бесконечно убывающей геометрической прогрессией). Применим второй признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-3/2^n}=\frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд. ▲

281. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots.$$

△ Сравним ряд с гармоническим рядом, у которого $v_n=1/n$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, данный ряд расходится. ▲

282. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots.$$

△ Здесь удобно применить признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n}=\frac{n}{2n+1}$, а предел последней дроби находится просто:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{1}{2}.$$

Так как $C=1/2<1$, то ряд сходится. ▲

283. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

△ Снова применим признак Коши:

$$u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},\quad \sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{2}e.$$

Так как $C>1$, то ряд расходится. ▲

284. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\ldots+\frac{2^n}{n^{10}}+\ldots .$$

△ Применим признак Даламбера; имеем $u_n=2^n/n^{10}$, $u_{n+1}=2^{n+1}/(n+1)^{10}$, $u_{n+1}/u_n=2n^{10}/(n+1)^{10}$; значит,

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}}=2.$$

Так как $D>1$, то ряд расходится. ▲

285. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{n}{3^{n/2}}+\ldots .$$

△ Здесь $u_n=n/3^{n/2}$, $u_{n+1}=(n+1)/3^{(n+1)/2}$, $u_{n+1}/u_n=(n+1)/(n\sqrt{3})$, поэтому

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\sqrt{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}};\ D<1.$$

Следовательно, ряд сходится. ▲

286. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots .$$

△ Имеем $u_n=10^n/n!$, $u_{n+1}=10^{n+1}/(n+1)!$, $u_{n+1}/u_n=10/(n+1)$, $D=\lim\limits_{n\to\infty}10/(n+1)=0$; $D<1$ — ряд сходится. ▲

287. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots .$$

△ Имеем $u_n=1/n^2$, $u_{n+1}=1/(n+1)^2$, $u_{n+1}/u_n=n^2/(1+n^2)=1/(1+1/n)^2$, $D=\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=1$. Так как $D=1$, то с помощью признака Даламбера не удается решить вопроса о сходимости ряда.

Применим интегральный признак: $u_n=1/n^2$; следовательно, $f(x)=1/x^2$, $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^\infty=1$. Интеграл сходится (является конечной величиной), поэтому сходится и данный ряд. ▲

288. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots .$$

△ Применим интегральный признак:

$$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\quad f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)},$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^{\infty}\frac{\frac{dx}{x+1}}{\ln(x+1)}=\ln\ln(x+1)\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд. ▲

289. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots+(-1)^n\frac{n}{n^2+1}+\ldots.$$

△ Применим признак Лейбница. Так как

$$\frac{2}{2^2+1}=\frac{1}{2+1/2},\quad \frac{3}{3^2+1}=\frac{1}{3+1/3},\quad \frac{4}{4^2+1}=\frac{1}{4+1/4},\ \ldots,$$

то

$$\frac{1}{2}>\frac{2}{2^2+1}>\frac{3}{3^2+1}>\frac{4}{4^2+1}>\ldots.$$

Следовательно, выполнено первое условие признака Лейбница. Далее, так как

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1/n}=0,$$

то выполнено и второе условие. Значит, данный ряд сходится. ▲

290. Исследовать сходимость ряда

$$1{,}1-1{,}01+1{,}001-\ldots+(-1)^{n-1}[1+(0{,}1)^n]+\ldots.$$

△ Первое условие признака Лейбница выполняется: $1{,}1>1{,}01>1{,}001>$ $>\ldots$; с другой стороны, $u_n=1+\frac{1}{10^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)=1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то не выполнен необходимый признак сходимости ряда. Ряд расходится. ▲

291. Исследовать сходимость ряда

$$1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots.$$

△ Общий член ряда не стремится к нулю, поэтому ряд расходится. ▲

292. Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots.$$

△ Составим ряд из абсолютных величин:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots.$$

Этот ряд есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и, следовательно, сходится. Значит, и данный ряд сходится, причем абсолютно. ▲

293. Найти произведение абсолютно сходящихся рядов

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}\ldots$$

и

$$1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}\ldots .$$

△ Произведение рядов (согласно данному на с. 68 определению) есть ряд

$$1+\left(\frac{2}{1!}+\frac{3}{1!}\right)+\left(\frac{2^2}{2!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}\right)+\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^2}{2!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2}{1!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{3}{1!}+\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{3^2}{2!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}\right)+\ldots ,$$

или

$$1+\frac{1}{1!}(2+3)+\frac{1}{2!}(2^2+2\cdot2\cdot3+3^2)+$$
$$+\frac{1}{3!}\cdot(2^3+3\cdot2^2\cdot3+3\cdot2\cdot3^2+3^3)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{(n-1)!\cdot1!}\cdot2^{n-1}\cdot3+\right.$$
$$\left.+\frac{n!}{(n-2)!\cdot2!}\cdot2^{n-2}\cdot3^2+\ldots+3^n\right)+\ldots .$$

Так как $\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=C_n^k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, то ряд можно переписать в виде

$$1+\frac{2+3}{1!}+\frac{(2+3)^2}{2!}+\frac{(2+3)^3}{3!}+\ldots+\frac{(2+3)^n}{3!}+\ldots ,$$

или

$$1+\frac{5}{1!}+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n}{n!}+\ldots . \blacktriangle$$

294. Написать первые четыре члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n+n}$.

295. Написать первые четыре члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9}{100^n-1}$.

Найти суммы рядов:

296. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

297. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

298. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}+\ldots$.

299. $1+\frac{m-1}{m}+\left(\frac{m-1}{m}\right)^2+\ldots+\left(\frac{m-1}{m}\right)^n+\ldots$.

300. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+1)^2}{4n}$ расходится.

Исследовать сходимость рядов с помощью первого признака сравнения:

301. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$.

302. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью второго признака сравнения:

303. $\frac{2+1}{5+1}+\frac{2^2+1}{5^2+1}+\ldots+\frac{2^n+1}{5^n+1}+\ldots$.

● Сравнить с рядом $\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots$.

304. $\frac{1}{2\cdot 1-1}+\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{2n-1}+\ldots$.

Пользуясь признаком Коши, исследовать сходимость рядов:

305. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$.

306. $3+(2,1)^2+(2,01)^3+\ldots+[2+(0,1)^{n-1}]+\ldots$.

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость рядов:

307. $\frac{10}{11}+\left(\frac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\frac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\ldots+\left(\frac{10}{11}\right)^n n^5+\ldots$.

308. $\frac{11}{10}+\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2^5}+\left(\frac{11}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{3^5}+\ldots+\left(\frac{11}{10}\right)^n\frac{1}{n^5}+\ldots$.

Пользуясь интегральным признаком, исследовать сходимость рядов:

309. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, если $p>1$.

310. $\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{19\ln 19}+\ldots+\frac{1}{(10n-1)\ln(10n-1)}+\ldots$.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

311. $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1}+\ldots$.

312. $1,1-1,02+1,003-1,0004+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{n}{10^n}\right)+\ldots$

313. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$.

314. $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\ldots$.

315. $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}+3\frac{1}{32}+3\frac{1}{64}-3\frac{1}{128}-3\frac{1}{256}+\ldots$

Исследовать сходимость рядов:

316. $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\ldots+\frac{10^n}{2n+5}+\ldots$.

317. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}+\ldots$.

318. $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$.

319. $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$.

320. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$.

321. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$.

322. $\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{10n}+\ldots$.

323. $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\ldots+\frac{1}{10n-2}+\ldots$.

324. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\ldots+\frac{n}{5^{n-1}}+\ldots$.

325. $\frac{1!}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\ldots+\frac{n!}{5^n}+\ldots$.

326. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$.

327. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}+\ldots$.

328. $\frac{1}{2\ln 2\cdot\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}+\ldots$.

329. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}+\ldots+\frac{1}{n^3+1}+\ldots$.

330. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{(n+1)^3+n}+\ldots$.

331. $1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots$.

332. $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$.

333. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\ldots$.

334. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$.

335. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}+\ldots$.

336. Найти произведение абсолютно сходящихся рядов $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$ и $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\ldots$.

337. Показать, что ряд $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$ абсолютно сходится, и возвести его в квадрат (умножить на себя).

§ 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

члены которого — функции от x, называется *функциональным*. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ ... определены и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называют *областью сходимости* функционального ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси Ox. Каждому значению из области сходимости X соответствует определенное значение величины $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{n} u_n(x)$. Эту величину, являющуюся функцией x, называют *суммой* функционального ряда и обозначают через $S(x)$.

Представим сумму ряда в виде $S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, где

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),\ R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

[$R_n(x)$ — остаток функционального ряда].

Сходящийся функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области X, если для каждого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое целое положительное число N, что при $n\geqslant N$ выполняется неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$ для любого x из области X. При этом сумма $S(x)$ равномерно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в области X, где $u_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ — непрерывные функции, есть непрерывная функция.

Сформулируем достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда — признак Вейерштрасса.

Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... по абсолютной величине не превосходят в некоторой области X положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, причем числовой ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

сходится, то функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

в этой области сходится равномерно.

В заключение сформулируем две теоремы, относящиеся к интегрированию и дифференцированию функциональных рядов.

1. *Если ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, где $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... — непрерывные функции, равномерно сходится в некоторой области X и имеет сумму $S(x)$, то ряд*

$$\int_a^b u_1(x)\,dx+\int_a^b u_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^b u_n(x)\,dx+\ldots$$

сходится и имеет сумму $\int\limits_a^b S(x)\,dx$ (промежуток $[a, b]$ принадлежит области X).

2. Пусть функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... определены в некоторой области X и имеют в этой области производные $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, ..., $u_n'(x)$, ...

Если в этой области ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *сходится равномерно, то его сумма равна производной от суммы первоначального ряда:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}_x' .$$

338. Дан функциональный ряд

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n + \ldots .$$

Исследовать сходимость ряда в точках $x=0$ и $x=1$.

△ В точке $x=0$ получаем ряд

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cdot 2^n + \ldots .$$

Здесь $u_n = 2^n/(2n-1)$, $u_{n+1} = 2^{n+1}/(2n+1)$. Применяем признак Даламбера:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{2-1/n}{2+1/n} = 2,$$

т. е. $D > 1$. Следовательно, ряд расходится.

В точке $x=1$ получаем ряд

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n} + \ldots .$$

Здесь $u_n = 1/(3^n(2n-1))$, $u_{n+1} = 1/(3^{n+1}(2n+1))$; находим

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{3} < 1,$$

т. е. ряд сходится. ▲

339. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+x^6} + \ldots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \ldots .$$

△ Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1$; так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Если $|x| = 1$, то также получаем расходящийся ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$.

Если $|x| > 1$, то члены заданного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots$, т. е. ряд сходится.

Итак, область сходимости ряда определяется неравенством $|x| > 1$. Отсюда следует, что ряд сходится, если $1 < x < +\infty$ или $-\infty < x < -1$. ▲

340. Показать, что ряд

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^4+2} + \frac{1}{x^6+3} - \frac{1}{x^8+4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{x^{2n}+n} + \ldots$$

сходится равномерно при всех значениях x $(-\infty < x < \infty)$.

△ Данный ряд при любом значении x сходится по признаку Лейбница, поэтому его остаток оценивается с помощью неравенства $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, т. е.

$$|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Так как неравенства $\frac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon$ и $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$ равносильны, то, взяв $n \geqslant N$, где N — какое-нибудь целое положительное число, удовлетворяющее условию $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon} - 1$, приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$. Итак, данный ряд сходится равномерно в промежутке $(-\infty, +\infty)$. ▲

341. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно в интервале $(-1, 1)$.

△ В указанном интервале ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Имеем $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \ldots$, т. е. $R_n(x) = x^{n+1}/(1-x)$. Но $\lim\limits_{x \to -1+0} |R_n(x)| = 1/2$, $\lim\limits_{x \to 1-0} R_n(x) = \infty$. Следовательно, приняв $\varepsilon < 1/2$, мы не сможем добиться выполнения неравенства при любом значении x. Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится неравномерно. ▲

342. С помощью признака Вейерштрасса показать, что ряд

$$\sin x + \frac{1}{2^2}\cdot\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\cdot\sin^3 3x + \ldots + \frac{1}{n^2}\sin^n nx + \ldots$$

сходится равномерно в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

△ Так как $\left|\frac{1}{n^2}\sin^n nx\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ и ряд $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ сходится, то данный ряд сходится равномерно при любых значениях x. ▲

343. Можно ли к ряду

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{x}{3\sqrt{3}} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{x}{n\sqrt{n}} + \ldots$$

применить теорему о почленном дифференцировании рядов?

△ Сравним данный ряд со сходящимся рядом

$$x + \frac{x}{2^{3/2}} + \frac{x}{3^{3/2}} + \ldots + \frac{x}{n^{3/2}} + \ldots$$

(при любом фиксированном x). Тогда $u_n(x) = \operatorname{arctg}(x/n^{3/2})$, $v_n(x) = x/n^{3/2}$. Так как $\operatorname{arctg}\alpha$ и α — эквивалентные бесконечно малые, то $\lim\limits_{n \to \infty}\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = 1$ и согласно второму признаку сравнения заключаем, что данный ряд сходится.

Найдем производную общего члена данного ряда:

$$u_n'(x) = \frac{1/n^{3/2}}{1 + x^2/n^3} = \frac{n^{3/2}}{x^2 + n^3}.$$

Ряд, составленный из производных, имеет вид

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{2\sqrt{2}}{x^2+2^3}+\frac{3\sqrt{3}}{x^2+3^3}+\ldots .$$

Заметим, что члены последнего ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда $1+\frac{1}{2^{3/2}}+\frac{1}{3^{3/2}}+\ldots$. Поэтому на основании признака Вейерштрасса ряд, составленный из производных, равномерно сходится в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и, значит, к заданному ряду можно применить теорему о дифференцировании рядов. ▲

344. Законно ли применение к ряду

$$\cos x+\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{1}{2^2}\cdot\cos 3x+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx+\ldots$$

теоремы об интегрировании функциональных рядов в промежутке $[\pi/4, \pi/3]$?

△ Члены заданного ряда при любом значении x по абсолютной величине меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$. Поэтому данный ряд согласно признаку Вейерштрасса равномерно сходится в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, к нему можно применить теорему об интегрировании рядов для любого конечного промежутка $[a, b]$, в частности, для промежутка $[\pi/4, \pi/3]$. ▲

345. Дан функциональный ряд

$$\frac{3x+1}{x^2+x+1}+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3x+1}{x^2+x+1}\right)^n+\ldots .$$

Сходится ли ряд в точках $x=1$, $x=2$ и $x=3$?

346. Исследовать сходимость функционального ряда

$$\frac{1!}{1}(x^2-4x+6)+\frac{2!}{2^2}(x^2-4x+6)^2+\ldots+\frac{n!}{n^n}(x^2-4x+6)^n+\ldots$$

в точках $x=1$ и $x=2$.

347. Найти область сходимости ряда

$$1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots .$$

348. Найти область сходимости ряда

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots .$$

349. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}+\ldots .$$

350. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{x^4+n^2}$ равномерно сходится в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

351. Показать, что ряд

$$\frac{2x+1}{x+2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n+\ldots$$

равномерно сходится в промежутке $[-1, 1]$.

352. Показать, что ряд

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^{n-1}}+\ldots$$

в интервале $(-2, 2)$ сходится неравномерно.

353. Показать, что ряд

$$\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{3}+\frac{(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2}{3^2}+\ldots+\frac{(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^n}{3^n}+\ldots$$

сходится в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и установить характер сходимости.

354. Можно ли к ряду

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\cdot\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{x}{3}+\ldots+\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{x}{n}+\ldots$$

применить теорему о дифференцировании функциональных рядов?

355. Можно ли к ряду $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\ldots+\frac{\cos^{n-1} x}{(n-1)!}+\ldots$ применить теорему об интегрировании функциональных рядов в любом конечном промежутке $[a, b]$?

356. Можно ли к ряду

$$(x^2+1)+2(x^2+1)^2+3(x^2+1)^3+\ldots+n(x^2+1)^n+\ldots$$

применить теорему о дифференцировании функциональных рядов?

§ 3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots,$$

где a, a_0, a_1, ..., a_n — действительные числа, называется *степенным.*

Основное свойство степенных рядов состоит в том, что *если степенной ряд сходится при $x=x_0$, то он сходится (и притом абсолютно) при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x-a|<|x_0-a|$* (теорема Абеля).

Одним из следствий теоремы Абеля является факт существования для всякого степенного ряда *интервала сходимости* $|x-a|<R$, или $a-R<x<$ $<a+R$ с центром в точке a, внутри которого степенной ряд абсолютно сходится и вне которого он расходится. На концах интервала сходимости (в точках $x=a\pm R$) различные степенные ряды ведут себя по-разному: одни сходятся абсолютно на обоих концах, другие — либо условно сходятся на обоих концах, либо на одном из них условно сходятся, на другом расходятся, третьи — расходятся на обоих концах.

Число R — половина длины интервала сходимости — называется *радиусом сходимости* степенного ряда. В частных случаях радиус сходимости ряда R может быть равен нулю или бесконечности. Если $R=0$, то степенной ряд сходится лишь при $x=a$; если же $R=\infty$, то ряд сходится на всей числовой оси.

Для отыскания интервала и радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться одним из следующих способов.

1. Если среди коэффициентов ряда $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нет равных нулю, т. е. ряд содержит все целые положительные степени разности $x-a$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{1}$$

при условии, что этот предел (конечный или бесконечный) существует.

2. Если исходный ряд имеет вид

$$a_0+a_1(x-a)^p+a_2(x-a)^{2p}+\ldots+a_n(x-a)^{np}+\ldots,$$

(где p — некоторое определенное целое положительное число: 2, 3, ...), то

$$R=\sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}. \tag{2}$$

3. Если среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$ любая (т. е. не образует арифметическую прогрессию, как в предыдущем случае), то радиус сходимости можно находить по формуле

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3}$$

в которой используются только значения a_n, отличные от нуля. (Эта формула пригодна и в случаях 1 и 2.)

4. Во всех случаях интервал сходимости можно находить, применяя непосредственно признак Даламбера или признак Коши к ряду, составленному из абсолютных величин членов исходного ряда.

Записав ряд в виде

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

(здесь $u_0=a_0$, $u_n(x)=a_n(x-a)^N$, где зависимость N от n может быть любой, причем через a_n обозначен не коэффициент при $(x-a)^n$, а коэффициент n-го члена ряда), находят интервал сходимости из неравенств

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1.$$

Отметим следующее свойство степенных рядов: *ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.*

Таким образом, если $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, то

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-a)^{n-1}, \quad \int_a^x S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

где $-R<x-a<R$.

Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над степенным рядом сколько угодно раз. Следовательно, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

357. Исследовать сходимость степенного ряда

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots.$$

△ Здесь $a_n=1/n$, $a_{n+1}=1/(n+1)$. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, ряд сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $-1<x<1$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=1$, то получаем гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$, который, как известно, расходится. Если $x=-1$, то получаем ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$. Этот ряд сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется двойным неравенством $-1\leqslant x<1$. ▲

358. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots.$$

△ Здесь $a_n=1/n^2$, $a_{n+1}=1/(n+1)^2$, имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1.$$

Следовательно, ряд сходится, если $-1<x-2<1$, т. е. $1<x<3$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $x=3$, то получаем ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$, который сходится, так как ряд $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots$ сходится при $p>1$ (на основании интегрального признака). Если $x=1$, то получаем ряд $-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\ldots$. Этот ряд сходится (и притом абсолютно), так как сходится ряд из абсолютных величин его членов.

Итак, степенной ряд сходится для значений x, удовлетворяющих двойному неравенству $1\leqslant x\leqslant 3$. ▲

359. Исследовать сходимость ряда

$$1!\,(x-5)+2!\,(x-5)^2+3!\,(x-5)^3+\ldots+n!\,(x-5)^n+\ldots.$$

△ Здесь $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$; значит,

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\ldots n}{1\cdot2\cdot3\ldots n\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Ряд сходится только при $x-5=0$, т. е. в точке $x=5$. ▲

360. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

△ Имеем $a_n=1/n!$, $a_{n+1}=1/(n+1)!$, $a_0=0$;

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится при любом значении x. Отсюда, между прочим, заключаем, что предел общего члена ряда при любом значении x равен нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. ▲

361. Исследовать сходимость ряда

$$1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^3}{10^2}+\ldots+\frac{x^{3(n-1)}}{10^{n-1}}+\ldots.$$

△ Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=x^3/10$. Он сходится, если $|x^3/10|<1$, и расходится, если $|x^3/10|\geqslant 1$. Следовательно, промежуток сходимости ряда определяется двойным неравенством $-\sqrt[3]{10}<x<\sqrt[3]{10}$. Тот же результат можно получить, используя формулы (2) и (3). ▲

362. Исследовать сходимость ряда

$$2x^5+\frac{4x^{10}}{3}+\frac{8x^{15}}{5}+\ldots+\frac{2^n x^{5n}}{2n-1}+\ldots.$$

△ Полагая $x^5=t$, получаем ряд

$$2t+\frac{4t^2}{3}+\frac{8t^3}{5}+\ldots. \qquad (*)$$

Здесь $a_n=2^n/(2n-1)$, $a_{n+1}=2^{n+1}/(2n+1)$. Находим радиус сходимости ряда (*):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{2-1/n}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд сходится, если $|t|<1/2$.

Исследуем сходимость ряда на концах промежутка. Если $t=1/2$, то получаем ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$. Этот ряд расходится (его можно сравнить с рядом $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$, членами которого являются члены гармонического ряда, умноженные на 1/2). При $t=-1/2$ получаем ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$. Этот ряд сходится условно. Следовательно, ряд (*) сходится, если $-1/2\leqslant t<1/2$. Таким образом, заданный ряд сходится, если $-1/2\leqslant x^5<1/2$, т. е. $-1/\sqrt[5]{2}\leqslant x<1/\sqrt[5]{2}$. Тот же результат можно получить, используя формулу (2). ▲

363. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k(x-2)^{2k}$.

△ В данном случае имеем $a_n=0$ при $n=2k-1$ и $a_n=\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ при $n=2k$. Для отыскания радиуса сходимости удобнее всего использовать формулу (3). Находим

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{2k+1}{k+1}}=\sqrt{2}.$$

Исследуем ряд на концах интервала сходимости. Полагая $x-2=\sqrt{2}$, получаем числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^{k}\cdot 2^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k+\frac{1}{2}}\right)^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{k}.$$

Но $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^{k}=\sqrt{e}\neq 0$. Таким образом, при $x-2=\sqrt{2}$ ряд расходится. То же самое имеет место и при $x-2=-\sqrt{2}$. Итак, область сходимости данного ряда $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$. ▲

364. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^{n}}$.

△ Применяем признак Коши, полагая $u_n=\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^{n}}$. Тогда

$$\sqrt[n]{|u_n|}=\frac{|x-1|^{n+1}}{n};\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\begin{cases}0 & \text{при } |x-1|\leqslant 1,\\ \infty & \text{при } |x-1|>1.\end{cases}$$

Таким образом, ряд сходится, если $|x-1|\leqslant 1$, т. е. в промежутке $0\leqslant x\leqslant 2$. ▲

365. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}\frac{x^{n(n-1)/2}}{n!}$.

△ Применяем признак Даламбера, полагая $u_n=x^{n(n-1)/2}/n!$, $u_{n+1}=x^{n(n+1)/2}/(n+1)!$ Тогда

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|^{n}}{n+1};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\begin{cases}0 & \text{при } |x|\leqslant 1,\\ \infty & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

Итак, ряд сходится, если $|x|\leqslant 1$, т. е. на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 1$. ▲

366. Найти сумму ряда $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ $(|x|<1)$, продифференцировав почленно ряд $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots$ $(|x|<1)$.

△ Воспользовавшись формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(S=\frac{a}{1-q}\right)$, получаем

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Остается продифференцировать полученное равенство:

$$1+2x+3x^2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}.\ ▲$$

367. Найти сумму ряда $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ $(|x|<1)$.

△ Продифференцируем почленно заданный ряд и найдем его сумму по формуле $S=\frac{a}{1-q}$, где $a=1$ и $q=x$; получим

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Проинтегрировав затем в пределах от 0 до x, находим

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots=-\ln(1-x).$$

Этот ряд сходится в промежутке $[-1, 1]$. ▲

Исследовать сходимость степенных рядов:

368. $\frac{x+1}{1!}+\frac{(x+1)^2}{3!}+\frac{(x+1)^3}{5!}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}+\ldots$.

369. $(x-4)+\frac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3+\ldots+\frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}+\ldots$.

370. $\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{2^n}+\ldots$.

371. $x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots$.

372. $5x+\frac{5^2\cdot x^2}{2!}+\frac{5^3\cdot x^3}{3!}+\ldots+\frac{5^n x^n}{n!}+\ldots$.

373. $x^3+\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n}+\ldots$.

● Положить $x^3=t$.

374. $\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{8^2\cdot 5}+\frac{x^9}{8^3\cdot 9}+\ldots+\frac{x^{3n}}{(4n-3)\,8^n}+\ldots$.

375. $\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n+3^n}+\ldots$.

376. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3+\ldots+\frac{n}{n+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n+\ldots$.

377. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$.

Найти суммы рядов:

378. $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\ldots$, если $|x|<a$.

379. $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,a^n}+\ldots$, если $-a\leqslant x<a$.

380. $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}\cdot x+\frac{3\cdot 4}{a^4}\cdot x^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{a^{n+1}}x^{n-1}+\ldots$, если $|x|<a$.

381. $-2x+4x^3-6x^5+\ldots+(-1)^n\,2n\cdot x^{2n-1}+\ldots$, если $|x|<1$.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Ряд Тейлора для функции одной переменной. Всякая функция, бесконечно дифференцируемая в интервале $|x-x_0|<r$, т. е. $x_0-r<x<x_0+r$, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней степенной *ряд Тейлора*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

где $R_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора (или остаток ряда), $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ получается *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < M$, где M — положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Приведем разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots, + \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots .$$

Это последнее разложение имеет место:

при $m \geqslant 0$, если $-1 \leqslant x \leqslant 1$;
при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \leqslant 1$;
при $m \leqslant -1$, если $-1 < x < 1$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant$$

2. Ряд Тейлора для функции двух независимых переменных. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$. **Тогда в любой точке $P(x; y)$ из этой окрестности функция $f(x, y)$ может быть** разложена в *ряд Тейлора*:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left[(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x - x_0)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0) f''_{xy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 f''_{yy}(x_0, y_0)\right] +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x - x_0)^3 f'''_{xxx}(x_0, y_0) + 3(x - x_0)^2(y - y_0) f'''_{xxy}(x_0, y_0) + 3(x - x_0)(y - y_0)^2 \times\right.$$
$$\left.\times f'''_{xyy}(x_0, y_0) + (y - y_0)^3 f'''_{yyy}(x_0, y_0)\right] + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0) + \ldots ,$$

если в этой окрестности выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, y) = 0$, где $R_n(x, y)$ — остаток ряда Тейлора.

В частном случае при $x_0=y_0=0$ получается *ряд Маклорена*.

$$f(x, y)=f(0, 0)+\frac{1}{1!}\left[xf'_x(0, 0)+yf'_y(0, 0)\right]+\frac{1}{2!}\left[x^2f''_{xx}(0, 0)+\right.$$
$$\left.+2xyf''_{xy}(0, 0)+y^2f''_{yy}(0, 0)\right]+\ldots+\frac{1}{n!}\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(0, 0)+\ \ldots.$$

382. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=2^x$.

△ Найдем значения функции и ее производных при $x=0$:

$$\begin{array}{ll} f(x)=2^x, & f(0)=2^0=1, \\ f'(x)=2^x\ln 2, & f'(0)=\ln 2, \\ f''(x)=2^x\ln^2 2, & f''(0)=\ln^2 2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x)=2^x\cdot\ln^n 2; & f^{(n)}(0)=\ln^n 2. \end{array}$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)|<2^x$ для любого n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$f(x)=f(0)=\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots.$$

В данном случае

$$2^x=1+x\ln 2+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\ln^3 2}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Это разложение можно получить и иначе: достаточно в разложении

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

заменить x на $x\ln 2$. ▲

383. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\sin^2 x$.

△ Продифференцируем функцию $n+1$ раз:

$$f(x)=\sin^2 x,$$
$$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x,$$
$$f''(x)=2\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f'''(x)=-2^2\sin 2x=2^2\sin\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f^{\text{IV}}(x)=-2^3\cos 2x=2^3\sin\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin\left[2x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$
$$f^{(n+1)}(x)=2^n\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Находим значения функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x)$ в точке $x=0$, а значение $f^{(n+1)}(x)$ определяем в точке $x=c$ (см. равенство для определения R_n). Получаем $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=0$, $f^{\text{IV}}(0)=-2^3$, $f^{\text{V}}(0)=0$, $f^{\text{VI}}(0)=2^5$, $\ldots$, $f^{(n+1)}(c)=2^n\cdot\sin(2c+\pi n/2)$.

Находим остаточный член:

$$R_n=\frac{2^n\cdot\sin(2c+\pi n/2)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\ \text{т. е.}\ R_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}\sin(2c+\pi n/2).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!}=0$ при любом x, а $\sin(2c+\pi n/2)$ — величина ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$. Следовательно, функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно представить в виде суммы ряда Маклорена

$$\sin^2 x=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots .$$

Задачу можно решить и иначе. В равенстве $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ заменим $\cos 2x$ его разложением в степенной ряд:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots .$$

Выполнив несложные преобразования, получим найденное выше разложение $\sin^2 x$. ▲

384. Разложить e^{-x^2} в ряд по степеням x.

△ В разложении

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$$

заменим x на $-x^2$; получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots\ (-\infty<x<+\infty).\ ▲$$

385. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x-1$

△ В разложении

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ (-1<x\leqslant 1)$$

заменим x на $x-1$; получим

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots\ (0<x\leqslant 2).\ ▲$$

386. Разложить $1/x$ в ряд по степеням $x-2$.

△ Воспользуемся равенством $\frac{1}{x}=\frac{1/2}{1+(x-2)/2}$. Правую часть этого равенства можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a=1/2$ и знаменателем $q=-(x-2)/2$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots,$$

т. е.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots .$$

Так как $|(x-2)/2|<1$, то $0<x<4$. ▲

387. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y)=x^2-xy+$ $+2y^2-3x+4y+8$ в окрестности точки $P_0(-3; 1)$.

△ Найдем частные производные и вычислим их значения в точке P_0:

$$f'_x(x, y)=2x-y-3,\ f'_y(x, y)=-x+4y+4,\ f''_{xx}(x, y)=2,\ f''_{xy}(x, y)=-1,$$
$$f''_{yy}(x, y)=4;$$
$$f(-3, 1)=35,\ f'_x(-3, 1)=-10,\ f'_y(-3, 1)=11,\ f''_{xx}(-3, 1)=2,$$
$$f''_{xy}(-3, 1)=-1,\ f''_{yy}(-3, 1)=4.$$

Искомое разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x, y)=35-10(x+3)+11(y-1)+(x+3)^2-(x+3)(y-1)+2(y-1)^2+\ldots.$$ ▲

388. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x, y)=x^2\ln y$ в окрестности точки $P_0(1; 1)$ до членов второго порядка.

△ Найдем частные производные первого и второго порядков:

$$f'_x(x, y)=2x\ln y,\ f'_y(x, y)=\frac{x^2}{y},\ f''_{xx}(x, y)=2\ln y,\ f''_{xy}(x, y)=\frac{2x}{y},\ f''_{yy}(x, y)=-\frac{x^2}{y^2}.$$

Вычислим значения функции и производных в точке $P_0(1, 1)$:

$$f(1, 1)=0,\ f'_x(1, 1)=0,\ f'_y(1, 1)=1,\ f''_{xx}(1, 1)=0,\ f''_{xy}(1, 1)=2,\ f''_{yy}(1, 1)=-1.$$

Искомое разложение записывается так:

$$f(x, y)=(y-1)+2(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+\ \ldots.$$ ▲

389. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x, y)=\cos x \operatorname{sh} y$ до членов третьего порядка.

△ Найдем частные производные первого, второго и третьего порядков:

$$f'_x(x, y)=-\sin x \operatorname{sh} y,\quad f'_y(x, y)=\cos x \operatorname{ch} y,\quad f''_{xx}(x, y)=-\cos x \operatorname{sh} y,$$
$$f''_{xy}(x, y)=-\sin x \operatorname{ch} y,\quad f''_{yy}(x, y)=\cos x \operatorname{sh} y,\quad f'''_{xxx}(x, y)=\sin x \operatorname{sh} y,$$
$$f'''_{xxy}(x, y)=-\cos x \operatorname{ch} y,\quad f'''_{xyy}(x, y)=-\sin x \operatorname{sh} y,\quad f'''_{yyy}(x, y)=\cos x \operatorname{ch} y.$$

Вычислим значения функции и производных при $x_0=y_0=0$:

$$f(0, 0)=0,\ f'_x(0, 0)=0,\ f'_y(0, 0)=1,\ f''_{xx}(0, 0)=0,\ f''_{xy}(0, 0)=0,\ f''_{yy}(0, 0)=0,$$
$$f'''_{xxx}(0, 0)=0,\ f'''_{xxy}(0, 0)=-1,\ f'''_{xyy}(0, 0)=0,\ f'''_{yyy}(0, 0)=1.$$

Следовательно,

$$f(x, y)=y-\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{6}y^3+\ \ldots.$$ ▲

Разложить в ряды по степеням x следующие функции:

390. $f(x)=3^x$. **391.** $f(x)=e^{-2x}$. **392.** $f(x)=\cos^2 x$.
393. $f(x)=\operatorname{sh}^2 x$. **394.** $f(x)=\ln(x+a)$, $a>0$.
395. $f(x)=\sqrt{x+a}$, $a>0$. **396.** $f(x)=\operatorname{ch}^2(x^2)$.

Разложить в ряды Тейлора следующие функции:

397. $f(x, y)=x^3-2y^3+3xy$ в окрестности точки $P(2; 1)$.

398. $f(x, y) = 4x^3 - x^2 + 2xy - y^2 + 5x + y - 8$ в окрестности точки $P(1; -1)$.

399. $f(x, y) = 5x^2 + 9y^2 - 2x + 3y - 5$ в окрестности точки $P(1; -1)$.

400. $f(x, y) = x/y$ в окрестности точки $P(-1; 1)$ до членов третьего порядка.

401. $f(x, y) = xe^{-y}$ в окрестности точки $P(1; 0)$ до членов второго порядка.

402. $f(x, y) = x\cos^2 y$ в окрестности точки $P(-1; 0)$ до членов третьего порядка.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Здесь полезно иметь в виду приведенные в предыдущем параграфе разложения в степенные ряды функций e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.

Для вычисления логарифмов эффективна формула

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left[\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \frac{1}{5(2t+1)^5} + \ldots\right].$$

Ряд в правой части равенства сходится тем быстрее, чем больше t.

Для вычисления приближенного значения функции $f(x)$ в ее разложении в степенной ряд сохраняют первые n членов (n — конечная величина), а остальные члены отбрасывают. Для оценки погрешности найденного приближенного значения нужно оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < u_{n+1}$, где u_{n+1} — первый из отброшенных членов ряда.

403. Оценить погрешность приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < n+1.$$

△ Погрешность этого приближенного равенства определяется суммой членов, следующих после $x^n/n!$ в разложении e^x:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \ldots,$$

или

$$R_n = \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

Заменив каждый из сомножителей $n+2$, $n+3$, $n+4$, ... меньшей величиной $n+1$, получим неравенство

$$R_n < \frac{x^n}{n!}\left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{n+1}\right)^3 + \ldots\right].$$

Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в квадратных скобках:

$$R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x/(n+1)}{1 - x/(n+1)}, \text{ т. е. } R_n < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \ ▲$$

404. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 0,00001.

△ Используя разложение e^x в ряд, получаем

$$\sqrt{e}=e^{1/2}=1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\ldots.$$

Определим число n так, чтобы погрешность приближенного равенства

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\ldots+\frac{1}{n!2^n}$$

не превышала 0,00001. Воспользуемся оценкой погрешности, данной в предыдущем примере. Полагаем $x=1/2$; тогда

$$R_n<\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{1/2}{n+1/2}, \text{ т. е. } R_n<\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

Путем подбора определим, при каком значении n будет выполняться неравенство $R_n<0{,}00001$. Полагая, например, $n=3$, получаем $R_3<1/(8\cdot 6\cdot 7)$, т. е. $R_3<1/336$. Пусть, далее, $n=5$; отсюда $R_5<1/(32\cdot 120\cdot 11)$, т. е. $R_5<1/42240$. Пусть, наконец, $n=6$; отсюда $R_6<1/(64\cdot 720\cdot 13)$, т. е. $R_6<$ $<1/100\,000$. Итак, принимаем $n=6$:

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{1!2}+\frac{1}{2!2^2}+\frac{1}{3!2^3}+\frac{1}{4!2^4}+\frac{1}{5!2^5}+\frac{1}{6!2^6}.$$

Суммируем слагаемые:

$$\begin{array}{rl}
 & 1{,}000000 \\
 & 0{,}500000 \\
 & 0{,}125000 \\
+ & 0{,}020833 \text{ (в 6 раз меньше предыдущего слагаемого)} \\
 & 0{,}002604 \text{ (« 8 « « «)} \\
 & 0{,}000260 \text{ (« 10 « « «)} \\
 & \underline{0{,}000022} \text{ (« 12 « « «)} \\
 & 1{,}648719.
\end{array}$$

Значит, $\sqrt{e}\approx 1{,}648719$. Каждое слагаемое мы вычислили с точностью до 0,000001, чтобы при суммировании не получить погрешности, превышающей 0,00001.

405. Вычислить $1/\sqrt[5]{e}$ с точностью до 0,00001.

△ Имеем

$$1/\sqrt[5]{e}=e^{-1/5}=1-\frac{1}{1!5}+\frac{1}{2!\cdot 5^2}-\frac{1}{3!5^3}+\ldots.$$

Воспользуемся приближенным равенством

$$1/\sqrt[5]{e}\approx 1-\frac{1}{1!5}+\frac{1}{2!5^2}-\frac{1}{3!5^3}+\frac{1}{4!5^4}.$$

Мы взяли 5 слагаемых, так как знакопеременный ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, а поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда. Первый из отброшенных членов равен $1/(5!5^5)$. Нетрудно видеть, что $1/(5!5^5)<0{,}00001$.

Произведя вычисления, в результате получаем $1/\sqrt[5]{e}\approx 0{,}81873$. ▲

406. Пользуясь разложением $\cos x$ в ряд, вычислить $\cos 18°$ с точностью до 0,0001.

△ Имеем

$$\cos 18^\circ = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots;$$

$$\pi/10 = 0,31416,\ (\pi/10)^2 = 0,09870,\ (\pi/10)^4 = 0,00974.$$

Достаточно взять три члена ряда, так как $(1/6!)\cdot(\pi/10)^6 < 0,0001$. Тогда

$$\cos 18^\circ \approx 1 - \frac{0,09870}{2} + \frac{0,00974}{24};\quad \cos 18^\circ \approx 0,9511.\ \blacktriangle$$

407. Вычислить $\sqrt[5]{1,1}$ с точностью до 0,0001.

△ Воспользуемся разложением $(1+x)^m$ в ряд, полагая $x = 0,1$, $m = 1/5$. Имеем

$$\sqrt[5]{1,1} = (1+0,1)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0,1 + \frac{(1/5)(1/5-1)}{2!}0,01 +$$

$$+\frac{(1/5)(1/5-1)(1/5-2)}{3!}0,001 + \ldots = 1 + 0,02 - 0,0008 + 0,000048 - \ldots.$$

Четвертый и следующие за ним члены отбрасываем, так как четвертый член меньше 0,0001. Итак, $\sqrt[5]{1,1} \approx 1,0192$. ▲

408. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001.

△ Так как 5^3 является ближайшим к числу 130 кубом целого числа, то целесообразно число 130 представить в виде суммы двух слагаемых: $130 = 5^3 + 5$. Тогда

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0,04)^{1/3} =$$

$$= 5\left[1 + \frac{1}{3}\cdot 0,04 + \frac{(1/3)(1/3-1)}{2!}\cdot 0,0016 + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!}\cdot 0,000064 + \ldots\right] =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\cdot 0,2 - \frac{1}{9}\cdot 0,008 + \frac{5}{81}\cdot 0,00032 - \ldots.$$

Четвертый член меньше 0,001, поэтому его и следующие за ним члены можно отбросить. Итак, $\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 - 0,0009$, т. е. $\sqrt[3]{130} \approx 5,066$. ▲

409. Вычислить $\ln 1,04$ с точностью до 0,0001.

△ Воспользуемся разложением $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln 1,04 = \ln(1+0,04) = 0,04 - \frac{0,04^2}{2} + \frac{0,04^3}{3} - \frac{0,04^4}{4} + \ldots,$$

или

$$\ln 1,04 = 0,04 - 0,0008 + 0,000021 - 0,00000064 + \ldots,$$

откуда $\ln 1,04 \approx 0,0392$. ▲

410. В прямоугольном треугольнике катеты равны 1 и 5 см. Определить острый угол треугольника, лежащий против меньшего катета, с точностью до 0,001 радиана.

△ Так как $\operatorname{tg}\alpha=1/5$, то $\alpha=\operatorname{arctg}(1/5)$. Воспользуемся разложением

$$\alpha=\operatorname{arctg}(1/5)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\ldots,$$

откуда $\alpha\approx 0{,}2-0{,}0027$, т. е. $\alpha\approx 0{,}197$. ▲

411. Оценить погрешность приближенного равенства

$$\ln(t+1)\approx\ln t+2\left[\frac{1}{2t+1}+\frac{1}{3(2t+1)^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5(2t+1)^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}}\right].$$

△ Задача сводится к оценке суммы остатка ряда

$$R_n=2\left[\frac{1}{(2n+1)(2t+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2t+1)^{2n+3}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n+5)(2t+1)^{2n+5}}+\ldots\right].$$

Заменив каждый из множителей $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, ... меньшим числом $2n+1$, получим неравенство

$$R_n<\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{(2t+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2t+1)^{2n+3}}+\frac{1}{(2t+1)^{2n+5}}+\ldots\right].$$

Просуммируем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в квадратных скобках:

$$R_n<\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1/(2t+1)^{2n+1}}{1-1/(2t+1)^2}=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}[(2t+1)^2-1]}=$$
$$=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2t+1)^{2n-1}\cdot 4t(t+1)},\text{ т. е. } R_n<\frac{1}{2(2n+1)\,t\,(t+1)(2t+1)^{2n-1}}.$$ ▲

412. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,0001.

△ В формуле для определения $\ln(t+1)$ и неравенстве для оценки R_n полагаем $t=1$:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right);\quad R_n<\frac{1}{4(2n+1)\,3^{2n-1}}.$$

Путем подбора определим n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n<0{,}0001$. Если $n=2$, то $R_2<1/(4\cdot 5\cdot 3^3)$; $R_2<1/540$; если $n=3$, то $R_3<1/(4\cdot 7\cdot 3^5)$; $R_3<1/6804$; если $n=4$, то $R_4<1/(4\cdot 9\cdot 3^7)$; $R_4<1/10000$.

Итак, $n=4$ и для вычисления $\ln 2$ получаем приближенное равенство

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\right).$$

Суммируя эти четыре слагаемых, получим

$$\ln 2\approx 0{,}66667+0{,}02469+0{,}00165+0{,}00013=0{,}69314\approx 0{,}6931.$$ ▲

413. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 0,0001.

△ Полагаем $t=4$. Тогда

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\ldots\right);\quad R_n<\frac{1}{40(2n+1)\,9^{2n-1}}.$$

Если $n=1$, то $R_1 < 1/(40\cdot 3\cdot 9)$; $R_1 < 1/1080$; если $n=2$, то $R_2 < 1/(40\cdot 5\cdot 9^3)$; $R_2 < 1/10000$. Значит, достаточно взять два члена ряда. Следовательно,

$$\ln 5 \approx 2\ln 2 + 2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}\right) \approx 1,38628+0,22222+0,00090=1,60940. \blacktriangle$$

414. Доказать справедливость тождества $\pi/4=\operatorname{arctg}(1/2)+\operatorname{arctg}(1/3)$ и вычислить π с точностью до 0,001.

$\triangle$ Полагая в равенстве

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$$

$x=1/2$, $y=1/3$, получаем

$$\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \quad \text{или} \quad \pi=4\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

Воспользовавшись разложением $\operatorname{arctg}x$ в ряд, имеем

$$\pi=4\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\ldots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right)\right].$$

Выполняя вычисления, находим $\pi=3,1416$.

Для вычисления числа π можно было воспользоваться рядами, которые сходятся быстрее, чем только что приведенные. $\blacktriangle$

Вычислить:

415. e с точностью до 0,00001.

416. $1/\sqrt{e}$ с точностью до 0,00001.

417. $\sin 9^\circ$ с точностью до 0,0001.

418. $\operatorname{ch} 0,3$ с точностью до 0,0001.

419. $\sqrt[3]{1,06}$ с точностью до 0,0001.

420. $\sqrt{27}$ с точностью до 0,001.

421. $\ln 0,98$ с точностью до 0,0001.

422. $\ln 1,1$ с точностью до 0,0001.

423. $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

424. $\ln 10$ с точностью до 0,0001.

425. Найти наименьшее положительное значение x, удовлетворяющее тригонометрическому уравнению $2\sin x-\cos x=0$.

426. Вычислить π с точностью до 0,001, полагая $x=1/\sqrt{3}$ в разложении $\operatorname{arctg}x$.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ И ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

427. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

$\triangle$ Заменив e^x и $\sin x$ их разложениями в степенные ряды, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3!}+\frac{2x}{4!}+\ldots}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2. \blacktriangle$$

428. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

△ Используя разложения $\sin x$ и $\operatorname{arctg} x$ в степенные ряды, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots-x+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}+\ldots}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)x^2+\ldots\right]=\frac{1}{6}. \ ▲$$

429. Вычислить $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001.

△ Заменив в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int\limits_0^{1/2}\frac{1-1+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=\left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots\approx 0{,}25-0{,}0017=0{,}2483. \ ▲$$

430. Вычислить $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

△ $$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int\limits_0^{0,1}\frac{x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\ldots}{x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\ldots\right)dx=\left[x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\ldots\right]_0^{0,1}=$$

$$=0{,}1-\frac{1}{4}\cdot 0{,}01+\frac{1}{9}\cdot 0{,}001-\ldots\approx 0{,}098. \ ▲$$

431. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

△ $$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx=\int\limits_0^1\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2\cdot 5}-\frac{x^7}{6\cdot 7}+\frac{x^9}{24\cdot 9}-\frac{x^{11}}{120\cdot 11}+\ldots\right]_0^1\approx$$

$$\approx 1-0{,}3333+0{,}1000-0{,}0238+0{,}0046-0{,}0008+\ldots=0{,}747. \ ▲$$

432. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

433. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

434. Вычислить $\int\limits_0^{0,2}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,0001.

435. Вычислить $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^x-1}{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

436. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} x\ln(1+x^2)\,dx$ с точностью до 0,001.

§ 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Комплексные числа. *Комплексными числами* называются числа вида $x+iy$, где x и y — действительные числа, i — *мнимая единица*, определяемая равенством $i^2=-1$. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа z. Для них вводятся обозначения: $x=\operatorname{Re} z$; $y=\operatorname{Im} z$.

Геометрически каждое комплексное число $z=x+iy$ изображается точкой $M(x;\,y)$ координатной плоскости xOy (рис. 26). В этом случае плоскость xOy называют комплексной числовой плоскостью, или *плоскостью комплексного переменного* z.

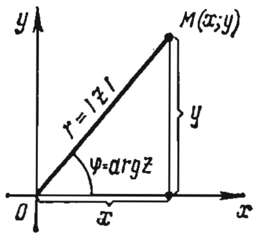

Рис. 26

Полярные координаты r и φ точки M, являющейся изображением комплексного числа z, называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа z; для них вводятся обозначения: $r=|z|, \varphi=\operatorname{Arg} z$.

Так как каждой точке плоскости соответствует бесчисленное множество значений полярного угла, отличающихся друг от друга на $2k\pi$ (k — целое положительное или отрицательное число), то $\operatorname{Arg} z$ — бесконечнозначная функция z.

То из значений полярного угла φ, которое удовлетворяет неравенству $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, называют *главным значением* аргумента z и обозначают $\arg z$.

В дальнейшем обозначение φ сохраним только для главного значения аргумента z, т. е. положим $\varphi=\arg z$, в силу чего для всех остальных значений аргумента z получим равенство

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi=\varphi+2k\pi.$$

Соотношения между модулем и аргументом комплексного числа z и его действительной и мнимой частями устанавливаются формулами

$$x=r\cos\varphi;\ y=r\sin\varphi.$$

Отсюда

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2};$$

$$\cos\varphi=x/|z|=x/\sqrt{x^2+y^2};\quad \sin\varphi=y/|z|=y/\sqrt{x^2+y^2}.$$

Аргумент z можно определить также по формуле

$$\arg z=\operatorname{arctg}(y/x)+C,$$

где $C=0$ при $x>0$, $C=+\pi$ при $x<0$, $y>0$; $C=-\pi$ при $x<0$, $y<0$.

Заменяя x и y в записи комплексного числа $z=x+iy$ их выражениями через r и φ, получаем так называемую *тригонометрическую форму комплексного числа*:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Комплексные числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда у них равны по отдельности действительные и мнимые части:

$$z_1=z_2, \text{ если } x_1=x_2,\ y_1=y_2.$$

Для чисел, заданных в тригонометрической форме, равенство имеет место, если модули этих чисел равны, а аргументы отличаются на целое кратное 2π:

$$z_1=z_2, \text{ если } |z_1|=|z_2| \text{ и } \operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2+2k\pi.$$

Два комплексных числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ с равными действительными и противоположными мнимыми частями называются *сопряженными*. Для сопряженных комплексных чисел выполняются соотношения

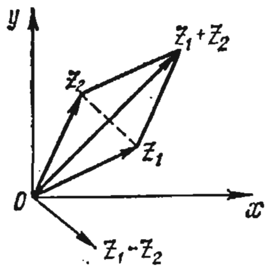

Рис. 27

$$|z_1|=|z_2|;\ \arg z_1=-\arg z_2$$

(последнему равенству можно придать вид $\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2=2k\pi$).

Действия над комплексными числами определяются следующими правилами.

Сложение. Если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i\ (y_1+y_2).$$

Сложение комплексных чисел подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$z_1+z_2=z_2+z_1;\ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)=z_1+z_2+z_3.$$

Вычитание. Если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$z_1-z_2=(x-x_2)+i\,(y_1-y_2).$$

Для геометрического пояснения сложения и вычитания комплексных чисел полезно изображать их не точками на плоскости z, а векторами: число $z=x+iy$ изображается вектором $\overline{OM}$, имеющим начало в точке O («нулевой» точке плоскости — начале координат) и конец в точке $M(x;\ y)$. Тогда сложение и вычитание комплексных чисел выполняется по правилу сложения и вычитания векторов (рис. 27).

Такое геометрическое истолкование операций сложения и вычитания векторов позволяет легко установить теоремы о модуле суммы и разности двух и сумме нескольких комплексных чисел, выражаемые неравенствами:

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$
$$|z_1+z_2+\ldots+z_k|\leqslant|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_k|.$$

Кроме того, полезно помнить, что *модуль разности двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен расстоянию между точками, являющимися их изображениями на плоскости z*: $|z_1-z_2|=d(z_1,\ z_2)$.

Умножение. Если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1).$$

Таким образом, комплексные числа перемножаются как двучлены, причем i^2 заменяется на -1.

Если $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1z_2=r_1r_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Таким образом, *модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения — сумме аргументов сомножителей.*

Умножение комплексных чисел подчиняется переместительному, сочетательному и распределительному (по отношению к сложению) законам:

$$z_1z_2=z_2z_1;\ (z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3)=z_1z_2z_3;\ z_1\,(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Деление. Для нахождения частного двух комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, следует делимое и делитель умножить на число, сопряженное с делителем:

$$z_1:z_2=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\,(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\,(x_2-iy_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i\,(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}=$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Если z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме, то

$$z_1:z_2=\frac{r_1}{r_2}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Таким образом, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Возведение в степень. Если $z=x+iy$, то по формуле бинома Ньютона имеем

$$z^n=(x+iy)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}\cdot iy+\ldots+(iy)^n$$

(n — целое положительное число); в полученном выражении надо заменить степени i их значениями:

$$i^2=-1;\ i^3=-i;\ i^4=1;\ i^5=i,\ \ldots$$

и, в общем случае,

$$i^{4k}=1;\ i^{4k+1}=i;\ i^{4k+2}=-1;\ i^{4k+3}=-i.$$

Если $z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то

$$z^n=r^n\,(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

(здесь n может быть как целым положительным, так и целым отрицательным числом).

В частности,

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

(*формула Муавра*).

Извлечение корня. Если n — целое положительное число, $z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

437. Найти $(z_1z_2)/z_3$, если $z_1=3+5i$, $z_2=2+3i$, $z_3=1+2i$.

△ $z_1z_2=(3+5i)\,(2+3i)=6+9i+10i-15=-9+19i$,

$$\frac{z_1z_2}{z_3}=\frac{-9+19i}{1+2i}=\frac{(-9+19i)\,(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)}=$$

$$=\frac{-9+18i+19i+38}{1+4}=\frac{29}{5}+\frac{37}{5}\,i.\ ▲$$

438. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=2+5i$.

△ Находим модуль комплексного числа: $r=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}\approx 5{,}385$. Находим главное значение аргумента: $\operatorname{tg}\varphi=5/2=2{,}5$, $\varphi=68^\circ 12'$. Следовательно, $z\approx 5{,}385(\cos 68^\circ 12'+i\sin 68^\circ 12')$. ▲

439. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=2\sqrt{3}-2i$.

△ Находим $r=\sqrt{12+4}=4$, $\sin\varphi=-2/4=-1/2$; $\cos\varphi=2\sqrt{3}/4=\sqrt{3}/2$; $\varphi=-\pi/6$, т. е.

$$z=4[\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)].\ ▲$$

440. Представить в тригонометрической форме комплексные числа 1, i, -1, $-i$.

△ $1=1+0\cdot i=1\cdot(\cos 0+i\sin 0)$,
$i=0+1\cdot i=1\cdot[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]$,
$-1=-1+0\cdot i=1\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$,
$-i=0-1\cdot i=1\cdot[\cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2)]$. ▲

441. Представить числа $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме, а затем найти комплексное число $z_1/(z_2z_3)$.

△ Находим

$$r_1=|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ \operatorname{tg}\varphi_1=1,\ \varphi_1=\arg z_1=\pi/4,$$
$$z_1=\sqrt{2}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)];$$
$$r_2=|z_2|=\sqrt{3+1}=2,\ \operatorname{tg}\varphi_2=1/\sqrt{3},\ \varphi_2=\arg z_2=\pi/6,$$
$$z_2=2[\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)];$$
$$r_3=|z_3|=\sqrt{3+1}=2,\ \operatorname{tg}\varphi_3=\sqrt{3},\ \varphi_3=\arg z_3=\pi/3,$$
$$z_3=2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)].$$

Следовательно,

$$z_2z_3=2\cdot 2[\cos(\pi/6+\pi/3)+i\sin(\pi/6+\pi/3)]=4[\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)]$$

и

$$\frac{z_1}{z_2z_3}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]=\frac{1}{4}(1-i).\ ▲$$

442. Найти все значения $\sqrt[3]{8+i}$.

△ Запишем комплексное число $z=\sqrt[3]{8+i}$ в тригонометрической форме. Имеем $r=|z|=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}\approx 8{,}062$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}(1/8)=7^\circ 6'$, т. е. $z\approx 8{,}062(\cos 7^\circ 6'+i\sin 7^\circ 6')$. Следовательно,

$$\sqrt[3]{8+i}\approx\sqrt[3]{8{,}062}\cdot\left(\cos\frac{7^\circ 6'+360^\circ k}{3}+i\sin\frac{7^\circ 6'+360^\circ k}{3}\right)\approx$$
$$\approx 2{,}0052[\cos(2^\circ 22'+120^\circ k)+i\sin(2^\circ 22'+120^\circ k)].$$

Если $k=0$, то $w_0\approx 2{,}0052(\cos 2^\circ 22'+i\sin 2^\circ 22')$;
» $k=1$, » $w_1\approx 2{,}0052(\cos 122^\circ 22'+i\sin 122^\circ 22')$;
» $k=2$, » $w_2\approx 2{,}0052(\cos 242^\circ 22'+i\sin 242^\circ 22')$.

Следовательно, $w_0\approx 2{,}0034+0{,}0828i$; $w_1\approx -1{,}0734+1{,}7120i$; $w_2\approx -0{,}9300-1{,}7764i$. ▲

443. Решить двучленное уравнение $w^5+32i=0$.

△ Перепишем уравнение в виде $w^5=-32i$. Число $-32i$ представим в тригонометрической форме:

$$w^5=32\,[\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)],\ \text{или}\ w=2\sqrt[5]{\cos(-90^\circ)+i\sin(-90^\circ)},$$

т. е.

$$w=2\left[\cos\frac{-90^\circ+360^\circ k}{5}+i\sin\frac{-90^\circ+360^\circ k}{5}\right]=$$
$$=2\,[\cos(-18^\circ+72^\circ k)+i\sin(-18^\circ+72^\circ k)].$$

Если $k=0$, то $w_0=2\,[\cos(-18^\circ)+i\sin(-18^\circ)]=1{,}9022-0{,}6180i$ (A).
« $k=1$, « $w_1=2(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)=1{,}1756+1{,}6180i$ (B).
« $k=2$, « $w_2=2(\cos 126^\circ+i\sin 126^\circ)=-1{,}1756+1{,}6180i$ (C).
» $k=3$, « $w_3=2(\cos 198^\circ+i\sin 198^\circ)=-1{,}9022-0{,}6180i$ (D).
« $k=4$, « $w_4=2(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)=-2i$ (E).

Корням двучленного уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат (рис. 28).

Вообще корням двучленного уравнения $w^n=a$, где a — комплексное число, соответствуют вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt[n]{|a|}$. ▲

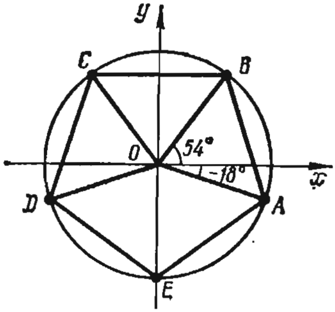

Рис. 28

444. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

△ Левую часть равенства $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5=\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi$ преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$\cos^5\varphi+5i\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi-$$
$$-10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi+$$
$$+i\sin^5\varphi=\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi.$$

Остается приравнять действительные и мнимые части равенства:

$$\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.\ ▲$$

445. Дано комплексное число $z=2-2i$. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

446. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=-12+5i$.

447. Вычислить по формуле Муавра выражение $(\cos 2^\circ+i\sin 2^\circ)^{45}$.

448. Вычислить по формуле Муавра $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

449. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=1+\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ$.

450. Вычислить выражение $(2+3i)^3$.

451. Вычислить выражение $\frac{(1-2i)(2-3i)}{(3-4i)(4-5i)}$.

452. Вычислить выражение $1/(3-2i)^2$.

453. Представить в тригонометрической форме комплексное число $5-3i$.

454. Представить в тригонометрической форме комплексное число $-1+i$.

455. Вычислить выражение $\dfrac{(\cos 77^\circ + i \sin 77^\circ)(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ)}{\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ}$.

456. Вычислить выражение $\dfrac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}+i)}$, предварительно представив в тригонометрической форме множители в числителе и знаменателе.

457. Найти все значения $\sqrt[4]{i}$.

458. Решить двучленное уравнение $w^3 - 4\sqrt{2}(1+i) = 0$.

459. Выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

460. Показать, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_2 - z_1|$.

△ Имеем $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$, откуда

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

т. е. $|z_2 - z_1|$ равно расстоянию между данными точками. ▲

461. Какая линия описывается точкой z, удовлетворяющей уравнению $|z - c| = R$, где c — постоянное комплексное число, а $R > 0$?

462. Каков геометрический смысл неравенств: 1) $|z - c| < R$; 2) $|z - c| > R$?

463. Каков геометрический смысл неравенств: 1) $\operatorname{Re} z > 0$; 2) $\operatorname{Im} z < 0$?

2. Ряды с комплексными членами. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots$, где $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Постоянное число $c = a + bi$ называется *пределом* последовательности $z_1, z_2, z_3, \ldots$, если для всякого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что все значения z_n с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|z_n - c| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

Необходимое и достаточное условие существования предела последовательности комплексных чисел состоит в следующем: число $c = a + bi$ является пределом последовательности комплексных чисел $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, $x_3 + iy_3, \ldots$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Ряд

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots, \tag{1}$$

членами которого являются комплексные числа, называется *сходящимся*, если n-я частичная сумма ряда S_n при $n \to \infty$ стремится к определенному конечному пределу. В противном случае ряд (1) называется *расходящимся*.

Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды с действительными членами

$$\operatorname{Re} w_1 + \operatorname{Re} w_2 + \operatorname{Re} w_3 + \ldots \tag{2}$$

и

$$\operatorname{Im} w_1 + \operatorname{Im} w_2 + \operatorname{Im} w_3 + \ldots. \tag{3}$$

Если суммой ряда (2) является число S', а суммой ряда (3) — число S'', то суммой ряда (1) служит комплексное число $S = S' + iS''$.

Если ряд

$$w_1+w_2+w_3+\ldots \text{ (где } w_n=u_n+iv)$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=0$ $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{n\to\infty} u_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n=0\right)$.

Если сходится ряд

$$|w_1|+|w_2|+|w_3|+\ldots+|w_n|+\ldots,$$

то сходится и ряд

$$w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n+\ldots.$$

В этом случае последний ряд называется *абсолютно сходящимся.*

Пусть дан степенной ряд

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+\ldots,$$

где $z_0, a_0, a_1, a_2, \ldots$ — комплексные числа, причем коэффициенты ряда отличны от нуля, а z — комплексное переменное.

Этот ряд сходится в круге $|z-z_0|<R$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|$, и расходится вне указанного круга, т. е. при значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|>R$.

464. Исследовать сходимость ряда

$$(1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}i\right)+\ldots.$$

△ Ряды

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots \text{ и } 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$$

сходятся, так как они составлены из членов бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Следовательно, сходится и заданный ряд с комплексными членами.

Найдем суммы этих прогрессий:

$$S_1=\frac{1}{1-1/2}=2,\ S=\frac{1}{1-1/3}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, сумма рассматриваемого ряда есть комплексное число $S=2+(3/2)\,i$. ▲

465. Исследовать сходимость ряда

$$(1+0{,}1i)+\left(\frac{1}{2}+0{,}01i\right)+\left(\frac{1}{3}+0{,}001i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{10^n}\right)+\ldots.$$

△ Рассмотрим ряды

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \text{ и } 0{,}1+0{,}01+0{,}001+\ldots+(0{,}1)^n+\ldots.$$

Первый из них расходится, следовательно, расходится и данный ряд с комплексными членами. ▲

466. Исследовать сходимость ряда

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i\right)+\ldots.$$

△ Ряд расходится, так как общий его член $w_n=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n+1}{n+2}i$ не стремится к нулю (в этом рекомендуем убедиться самостоятельно). ▲

467. Показать, что ряд

$$\frac{1+i}{2}+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2+\left(\frac{1+i}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1+i}{2}\right)^n+\ldots$$

сходится абсолютно.

△ Так как $1+i=\sqrt{2}\,[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$, то

$$w_n=\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=\left[\frac{\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)}{\sqrt{2}}\right]^n=\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

Следовательно, $|w_n|=1/2^{n/2}$. Составим ряд из модулей:

$$\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n/2}}+\ldots.$$

Этот ряд, члены которого образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, сходится; следовательно, заданный ряд с комплексными членами сходится абсолютно. ▲

468. Найти область сходимости ряда

$$\frac{\sqrt{3}+i}{3}(z-i)+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^2(z-i)^2+\ldots+\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n(z-i)^n+\ldots.$$

△ Имеем

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^n,\quad a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n+1},\quad \frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{3}+i},$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{3}{|\sqrt{3}+i|}=\frac{3}{\sqrt{3+1}}=\frac{3}{2},\quad R=\frac{3}{2}.$$

Областью сходимости ряда является круг $|z-i|<3/2$. ▲

469. Показать, что ряд

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{125}-\frac{1}{8}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{5^n}-\frac{i}{2^n}\right)+\ldots$$

сходится и найти его сумму.

470. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2^2}i\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2^3}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{i}{2^n}\right)+\ldots.$$

471. Исследовать сходимость ряда с общим членом $w_n=\frac{1}{n!}+\frac{i}{n}$.

472. Показать, что ряд

$$1+\frac{1}{2!}(1+i)+\frac{1}{3!}(1+i)^2+\ldots+\frac{1}{n!}(1+i)^{n-1}+\ldots$$

сходится абсолютно.

473. Найти область сходимости ряда

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots.$$

474. Найти область сходимости ряда

$$(z-1-i)+2!\,(z-1-i)^2+\ldots+n!\,(z-1-i)^n+\ldots.$$

3. Показательная и тригонометрические функции комплексного переменного. *Показательная и тригонометрические функции комплексного переменного* z определяются равенствами, верными для любого z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots .$$

Эти ряды сходятся во всей комплексной плоскости.

Между указанными функциями существуют следующие соотношения:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z, \tag{1}$$

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z, \tag{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \tag{4}$$

называемые *формулами Эйлера.*

С помощью формулы (1) комплексное число, заданное в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, может быть представлено в показательной форме $z = re^{\varphi i}$.

475. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = 3 + i\sqrt{3}$.

△ Находим $r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3) = \pi/6$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа имеет вид $z = 2\sqrt{3}\,[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$, а показательная форма — вид $z = 2\sqrt{3}e^{\pi i/6}$. ▲

476. Представить в показательной форме число $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

△ Имеем $r = \sqrt{2+2} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{2}/\sqrt{2} = -1$, $\varphi = -\pi/4$, т. е. $z = 2e^{-\pi i/4}$. ▲

477. Записать в алгебраической форме $e^{\pi i/2}$.

△ Воспользуемся формулой (1):

$$e^{\pi i/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i. \ ▲$$

478. С помощью формулы Эйлера доказать, что

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

△ Так как $\cos x = (e^{xi} + e^{-xi})/2$, то

$$\cos^3 x = \frac{e^{3xi} + 3e^{xi} + 3e^{-xi} + e^{-3xi}}{8} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3xi} + e^{-3xi}}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x. \ ▲$$

479. Представить в показательной форме число $z = \sqrt{3} + i$.

480. Представить в показательной форме число $-i$.

481. Записать в алгебраической форме $e^{\pi i}$.

482. Показать, что $\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$.

483. Выразить $\sin^3 x$ линейно через $\sin x$ и $\sin 3x$.

484. С помощью формулы Эйлера показать, что i^i имеет бесчисленное множество значений, которые все являются действительными.

§ 8. РЯД ФУРЬЕ

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{1}$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Если ряд (1) сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, т. е. $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Теорема Дирихле. *Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной за исключением конечного числа точек разрыва I рода (т. е. удовлетворяет так называемым условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма $S(x)$ этого ряда:*

1) *$S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$, лежащих внутри сегмента $[-\pi, \pi]$;*

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$, *где x_0 — точка разрыва I рода функции $f(x)$;*

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ *на концах промежутка, т. е. при $x = \pm\pi$.*

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[-l, l]$, где l — произвольное число, то при выполнении на этом сегменте условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{m\pi x}{l}\, dx, \quad b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx.$$

В случае, когда $f(x)$ — четная функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l},$$

где

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

В случае, когда $f(x)$ — нечетная функция, ее ряд Фурье содержит только синусы, т. е.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi x}{l},$$

где

$$b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

Если функция $f(x)$ задана на сегменте $[0, l]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно доопределить ее на сегменте $[-l, 0]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной на сегменте $[-l, l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках сегмента $[-l, 0]$ находились из условия $f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. В первом случае функция $f(x)$ на сегменте $[-l, l]$ будет четной, а во втором — нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции (a_m в первом случае и b_m — во втором) можно определить по вышеприведенным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

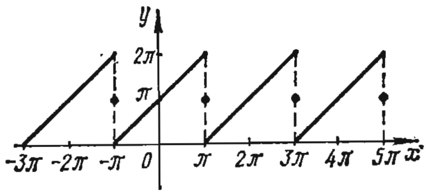

Рис. 29

485. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π, заданную в интервале $(-\pi, \pi)$ уравнением $f(x) = \pi + x$.

△ Графиком этой функции в интервале $(-\pi, \pi)$ является отрезок, соединяющий точки $(-\pi; 0)$ и $(\pi; 2\pi)$. На рис. 29 изображен график функции $y = S(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Эта сумма является периодической функцией с периодом 2π и совпадает с функцией $f(x)$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Определяем коэффициенты ряда Фурье. Сначала находим

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx.$$

Второй интеграл равен нулю как интеграл от нечетной функции, взятый по интервалу, симметричному относительно начала координат. Таким образом,

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Далее, находим коэффициенты a_m. Имеем

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\cos mx\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos mx\,dx.$$

Нетрудно видеть, что оба интеграла равны нулю (подынтегральная функция второго интеграла является нечетной как произведение четной функции на нечетную). Итак, $a_m=0$, т. е. $a_1=a_2=a_3=\ldots=0$.

Найдем теперь коэффициенты b_m:

$$b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi+x)\sin mx\,dx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin mx\,dx.$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральная функция второго интеграла — четная как произведение двух нечетных функций. Таким образом,

$$b_m=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin mx\,dx.$$

Интегрируя по частям, получим $u=x$, $dv=\sin mx\,dx$, $du=dx$, $v=-(1/m)\cos mx$, т. е.

$$b_m=-\frac{2x}{m\pi}\cos mx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{m\pi}\int_0^{\pi}\cos mx\,dx=-\frac{2}{m}\cdot\cos m\pi+\frac{2}{\pi m^2}\sin mx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{m}(-1)^m=\frac{2}{m}(-1)^{m+1}.$$

Следовательно, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\pi+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin mx=$$

$$=\pi+2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right).\ \blacktriangle$$

486. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2, заданную на сегменте $[-1, 1]$ уравнением $f(x)=x^2$ (рис. 30).

△ Рассматриваемая функция является четной. Ее график — дуга параболы, заключенная между точками $(-1; 1)$ и $(1; 1)$. Так как $l=1$, то

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=\frac{2}{3},$$

$$a_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=2\int_0^1 x^2\cos m\pi x\,dx.$$

Здесь нужно дважды проинтегрировать по частям:

1) $u=x^2$, $dv=\cos m\pi x\,dx$, $du=2x\,dx$, $v=\frac{1}{\pi m}\sin m\pi x$; $a_m=\frac{2x^2}{m\pi}\sin m\pi x\Big|_0^1-$

$$-\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\sin m\pi x\,dx=-\frac{4}{m\pi}\int_0^1 x\sin m\pi x\,dx;$$

2) $u=x$, $dv=\sin m\pi x\,dx$, $du=dx$, $v=-\frac{1}{m\pi}\cos m\pi x$; $a_m=\frac{4x}{m^2\pi^2}\times$

$$\times\cos m\pi x\Big|_0^1-\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^1\cos m\pi x\,dx=\frac{4}{m^2\pi^2}(-1)^m.$$

Так как рассматриваемая функция — четная, то $b_m=0$. Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi x-\frac{\cos 2\pi x}{2^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}-\frac{\cos 4\pi x}{4^2}+\ldots\right). \blacktriangle$$

487. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на полупериоде $[0, 2]$ уравнением $f(x)=x-x^2/2$.

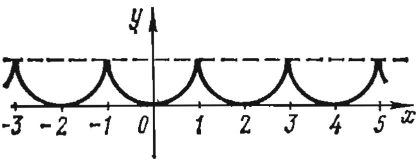

Рис. 30

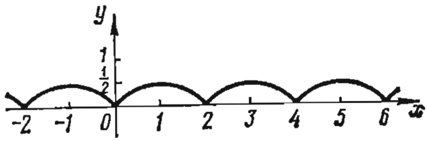

Рис. 31

△ Функция может быть разложена в ряд Фурье бесчисленным количеством способов. Рассмотрим два наиболее важных варианта разложения.

1) Доопределим функцию $f(x)$ на сегменте $[-2, 0]$ четным образом (рис. 31). Имеем $l=2$,

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{2}{3},$$

$$a_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Интегрируем по частям:

$$u=x-\frac{1}{2}x^2,\ dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\ du=(1-x)\,dx,\ v=\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m=\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Еще раз интегрируем по частям:

$$u=1-x,\ dv=\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx,\ du=-dx,\ v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$a_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{4}{m^2\pi^2}\cos m\pi-\frac{4}{m^2\pi^2}=-\frac{4}{m^2\pi^2}[1+(-1)^m],\ b_m=0.$$

Итак,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^m}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x+\dots\right).$$

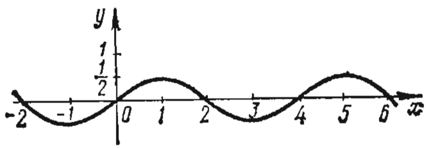

Рис. 32

2) Доопределим функцию $f(x)$ на сегменте $[-2, 0]$ нечетным образом рис. 32):

$$b_m=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=x-\frac{1}{2}x^2,\ \ dv=\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx,\ du=(1-x)\,dx,\ v=-\frac{2}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=-\frac{2}{m\pi}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{2}{m\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx;$$

$$u=1-x,\ dv=\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx,\ du=-dx,\ v=\frac{2}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{2};$$

$$b_m=\frac{4}{m^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2+\frac{4}{m^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{m\pi x}{2}\,dx=$$

$$=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cos\frac{m\pi x}{2}\Big|_0^2=-\frac{8}{m^3\pi^3}\cos m\pi+\frac{8}{m^3\pi^3}=$$

$$=\frac{8}{m^3\pi^3}[1-(-1)^m];\ a_m=0\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Итак,

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^m}{m^3}\sin\frac{m\pi x}{2}=$$

$$=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\cdot\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\cdot\sin\frac{5\pi x}{2}+\dots\right).\ \blacktriangle$$

488. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с периодом $2l$ (рис. 33), заданную на сегменте $[-l, l]$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } -l\leqslant x\leqslant 0, \\ x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant l/2, \\ l/2 & \text{при } l/2\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

$\triangle$ Находим

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{2}x\Big|_{l/2}^{l}=\frac{l}{8}+\frac{l}{4}=\frac{3}{8}l;$$

$$a_m=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{l}\int_{l/2}^{l}\frac{l}{2}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

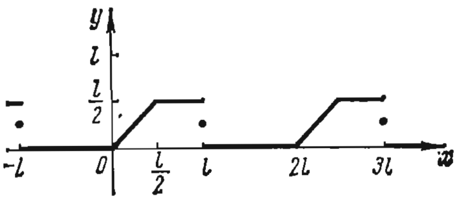

Рис. 33

К первому интегралу применяем интегрирование по частям:

$$u=x,\ dv=\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx;\ du=dx,\ v=\frac{l}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l},$$

откуда

$$a_m=\frac{x}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{1}{m\pi}\int_{0}^{l/2}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{l}{2m\pi}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=\frac{l}{2m\pi}\cdot\sin\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{l}{2m\pi}\left(\sin m\pi-\sin\frac{m\pi}{2}\right)=\frac{l}{m^2\pi^2}\left(\cos\frac{m\pi}{2}-1\right).$$

Определяем коэффициенты b_m:

$$b_m=\frac{1}{l}\int_{0}^{l/2} x\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{l/2}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

К первому интегралу применяем интегрирование по частям:

$$u=x,\ dv=\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx,\ du=dx,\ v=-\frac{l}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}.$$

Имеем

$$b_m=-\frac{x}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}+\frac{1}{m\pi}\int_0^{l/2}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l}=$$

$$=-\frac{l}{2m\pi}\cos\frac{m\pi}{2}+\frac{l}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{l}\Big|_0^{l/2}-\frac{l}{2m\pi}\left(\cos m\pi-\cos\frac{m\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{l}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{2}-\frac{l}{2m\pi}(-1)^m.$$

Если $m=1$, то $a_1=-\dfrac{l}{\pi^2}$, $b_1=\dfrac{l}{\pi^2}+\dfrac{l}{2\pi}=l\cdot\dfrac{2+\pi}{2\pi^2}$.

» $m=2$, » $a_2=-\dfrac{l}{2\pi^2}$, $b_2=-\dfrac{l}{4\pi}$.

» $m=3$, » $a_3=-\dfrac{l}{9\pi^2}$, $b_3=-\dfrac{l}{9\pi^2}+\dfrac{l}{6\pi}=l\cdot\dfrac{3\pi-2}{18\pi^2}$.

» $m=4$, » $a_4=0$, $b_4=-\dfrac{l}{8\pi}$.

» $m=5$, » $a_5=-\dfrac{l}{25\pi^2}$, $b_5=\dfrac{l}{25\pi^2}+\dfrac{l}{10\pi}=l\cdot\dfrac{2+5\pi}{50\pi^2}$.

. . . .

Следовательно,

$$f(x)=l\left[\frac{3}{16}+\left(-\frac{1}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2+\pi}{2\pi^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\right.$$
$$+\left(-\frac{1}{2\pi^2}\cos\frac{2\pi x}{l}-\frac{1}{4\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{l}+\frac{-2+3\pi}{18\pi^2}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots\right].\ \blacktriangle$$

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T, заданную на указанном сегменте.

489. $f(x)=x$; $T=2\pi$; $[-\pi,\ \pi]$.

490. $f(x)=|x|$; $T=2$; $[-1,\ 1]$.

491. $f(x)=e^x$; $T=2\pi$; $[-\pi,\ \pi]$.

492. $f(x)=x^3$; $T=2\pi$; $[-\pi,\ \pi]$.

493. $f(x)=\pi-2x$; $T=2\pi$; $[0,\ \pi]$. Продолжить $f(x)$ на сегмент $[-\pi,\ 0]$: 1) четным образом; 2) нечетным образом.

494. $f(x)=\begin{cases}-h & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ h & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$ $T=2\pi$.

495. $f(x)=\begin{cases}-2x & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 3x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$ $T=2\pi$.

496. $f(x)=x^2$; $T=2\pi$; $[0,\ \pi]$. Продолжить $f(x)$ на сегмент $[-\pi,\ 0]$ нечетным образом.

497. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi<x<0,\\ 0 & \text{при } 0<x<\pi;\end{cases}$ $T=2\pi$.

498. $f(x)=\cos 2x$; $T=2\pi$; $[0,\ \pi]$. Разложить в ряд по синусам.

499. $f(x)=x$; $T=2$; $[0,\ 1]$. Разложить в ряд по синусам.

500. $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0<x\leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1<x\leqslant 2; \end{cases}$ $T=4$. Разложить в ряд по косинусам.

§ 9. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке оси Ox и абсолютно интегрируема вдоль всей оси $\left(\text{т. е. } \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx \text{ сходится}\right)$, то для нее справедлива *интегральная формула Фурье* (получаемая предельным переходом из ряда Фурье периодической функции с периодом $2l$ при $l\longrightarrow\infty$):

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos z(u-x)\,du$$

(в точках разрыва I рода по-прежнему за значение $f(x)$ принимается $(1/2)\,[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$, где x_0 — абсцисса точки разрыва).

Интеграл Фурье можно представить в *комплексной форме*:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,e^{iz(u-x)}\,du=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}\,dz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izu}f(u)\,du.$$

Для четной функции интеграл Фурье может быть представлен в виде

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\cos zx\,dz\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\cos zu\,du,$$

а для нечетной функции — в виде

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin zx\,dz\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\sin zu\,du.$$

С тремя последними формулами связаны так называемые интегральные преобразования Фурье:

1. *Преобразование Фурье общего вида*:

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)\,dx \quad (\textit{прямое}),$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-izx}F(z)\,dz \quad (\textit{обратное}).$$

2. *Косинус-преобразование Фурье* (для четных функций):

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos zx\,dx \text{ (\textit{прямое})},$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_c(z)\cos zx\,dz \text{ (\textit{обратное})}.$$

3. *Синус-преобразование Фурье* (для нечетных функций):

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin zx\,dx \text{ (\textit{прямое})},$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f_s(z)\sin zx\,dz \text{ (\textit{обратное})}.$$

Синус- и косинус-преобразования Фурье могут применяться к функциям, заданным лишь на положительной полуоси Ox, если они абсолютно интегрируемы вдоль этой полуоси и удовлетворяют на любом ее конечном отрезке условиям Дирихле. При этом синус-преобразование продолжает функцию $f(x)$ на отрицательную полуось нечетным образом, а косинус-преобразование — четным.

Примечание. В интегральных формулах Фурье все интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du$ понимаются в смысле *главного значения*, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} f(u)\,du.$$

501. Найти косинус- и синус-преобразования функции $f(x)=e^{-x}$ $(x\geqslant 0)$.

△ Имеем

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u}\cos zu\,du.$$

Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-u}\cos zu\,du=\frac{1}{z^2+1}$, то

$$f_c(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{z^2+1}.$$

Аналогично получаем

$$f_s(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{z}{z^2+1}.$$

В свою очередь, применив косинус- и синус-преобразования Фурье к функциям $f_c(z)$ и $f_s(z)$, получим функцию $f(x)$, т. е.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos zx}{z^2+1}\,dz=e^{-x},\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{z\sin zx}{z^2+1}\,dz=e^{-x}.$$

Отсюда получаем *интегралы Лапласа*:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{z \sin zx}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}. \blacktriangle$$

502. Пусть функция $f(x)$ определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < a; \\ 1/2 & \text{при} \quad x = a; \\ 0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти ее косинус- и синус-преобразования (рис. 34).

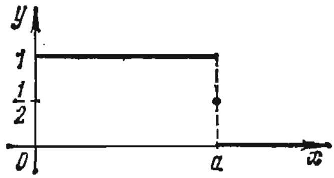

Рис. 34

$\triangle$ Находим косинус-преобразование данной функции:

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos zu\,du + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{+\infty} 0 \cdot \cos zu\,du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos zu\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin az}{z}.$$

Найдем теперь синус-преобразование:

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \sin zu\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin zu\,du + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} 0 \cdot \sin zu\,du =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin zu\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1-\cos az}{z}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin az}{z} \cos xz\,dz = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < a; \\ 1/2 & \text{при} \quad x = a; \\ 0 & \text{при} \quad x > a, \end{cases}$$

(*разрывный множитель Дирихле*) и

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos az}{z} \sin xz\,dz = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < a; \\ 1/2 & \text{при} \quad x = a; \\ 0 & \text{при} \quad x > a. \end{cases} \blacktriangle$$

503. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2; \\ 1 & \text{при} \quad |x| < 1/2; \\ -x+1 & \text{при} \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0 & \text{при} \quad 1 < |x|. \end{cases}$$

△ По формуле преобразования Фурье

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{izu}\, du,$$

используя вид функции $f(x)$, находим

$$\sqrt{2\pi}\, F(z)=\int_{-\infty}^{-1} 0\cdot e^{izu}\, du+\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\, e^{izu}\, du+$$

$$+\int_{-1/2}^{1/2} 1\cdot e^{izu}\, du+\int_{1/2}^{1}(-u+1)\, e^{izu}\, du+\int_{1}^{+\infty} 0\cdot e^{izu}\, du.$$

Первый и последний интегралы, очевидно, равны нулю. Обозначим остальные интегралы соответственно через I_1, I_2 и I_3 и вычислим их:

$$I_1=\int_{-1}^{-1/2}(u+1)\, e^{izu}\, du=\left[\frac{1}{zi}(u+1)\, e^{izu}-\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{-1}^{-1/2}=$$

$$=\frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{2}e^{-iz/2}-\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz/2}+\frac{1}{i^2z^2}e^{-iz}=\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi};$$

$$I_2=\int_{-1/2}^{1/2} e^{izu}\, du=\frac{1}{zi}e^{izu}\Big|_{-1/2}^{1/2}=\frac{1}{zi}\left(e^{zi/2}-e^{-zi/2}\right)=\frac{2\sin(z/2)}{z};$$

$$I_3=\int_{1/2}^{1}(-u+1)\, e^{izu}\, du=\left[\frac{1}{zi}(-u+1)\, e^{izu}+\frac{1}{i^2z^2}e^{izu}\right]_{1/2}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}.$$

Итак,

$$F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2zi}e^{-zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{-zi/2}-\frac{1}{z^2}e^{-zi}+\frac{2\sin(z/2)}{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{z^2}e^{zi}-\frac{1}{2zi}e^{zi/2}+\frac{1}{z^2}e^{zi/2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2\cos z}{z^2}+\frac{\sin(z/2)}{z}+\frac{2\cos(z/2)}{z^2}\right]. \blacktriangle$$

504. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos(x/2) & \text{при } |x|\leqslant\pi,\\ 0 & \text{при } |x|>\pi.\end{cases}$$

505. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x} & \text{при } -1\leqslant x<0;\\ e^{-x} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$$

506. Найти синус- и косинус-преобразования Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -1\leqslant x\leqslant -1/2,\\ 0 & \text{при } -1/2\leqslant x<1/2,\\ 1 & \text{при } 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

ГЛАВА IV

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Основные понятия. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называется *обыкновенным*; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например:

1) $x^2y'+5xy=y^2$ — обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка;

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4xy\dfrac{dy}{dx}=x^2$ — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка;

3) $y'^3+y''y'''=x$ — обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка;

4) $F(x,\ y,\ y',\ y'')=0$ — общий вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка;

5) $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ — уравнение в частных производных первого порядка.

В этом параграфе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, т. е. уравнения вида $F(x,\ y,\ y')=0$ или (в разрешенном относительно y' виде) $y'=f(x,\ y)$.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,\ y)$ в области D называется функция $y=\varphi(x,\ C)$, обладающая следующими свойствами: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0;\ y_0)\in D$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,\ C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Всякое решение $y=\varphi(x,\ C_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,\ C)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется *частным решением*.

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y'=f(x,\ y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется *задачей Коши*.

Построенный на плоскости xOy график всякого решения $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Таким образом, общему решению $y=\varphi(x,\ C)$ на плоскости xOy соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра — произвольной постоянной C, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0)=y_0$, — кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Если функция $f(x,\ y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в области D, то решение дифференциального уравнения $y'=f(x,\ y)$ при начальном условии $y(x_0)=y_0$ существует и единственно, т. е. через точку $(x_0;\ y_0)$

проходит единственная интегральная кривая данного уравнения (теорема Коши).

Особым решением называется такое решение, во всех точках которого условие единственности не выполняется, т. е. в любой окрестности каждой точки $(x;\ y)$ особого решения существуют по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку.

Особые решения не получаются из общего решения дифференциального управления ни при каких значениях произвольной постоянной C (в том числе и при $C = \pm\infty$).

Особым решением является *огибающая* семейства интегральных кривых (если она существует), т. е. линия, которая в каждой своей точке касается по меньшей мере одной интегральной кривой.

Например, общее решение уравнения $y' = \pm\sqrt{1-y^2}$ записывается в виде $y = \sin(x+C)$. Это семейство интегральных кривых имеет две огибающие: $y=1$ и $y=-1$, которые и будут особыми решениями.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение вида

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0$$

относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. Если ни одна из функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ не равна тождественно нулю, то в результате деления исходного уравнения на $f_2(x)\,\varphi_1(y)$ оно приводится к виду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0.$$

Почленное интегрирование последнего уравнения приводит к соотношению

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = C,$$

которое и определяет (в неявной форме) решение исходного уравнения. (Решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют *интегралом* этого уравнения.)

507. Решить уравнение $x(y^2-4)\,dx + y\,dy = 0$.

△ Разделив обе части уравнения на $y^2-4 \neq 0$, имеем

$$x\,dx + \frac{y\,dy}{y^2-4} = 0.$$

Интегрируя, находим

$$x^2 + \ln|y^2-4| = \ln|C|, \text{ или } y^2-4 = Ce^{-x^2}.$$

Это общее решение данного дифференциального уравнения.

Пусть теперь $y^2-4=0$, т. е. $y=\pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $y=\pm 2$ — решение исходного уравнения. Но оно не будет особым решением, так как его можно получить из общего решения при $C=0$. ▲

508. Найти частный интеграл уравнения $y'\cos x = y/\ln y$, удовлетворяющий начальному условию $y(0)=1$.

△ Полагая $y' = \frac{dy}{dx}$, перепишем данное уравнение в виде

$$\cos x\,\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{\ln y}{y}\,dy=\frac{dx}{\cos x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{\ln y}{y}\,dy=\int\frac{dx}{\cos x}+C,\ \text{или}\ \frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

Используя начальное условие $y=1$ при $x=0$, находим $C=0$. Окончательно получаем

$$\frac{1}{2}\ln^2 y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).\ \blacktriangle$$

509. Найти общий интеграл уравнения $y'=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$.

△ Полагая $y'=\frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, приходим к уравнению $\operatorname{ctg}y\,dy=\operatorname{tg}x\,dx$. Интегрируя, имеем

$$\int\operatorname{ctg}y\,dy=\int\operatorname{tg}x\,dx,\ \text{или}\ \ln|\sin y|=-\ln|\cos x|+\ln C.$$

Отсюда находим $\sin y=C/\cos x$, или $\sin y\cos x=C$ (общий интеграл). ▲

510. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)\,dy+y\,dx=0$ при начальном условии $y(1)=1$.

△ Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получим

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x^2},\ \text{или}\ \ln|y|=-\operatorname{arctg}x+C.$$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Теперь, используя начальное условие, найдем произвольную постоянную C; имеем $\ln 1=-\operatorname{arctg}1+C$, т. е. $C=\pi/4$. Следовательно,

$$\ln y=-\operatorname{arctg}x+\pi/4,$$

откуда получаем искомое частное решение $y=e^{\pi/4-\operatorname{arctg}x}$. ▲

Решим несколько геометрических и физических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям рассматриваемого типа.

511. Найти кривые, у которых сумма длин нормали и поднормали есть величина постоянная, равная a.

△ Длина поднормали равна $|yy'|$, а длина нормали равна $\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$. Таким образом, уравнение, которому должны удовлетворять искомые кривые, имеет вид

$$|yy'|+\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|=a.$$

Разрешая его относительно y', находим (учитывая оба возможных знака):

$$y'=\pm\frac{a^2-y^2}{2ay}.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{2y\,dy}{a^2-y^2}=\pm\frac{dx}{a}.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл: $\ln|a^2-y^2|=\mp x/a+\ln C$. Выполнив потенцирование, приводим уравнение искомых кривых к виду

$$y^2=a^2-Ce^{\mp x/a}.$$

Условию задачи отвечают только значения $C>0$. В самом деле, из уравнения семейства кривых находим:

$$|yy'|=\frac{|a^2-y^2|}{2a}, \quad \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|=\frac{a^2+y^2}{2a}.$$

Поэтому для выполнения условия $|yy'|+\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|=a$ нужно, чтобы $|a^2-y^2|=a^2-y^2$, т. е. $y^2<a^2$; отсюда и следует, что C принимает только положительные значения. ▲

512. Цилиндрический резервуар с высотой 6 м и диаметром основания 4 м поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса 1/12 м, сделанного в дне резервуара?

△ Для решения поставленной задачи надо воспользоваться формулой Бернулли, определяющей скорость v (в м/с) истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на h м ниже свободного уровня жидкости:

$$v=\sigma\sqrt{2gh}.$$

Здесь $g=9.8$ м/с^2 — ускорение силы тяжести, σ — постоянный (безразмерный) коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma\approx 0{,}6$).

Пусть через t с после начала истечения воды уровень оставшейся в резервуаре воды был равен h м, и за время dt с понизился еще на dh м ($dh<0$). Подсчитаем объем воды, вытекшей за этот бесконечно малый промежуток времени dt, двумя способами.

С одной стороны, этот объем $d\omega$ равен объему цилиндрического слоя с высотой $|dh|$ и радиусом, равным радиусу r основания резервуара ($r=2$ м). Таким образом, $d\omega=\pi r^2|dh|=-\pi r^2\,dh$.

С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара, а высота равна $v\,dt$ (где v — скорость истечения). Если радиус отверстия равен ρ ($\rho=1/12$ м), то $d\omega=\pi\rho^2 v\,dt=\pi\rho^2\sigma\sqrt{2gh}\,dt$.

Приравнивая эти два выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-r^2\,dh=\sigma\rho^2\sqrt{2gh}\,dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dt=-\frac{r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{dh}{\sqrt{h}};\quad t=C-\frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}.$$

При $t=0$ имеем $h=h_0=6$ м. Отсюда находим

$$C=\frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}.$$

Таким образом, связь между t и h определяется уравнением

$$t=\frac{2r^2}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0}-\sqrt{h}\right),$$

а полное время истечения T найдем, полагая в этой формуле $h=0$:

$$T=\frac{2r^2\sqrt{h_0}}{\sigma\rho^2\sqrt{2g}}.$$

Используя данные задачи ($r=2$ м, $h_0=6$ м, $\sigma=0{,}6$, $\rho=1/12$ м, $g=9{,}8$ м/с^2), находим $T\approx 1062$ с $\approx 17{,}7$ мин. ▲

513. В комнате, где температура 20° С, некоторое тело остыло за 20 мин от 100 до 60° С. Найти закон охлаждения тела; через сколько минут оно остынет до 30° С? Повышением температуры в комнате пренебречь.

△ В силу закона Ньютона (скорость охлаждения пропорциональна разности температур) можем записать:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-20), \text{ или } \frac{dT}{T-20}=k\,dt, \text{ т. е. } \ln(T-20)=kt+\ln C.$$

Если $t=0$, то $T=100°$; отсюда $C=80$. Если $t=20$, то $T=60°$; значит, $\ln 40=20k+\ln 80$, откуда $k=-(1/20)\ln 2$. Итак, закон охлаждения тела имеет вид

$$T-20=80\cdot e^{-(1/20)t\cdot\ln 2}=80\,(1/2)^{(t/20)}, \text{ или } T=20+80\,(1/2)^{(t/20)}.$$

При $T=30°$ имеем $10=80\,(1/2)^{t/20}$, или $(1/2)^{t/20}=1/8$. Таким образом, $t/20=3$, откуда $t=60$ мин. ▲

514. Определить время, необходимое для установления одинакового уровня жидкости в двух сообщающихся сосудах. Малое отверстие между сосудами имеет площадь ω м^2. Площади горизонтальных сечений первого и второго сосудов составляют S_1 м^2 и S_2 м^2, в начальный момент уровень жидкости в первом сосуде находился на высоте h_1 м от отверстия, а во втором — на высоте h_2 м ($h_2<h_1$).

△ Пусть через t с после начала истечения жидкости уровень воды в первом сосуде понизился до z_1 м, а во втором повысился до z_2 м. За дальнейший бесконечно малый промежуток времени dt с в первом сосуде уровень жидкости понизился на dz_1 м ($dz_1<0$), а во втором повысился на dz_2 м ($dz_2>0$).

Так как уменьшение объема жидкости в первом сосуде равно его увеличению во втором, то $S_1\,|dz_1|=S_2\,|dz_2|$, или $-S_1\,dz_1=S_2\,dz_2$, откуда $dz_2=-(S_1/S_2)\,dz_1$.

Если ввести обозначение $u=z_1-z_2$, то скорость протекания жидкости через отверстие между сосудами можно найти по формуле $v=\sigma\sqrt{2gu}$; она определяется формулой Бернулли (см. задачу 512), в которой следует положить, что отверстие находится на глубине $u=z_1-z_2$ под свободным уровнем жидкости.

Поэтому объем жидкости, протекающий за время dt, равный согласно предыдущему $-S_1\,dz_1$, в то же время равен $v\omega\,dt=\sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt$. Приравнивая эти выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-S_1\,dz_1=\sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt.$$

Но $du=dz_1-dz_2=dz_1+(S_1/S_2)\,dz_1$, т. е. $dz_1=S_2\,du/(S_1+S_2)$. Подставляя полученное для dz_1 выражение в предыдущее уравнение, находим дифференциальное уравнение, связывающее u и t:

$$-\frac{S_1S_2}{S_1+S_2}\,du=\sigma\omega\sqrt{2gu}\,dt, \text{ или } dt=-\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Интегрируя, находим

$$t=C-\frac{S_1S_2}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{u}\,.$$

При $t=0$ имеем $u=h_1-h_2$, откуда $C=\frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}$. Искомое время T, необходимое для выравнивания уровней в сосудах, найдем, полагая $u=0$:

$$T=C=\frac{S_1S_2\sqrt{2(h_1-h_2)}}{(S_1+S_2)\,\sigma\omega\sqrt{2g}}\,.\ \blacktriangle$$

Решить уравнения:

515. $\ln\cos y\,dx+x\operatorname{tg}y\,dy=0$.

516. $\frac{yy'}{x}+e^y=0$; $y(1)=0$.

517. $3e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1+e^x)\sec^2y\,dy=0$; $y(0)=\pi/4$.

518. $e^{1+x^2}\operatorname{tg}y\,dx-\frac{e^{2x}}{x-1}\,dy=0$; $y(1)=\pi/2$.

519. $(1+e^{2x})\,y^2\,dy=e^x\,dx$; $y(0)=0$.

520. $y'+\cos(x+2y)=\cos(x-2y)$; $y(0)=\pi/4$.

521. $y'=2^{x-y}$; $y(-3)=-5$.

522. $y\ln^3y+y'\sqrt{x+1}=0$; $y(-15/16)=e$.

523. $y/y'=\ln y$; $y(2)=1$.

524. $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$.

525. $\frac{x\,dy}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$.

526. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

527. $yy'=-2x\sec y$.

528. $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$; $y(0)=0$.

529. $y'=\operatorname{sh}(x+y)+\operatorname{sh}(x-y)$.

530. $y'=\sqrt{(a^2-y^2)/(a^2-x^2)}$.

531. $\frac{dx}{x(y-1)}+\frac{dy}{y(x+2)}=0$; $y(1)=1$.

532. $x(y^6+1)\,dx+y^2(x^4+1)\,dy=0$; $y(0)=1$.

533. $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})\,dx+(\sqrt{xy}+\sqrt{y})\,dy=0$.

534. $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}}+y'=0$; $y(\pi/4)=0$.

535. $y'=\frac{\cos y-\sin y-1}{\cos x-\sin x+1}$.

536. $\frac{4+y^2}{\sqrt{x^2+4x+13}}=\frac{3y+2}{x+1}\,y'$.

537. $\sec^2x\operatorname{tg}y\,dx+\sec^2y\operatorname{tg}x\,dy=0$; $y(\pi/4)=\pi/4$.

538. $5e^x\operatorname{tg}y\,dx+(1-e^x)\sec^2y\,dy=0$.

539. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

540. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Найти стоимость оборудования по истечении t лет.

541. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству непреобразованного вещества. Известно, что количество первого равно 31,4 г по истечении 1 ч и 9,7 г по истечении 3 ч. Определить: 1) сколько вещества было в начале процесса; 2) через сколько времени после начала останется 1% первоначального количества.

542. Цилиндрический резервуар длиной 6 м и диаметром 4 м расположен горизонтально. За какое время вода вытечет из резервуара, если отверстие радиуса 1/12 м находится на уровне самой нижней из образующих цилиндра?

543. В коническую воронку с отверстием площадью ω см^2 и углом 2α при вершине конуса налита вода до уровня H см над отверстием. Найти зависимость между переменной высотой уровня воды h в воронке и временем истечения t. Определить полное время истечения. Вычислить его при $\omega=0{,}1$ см^2, $\alpha=45°$, $H=20$ см.

544. Найти время, в течение которого вся вода вытечет из конической воронки, если известно, что половина воды вытекает за 2 мин.

3. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнение вида $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$ называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одного измерения. Функция $f(x, y)$ называется *однородной измерения* m, если

$$f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^m f(x, y).$$

Однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=f(y/x)$. С помощью подстановки $y=tx$ однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции t.

545. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2+2xy)\,dx+xy\,dy=0.$$

△ Здесь $P(x, y)=x^2+2xy$, $Q(x, y)=xy$. Обе функции — однородные второго измерения. Введем подстановку $y=tx$, откуда $dy=x\,dt+t\,dx$. Тогда уравнение примет вид

$$(x^2+2x^2t)\,dx+tx^2(x\,dt+t\,dx)=0, \text{ или } (x^2+2x^2t+t^2x^2)\,dx+tx^3\,dt=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dx}{x}+\frac{t\,dt}{(t+1)^2}=0; \quad \int\frac{dx}{x}+\int\frac{t\,dt}{(t+1)^2}=C.$$

Преобразуем второй интеграл:

$$\ln|x|+\int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}\,dt=C, \text{ или } \ln|x|+\ln|t+1|+\frac{1}{t+1}=C.$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции y $(t=y/x)$, получаем окончательный ответ:

$$\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}=C. \ ▲$$

546. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = \pi/2$.

△ Произведем подстановку $y/x = t$, откуда $y = tx$, $dy = x\,dt + t\,dx$. В результате получаем

$$x\,dt + t\,dx = (t + \sin t)\,dx;\quad x\,dt = \sin t\,dx;\quad \frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln|\operatorname{tg}(t/2)| = \ln|x| + \ln C, \text{ откуда } t/2 = \operatorname{arctg}(Cx).$$

Производя обратную замену $t = y/x$, находим общее решение исходного уравнения $y = 2x\operatorname{arctg}(Cx)$. Используя заданное начальное условие, получим $\pi/2 = 2\operatorname{arctg} C$, откуда $C = 1$. Итак, искомое частное решение имеет вид $y = 2x\operatorname{arctg} x$. ▲

547. Найти кривую, проходящую через точку $A(0;\ 1)$, для которой треугольник, образованный осью Oy, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиусом-вектором точки касания,— равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси Oy).

△ Пусть $y = f(x)$ — искомое уравнение кривой. Проведем касательную MN в произвольной точке $M(x;\ y)$ кривой до пересечения с осью Oy в точке N (рис. 35). Согласно условию, должно выполняться равенство $|ON| = |OM|$. Но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|ON|$ найдем из уравнения касательной $Y - y = y'(X - x)$, полагая $X = 0$, т. е. $Y = |ON| = y - xy'$.

Итак, приходим к однородному уравнению

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'.$$

Полагая $y = tx$, после замены и разделения переменных получим

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x}, \text{ или } \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \ln C - \ln x,$$

откуда

$$x^2 = C(C - 2y)$$

(семейство парабол, осью которых является ось Oy).

Подставляя координаты точки A в найденное общее решение, получим $0 = C(C - 2)$; из двух значений $C = 0$ и $C = 2$ годится лишь второе, поскольку при $C = 0$ парабола вырождается в ось Oy. Итак, искомой кривой является парабола $x^2 = 4(1 - y)$, или $y = 1 - x^2/4$. ▲

548. Найти форму зеркала, собирающего все параллельные лучи в одну точку.

△ Очевидно, что зеркало должно иметь форму поверхности вращения, ось которой параллельна направлению падающих лучей. Примем эту ось за ось Ox и найдем уравнение кривой $y = f(x)$, вращением которой образуется искомая поверхность.

Начало координат поместим в точку, в которой собираются отраженные лучи. Обозначим падающий луч через KM, а отраженный — через MO (рис. 36). Проведем касательную TT_1 и нормаль MN в точке M к искомой кривой. Тогда треугольник OMT — равнобедренный с вершиной в точке O (так как $\widehat{OMT} = \widehat{KMT_1} = \widehat{OTM} = \alpha$). Следовательно, $|OM| = |OT|$; но $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|OT|$ найдем из уравнения касательной $Y-y=y'(X-x)$, полагая $Y=0$; имеем $X=x-\frac{y}{y'}$, откуда $|OT|=|X|=-X=-x+\frac{y}{y'}$.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$\sqrt{x^2+y^2}=-x+\frac{y}{y'}$, или $(x+\sqrt{x^2+y^2})\,y'=y$, т. е. $(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dy-y\,dx=0$.

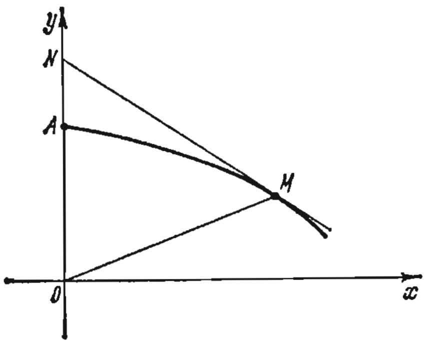

Рис. 35

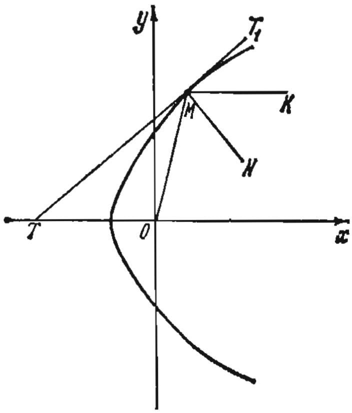

Рис. 36

Это дифференциальное уравнение является однородным. Для его интегрирования целесообразно ввести подстановку $x=ty$, принимая за аргумент y, а x (и t) за неизвестные функции этого аргумента. Тогда получим

$$\left(\sqrt{t^2y^2+y^2}+ty\right)dy-y\,(t\,dy+y\,dt)=0, \text{ или } \sqrt{t^2+1}\,dy-y\,dt=0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y}-\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=0;\ \ln y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+\ln C.$$

Отсюда $y=C\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ или, возвращаясь к первоначальным переменным x и y, имеем

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C}.$$

После упрощения находим окончательное решение в виде

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right).$$

Искомая кривая является параболой, а зеркало имеет форму параболоида вращения. ▲

549. Найти ортогональные траектории семейства парабол $x=ay^2$ (a — параметр семейства).

△ *Ортогональными траекториями* данного семейства кривых называются такие кривые другого семейства, каждая из которых пересекает каждую из кривых первого семейства под прямым углом.

Если уравнение заданного семейства $F(x, y, a)$, то для отыскания ортогональных траекторий нужно:

1) составить дифференциальное уравнение заданного семейства $f(x, y, y')=0$;

2) исходя из условия ортогональности $(y'_{\mathrm{I}}y'_{\mathrm{II}}=-1)$, заменить в этом дифференциальном уравнении y' на $-1/y'$;

3) проинтегрировать полученное уравнение $f(x, y, -1/y')=0$. Для решения поставленной задачи дифференцируем уравнение заданного семейства парабол: $1=2ayy'$. Исключая параметр семейства a из уравнений $x=ay^2$ и $1=2ayy'$, находим дифференциальное уравнение заданного семейства парабол: $2xy'=y$. Заменяем y' на $-1/y'$ и получаем дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$2x+yy'=0, \text{ или } 2x\,dx+y\,dy=0.$$

Интегрируя полученное уравнение, находим уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$x^2+\frac{1}{2}y^2=C, \text{ или } \frac{x^2}{C}+\frac{y^2}{2C}=1.$$

Таким образом, ортогональными траекториями заданного семейства парабол являются подобные друг другу эллипсы, у которых большая полуось (вертикальная) в $\sqrt{2}$ раз больше малой. ▲

Решить уравнения:

550. $xy'\sin(y/x)+x=y\sin(y/x)$.

551. $xy+y^2=(2x^2+xy)\,y'$.

552. $xy'\ln(y/x)=x+y\ln(y/x)$.

553. $xyy'=y^2+2x^2$.

554. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\,(y/x)$; $y(1)=\pi/2$.

555. $y'=(y/x)+\cos(y/x)$.

556. $y'=4+y/x+(y/x)^2$; $y(1)=2$.

557. $(x^2+y^2)\,dx-xy\,dy=0$.

558. $y'=(x+y)/(x-y)$.

559. $xy'=xe^{y/x}+y$; $y(1)=0$.

560. $xy'-y=\dfrac{x}{\mathrm{arctg}\,(y/x)}$.

561. $(x^4+6x^2y^2+y^4)\,dx+4xy(x^2+y^2)\,dy=0$; $y(1)=0$.

562. $xy'=2\left(y-\sqrt{xy}\right)$.

563. $3y\sin(3x/y)\,dx+[y-3x\sin(3x/y)]\,dy=0$.

564. Найти кривую, у которой произведение абсциссы любой точки, принадлежащей кривой, на отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox, равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат.

565. Найти ортогональные траектории семейства окружностей $(x-1)^2+(y-1)^2=R^2$.

4. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным. Уравнения вида

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, где $(\alpha;\ \beta)$ — точка пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$.

Если же $a_1b_2-a_2b_1=0$, то подстановка $a_1x+b_1y=t$ позволяет разделить переменные.

566. Найти общий интеграл уравнения

$$(2x+y+1)\,dx+(x+2y-1)\,dy=0.$$

△ Уравнение принадлежит к первому типу, поскольку $y'=-\dfrac{2x+y+1}{x+2y-1}$ и $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$. Находим точку пересечения прямых $2x+y+1=0$ и $x+2y-1=0$; имеем $x=\alpha=-1$; $y=\beta=1$.

Производим в исходном уравнении замену переменных, полагая $x=u+\alpha=$ $=u-1$, $y=v+\beta=v+1$; $dx=du$, $dy=dv$. Уравнение преобразуется к виду

$$(2u+v)\,du+(u+2v)\,dv=0.$$

В полученном однородном уравнении положим $v=ut$, откуда $dv=u\,dt+$ $+t\,du$; придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$2(t^2+t+1)\,u\,du+u^2(1+2t)\,dt=0,$$

общий интеграл которого есть $u\sqrt{t^2+t+1}=C$, или (после замены $t=v/u$ и возведения в квадрат)

$$u^2+uv+v^2=C^2.$$

Возвращаясь к переменным x и y $(u=x+1,\ v=y-1)$, после элементарных преобразований найдем общий интеграл исходного уравнения

$$x^2+y^2+xy+x-y=C_1$$

(здесь положено $C_1=C^2-1$). ▲

567. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+y+2)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0.$$

△ Уравнение принадлежит ко второму типу, поскольку $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$. Положим поэтому $y+x=t$, $dy=dt-dx$. Данное уравнение примет вид

$$(t+2)\,dx+(2t-1)(dt-dx)=0,\ \text{или}\ (3-t)\,dx+(2t-1)\,dt=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\int\frac{2t-1}{3-t}\,dt+\int dx=C,\ \text{или}\ -2t-5\ln|t-3|+x=-C.$$

Возвращаясь к старым переменным $(t=x+y)$, получим окончательный ответ:

$$x+2y+5\ln|x+y-3|=C.\ ▲$$

Решить уравнения:

568. $2(x+y)\,dy+(3x+3y-1)\,dx=0$; $y(0)=2$.

569. $(x-2y+3)\,dy+(2x+y-1)\,dx=0$.

570. $(x-y+4)\,dy+(x+y-2)\,dx=0$.

571. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'=(x+y-2)/(y-x-4)$, проходящую через точку $M(1;1)$.

5. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0,$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, называется *уравнением в полных дифференциалах*, т. е. левая часть такого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,\ y)$

в односвязной области. Если это уравнение переписать в виде $du=0$, то его общее решение определяется равенством $u=C$. Функция $u(x, y)$ может быть найдена по формуле

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy.$$

При этом в последней формуле нижние пределы интегралов (x_0 и y_0) произвольны; их выбор ограничен единственным условием — интегралы в правой части этой формулы должны иметь смысл (т. е. не быть расходящимися несобственными интегралами второго рода). Если условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ не выполняется, то в некоторых случаях можно привести рассматриваемое уравнение к указанному типу умножением его на так называемый *интегрирующий множитель*, который в общем случае является функцией от x и y: $\mu(x, y)$. Если у данного уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то он находится по формуле

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q\,dx},$$

где отношение $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q$ должно являться функцией только от x. Аналогично, интегрирующий множитель, зависящий только от y, определяется по формуле

$$\mu=e^{-\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/P\,dy},$$

где $\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/P$ должно являться функцией только от y (отсутствие в этих отношениях в первом случае y, а во втором x является признаком существования интегрирующего множителя рассматриваемого вида).

572. Найти общий интеграл уравнения

$$(e^x+y+\sin y)\,dx+(e^y+x+x\cos y)\,dy=0.$$

△ Здесь $P(x, y)=e^x+y+\sin y$, $Q(x, y)=e^y+x+x\cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y}=1+\cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1+\cos y$. Следовательно, левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x+y+\sin y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^y+x+x\cos y.$$

Проинтегрируем $\frac{\partial u}{\partial x}$ по x:

$$u=\int(e^x+y+\sin y)\,dx+C(y)=e^x+xy+x\sin y+C(y).$$

Найдем функцию $C(y)$, продифференцировав последнее выражение по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+x\cos y+C'(y).$$

Получаем уравнение

$$x+x\cos y+C'(y)=x+x\cos y+e^y,$$

откуда находим $C'(y)=e^y$, т. е. $C(y)=e^y$. Таким образом, общий интеграл уравнения имеет вид $e^x+xy+x\sin y+e^y=C$. ▲

573. Найти общий интеграл уравнения

$$(x+y-1)\,dx+(e^y+x)\,dy=0.$$

△ Здесь $P(x, y)=x+y-1$, $Q(x, y)=e^y+x$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$; таким образом, условие полного дифференциала выполнено, т. е. данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл по формуле

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy=C.$$

Взяв $x_0=0$, $y_0=0$, получим

$$\int_0^x (x+y-1)\,dx+\int_0^y e^y\,dy=C_1, \text{ или } \left[\frac{1}{2}x^2+xy-x\right]_0^x+e^y\Big|_0^y=C_1.$$

Подставляя пределы, находим

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=C_1, \text{ или } e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C, \text{ где } C=C_1+1. \ ▲$$

574. Найти общий интеграл уравнения

$$(x\cos y-y\sin y)\,dy+(x\sin y+y\cos y)\,dx=0.$$

△ Имеем

$$P(x, y)=x\sin y+y\cos y,\ Q(x, y)=x\cos y-y\sin y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\cos y+\cos y-y\sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos y,$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/ Q=\frac{x\cos y-y\sin y}{x\cos y-y\sin y}=1.$$

Поэтому данное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x. Найдем этот интегрирующий множитель:

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q\,dx}=e^{\int dx}=e^x.$$

Умножая исходное уравнение на e^x, получим уравнение

$$e^x(x\cos y-y\sin y)\,dy+e^x(x\sin y+y\cos y)\,dx=0,$$

которое, как нетрудно убедиться, уже является уравнением в полных дифференциалах; в самом деле, имеем $P_1(x, y)=e^x(x\sin y+y\cos y)$, $Q_1(x, y)=$ $=e^x(x\cos y-y\sin y)$. Отсюда

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[e^x(x\sin y+y\cos y)]=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y);$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[e^x(x\cos y-y\sin y)]=e^x[x\cos y-y\sin y+\cos y].$$

Эти производные равны и, следовательно, левая часть полученного уравнения имеет вид $du(x, y)$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x(x\cos y-y\sin y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\sin y+y\cos y).$$

Интегрируя первое из этих равенств по y, находим

$$u=\int e^x(x\cos y-y\sin y)\,dy+C(x)=xe^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y+C(x).$$

Найдем производную по x от полученной функции:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y+xe^x\sin y-e^x\sin y+e^x\,y\cos y+C'(x)=e^x(x\sin y+y\cos y)+C'(x).$$

Сравнивая найденное значение $\frac{\partial u}{\partial x}$ с $P(x, y)$, получим $C'(x)=0$, т. е. $C(x)=0$. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$u(x, y)=xe^x\sin y+e^x y\cos y-e^x\sin y=C$, или $e^x(x\sin y+y\cos y-\sin y)=C$. ▲

Решить уравнения:

575. $(x+\sin y)\,dx+(x\cos y+\sin y)\,dy=0$.
576. $(y+e^x\sin y)\,dx+(x+e^x\cos y)\,dy=0$.
577. $(xy+\sin y)\,dx+(0{,}5x^2+x\cos y)\,dy=0$.
578. $(x^2+y^2+y)\,dx+(2xy+x+e^y)\,dy=0$; $y(0)=0$.
579. $(2xye^{x^2}+\ln y)\,dx+\left(e^{x^2}+\frac{x}{y}\right)dy=0$; $y(0)=1$.
580. $[\sin y+(1-y)\cos x]\,dx+[(1+x)\cos y-\sin x]\,dy=0$.
581. $(y+x\ln y)\,dx+\left(\frac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$.
582. $(x^2+\sin y)\,dx+(1+x\cos y)\,dy=0$.
583. $ye^x\,dx+(y+e^x)\,dy=0$.
584. $(e^x\sin y+x)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy=0$.
585. $(\ln y-5y^2\sin 5x)\,dx+\left(\frac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0$; $y(0)=e$.
586. $(\arcsin x+2xy)\,dx+(x^2+1+\operatorname{arctg} y)\,dy=0$.
587. $(3x^2y+\sin x)\,dx+(x^3-\cos y)\,dy=0$.
588. $(e^{x+y}+3x^2)\,dx+(e^{x+y}+4y^3)\,dy=0$; $y(0)=0$.
589. $(\operatorname{tg} y-y\operatorname{cosec}^2 x)\,dx+(\operatorname{ctg} x+x\sec^2 y)\,dy=0$.
590. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx+\left(e^y-x-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$.

Проинтегрировать следующие уравнения, имеющие интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y:

591. $y\,dx-x\,dy+\ln x\,dx=0$ $(\mu=\varphi(x))$.
592. $(x^2\cos x-y)\,dx+x\,dy=0$ $(\mu=\varphi(x))$.
593. $y\,dx-(x+y^2)\,dy=0$ $(\mu=\varphi(y))$.
594. $y\sqrt{1-y^2}\,dx+\left(x\sqrt{1-y^2}+y\right)dy=0$ $(\mu=\varphi(y))$.

595. Доказать, что уравнение $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$, которое одновременно является и однородным, и уравнением в полных дифференциалах, имеет общий интеграл $Px+Qy=C$.

● Воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях, согласно которой $x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial P}{\partial y}=tP(x, y)$, где t — показатель однородности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли. Уравнение вида

$$y'+P(x)\,y=Q(x)$$

называется *линейным* (y и y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой). Если $Q(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется линейным *неоднородным*, а если $Q(x) \equiv 0$ — линейным *однородным*.

Общее решение однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ легко получается разделением переменных:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx; \ \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx; \ \ln y = -\int P(x)\,dx + \ln C,$$

или, наконец,

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

где C — произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения *методом Лагранжа*, варьируя произвольную постоянную, т. е. полагая $y = C(x)\,e^{-\int P(x)\,dx}$, где $C(x)$ — некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от x.

Для нахождения $C(x)$ нужно подставить y в исходное уравнение, что приводит к уравнению

$$C'(x)\,e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Отсюда

$$C(x) = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx + C,$$

где C — произвольная постоянная. Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right].$$

Линейные уравнения первого порядка можно интегрировать также *методом Бернулли*, который заключается в следующем. С помощью подстановки $y = uv$, где u и v — две неизвестные функции, исходное уравнение преобразуется к виду

$$u'v + uv' + P(x)\,uv = Q(x), \text{ или } u\,[v' + P(x)\,v] + vu' = Q(x).$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана совершенно произвольно (поскольку лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению), за v принимают л ю б о е ч а с т н о е р е ш е н и е уравнения $v' + P(x)\,v = 0$ $\left(\text{например, } v = e^{-\int P(x)\,dx}\right)$, обращающее, следовательно, в нуль коэффициент при u в последнем уравнении.

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$vu' = Q(x), \text{ или } u' = \frac{Q(x)}{v}, \text{ т. е. } u' = Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx},$$

откуда

$$u = C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx.$$

Общее решение исходного уравнения находится умножением u на v:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right].$$

Уравнение (нелинейное) вида

$$y'+P(x)y=Q(x)y^m,$$

где $m\neq 0$, $m\neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Его можно преобразовать в линейное уравнение, производя замену неизвестной функции при помощи подстановки $z=y^{1-m}$, в результате чего исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{1}{1-m}z'+P(x)z=Q(x).$$

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не надо предварительно преобразовывать в линейные, а сразу применять либо метод Бернулли, либо метод вариации произвольной постоянной.

596. Проинтегрировать уравнение $y'\cos^2 x+y=\operatorname{tg} x$ при начальном условии $y(0)=0$.

△ Интегрируем соответствующее однородное уравнение $y'\cos^2 x+y=0$; разделив переменные, получим

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\cos^2 x}=0,\ \ln y+\operatorname{tg} x=\ln C,\ y=Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Ищем решение исходного неоднородного уравнения в виде $y=C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$, где $C(x)$ — неизвестная функция. Подставляя в исходное уравнение $y=C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$ и $y'=C'(x)e^{-\operatorname{tg} x}-C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x$, придем к уравнению

$$\cos^2 x\,C'(x)e^{-\operatorname{tg} x}-C(x)e^{-\operatorname{tg} x}\sec^2 x\cos^2 x+C(x)e^{-\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} x,$$

или

$$C'(x)\cos^2 x\,e^{-\operatorname{tg} x}=\operatorname{tg} x,$$

откуда

$$C(x)=\int\frac{e^{\operatorname{tg} x}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx=e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x-1)+C.$$

Таким образом, получаем общее решение данного уравнения:

$$y=\operatorname{tg} x-1+Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Используя начальное условие $y(0)=0$, получим $0=-1+C$, откуда $C=1$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y=\operatorname{tg} x-1+e^{-\operatorname{tg} x}$. ▲

597. Проинтегрировать уравнение $y'-y\operatorname{th} x=\operatorname{ch}^2 x$.

△ Это — линейное уравнение. Решим его методом Бернулли. Полагая $y=uv$, имеем

$$u'v+v'u-uv\operatorname{th} x=\operatorname{ch}^2 x,\ \text{или}\ u(v'-v\operatorname{th} x)+u'v=\operatorname{ch}^2 x.$$

Полагаем $v'-v\operatorname{th} x=0$, откуда $\frac{dv}{v}=\operatorname{th} x\,dx$; интегрируя, находим $\ln v=\ln\operatorname{ch} x$ или $v=\operatorname{ch} x$ (постоянную интегрирования не вводим, так как достаточно найти какое-либо частное решение этого вспомогательного уравнения).

Для определения u имеем уравнение $u'v=\operatorname{ch}^2 x$ или $u'\operatorname{ch} x=\operatorname{ch}^2 x$, откуда находим $u=\int\operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C$. Умножение u на v, получаем общее решение

$$y=\operatorname{ch} x(\operatorname{sh} x+C).\ ▲$$

598. Проинтегрировать уравнение

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=\arcsin x+x.$$

△ Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$y'+\frac{xy}{1-x^2}=0;\ \frac{dy}{y}=-\frac{x\,dx}{1-x^2};\ \ln y=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+\ln C,$$

т. е. $y=C\sqrt{1-x^2}$. Полагаем теперь $y=C(x)\sqrt{1-x^2}$; тогда

$$y'=C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

После подстановки в исходное неоднородное уравнение получим

$$C'(x)\sqrt{1-x^2}-\frac{xC(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{1-x^2}C(x)\sqrt{1-x^2}=\arcsin x+x,$$

т. е.

$$C'(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируя, находим

$$C(x)=\int\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\sqrt{1-x^2}+C\right].\ ▲$$

599. Решить уравнение $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$.

△ Это—уравнение Бернулли. Проинтегрируем его методом вариации произвольной постоянной. Для этого интегрируем сначала соответствующее линейное однородное уравнение $y'+\frac{y}{x}=0$, решение которого $y=\frac{C}{x}$.

Ищем решение исходного уравнения Бернулли, полагая $y=\frac{C(x)}{x}$, $y'=\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}$. Подстановка y и y' в исходное уравнение дает

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=x^2\left[\frac{C(x)}{x}\right]^4,\ \text{или}\ \frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}.$$

Интегрируем полученное уравнение:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x};\quad -\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C;\quad C(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}.\ ▲$$

600. Проинтегрировать уравнение

$$y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x.$$

△ Это—также уравнение Бернулли. Проинтегрируем его методом Бернулли, для чего положим $y=uv$. Подставляя в исходное уравнение $y=uv$,

$y'=u'v+uv'$, сгруппируем члены, содержащие u в первой степени:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения $v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0$. Разделяя в нем переменные, находим

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2};\quad \ln v=\ln(1+x^2);\quad v=1+x^2$$

(постоянную интегрирования не вводим).

Для отыскания u имеем уравнение

$$u'v=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x,$$

или (поскольку $v=1+x^2$)

$$u'=\frac{4\sqrt{u}\operatorname{arctg} x}{1+x^2}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;\quad \sqrt{u}=\operatorname{arctg}^2 x+C.$$

Таким образом, $u=(\operatorname{arctg}^2 x+C)^2$ и $y=uv=(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x+C)^2$ есть общее решение исходного уравнения. ▲

601. Проинтегрировать уравнение $y=xy'+y'\ln y$.

△ Данное уравнение можно легко проинтегрировать, если поменять в нем ролями x и y: принять за аргумент y, а за неизвестную функцию x. Для этого нужно только (используя формулу дифференцирования обратной функции) положить $y'_x=1/x'_y$. Тогда данное уравнение преобразуется в следующее:

$$yx'_y=x+\ln y.$$

Это — линейное уравнение относительно x. Интегрируем соответствующее однородное уравнение $yx'=x$; имеем

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\quad x=Cy.$$

Ищем решение исходного неоднородного уравнения, полагая $x=C(y)y$, откуда $x'_y=C'(y)y+C(y)$. Подстановка в уравнение дает

$$C'(y)y^2+C(y)y=C(y)y+\ln y,\ \text{откуда}\ C'(y)=\frac{\ln y}{y^2},\ C(y)=C-\frac{1+\ln y}{y}.$$

Умножая $C(y)$ на y, находим решение исходного уравнения: $x=Cy-1-\ln y$. ▲

602. Проинтегрировать уравнение $(x^2\ln y-x)y'=y$.

△ Данное уравнение можно проинтегрировать с помощью того же преобразования, что и предыдущее. Принимая y за аргумент, x — за неизвестную функцию, преобразуем это уравнение к виду

$$x^2\ln y-x=yx',\ \text{или}\ yx'+x=x^2\ln y.$$

Это — уравнение Бернулли относительно x. Интегрируя соответствующее линейное однородное уравнение $yx'+x=0$, находим $x=C/y$.

Полагаем в исходном уравнении $x=\frac{C(y)}{y}$, откуда $x'=\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}$; приходим к следующему уравнению для определения $C(y)$:

$$C'(y)-\frac{C(y)}{y}+\frac{C(y)}{y}=\frac{[C(y)]^2}{y}\ln y, \text{ или } C'(y)=\frac{[C(y)]^2\ln y}{y^2}.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dC(y)}{[C(y)]^2}=\frac{\ln y}{y^2}dy;\ -\frac{1}{C(y)}=C-\frac{\ln y+1}{y};\ C(y)=\frac{y}{\ln y+1-Cy}.$$

Умножая $C(y)$ на $1/y$, находим общее решение исходного уравнения:

$$x=\frac{1}{\ln y+1-Cy}. \blacktriangle$$

Решить уравнения:

603. $xy'-y=x^2\cos x$.

604. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

605. $y'\cos x+y=1-\sin x$.

606. $y'+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$; $y(1)=0$.

607. $(1+x^2)y'+y=\operatorname{arctg} x$.

608. $y'\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$; $y(0)=0$.

609. $y'-\frac{y}{\sin x}=\cos^2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

610. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$; $y(e)=e^2/2$.

611. $y'\sin x-y\cos x=1$; $y(\pi/2)=0$.

612. $y'(x+y^2)=y$.

● Принять за неизвестную функцию x.

613. $y'+3y\operatorname{tg}3x=\sin 6x$; $y(0)=1/3$.

614. $(2xy+3)\,dy-y^2\,dx=0$.

● Принять за неизвестную функцию x.

615. $(y^4+2x)y'=y$.

● Принять за неизвестную функцию x.

616. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^{4/3}$.

617. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$.

618. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

619. $4xy'+3y=-e^x x^4 y^5$.

620. $y'+y=e^{x/2}\sqrt{y}$; $y(0)=9/4$.

621. $y'+\frac{3x^2y}{x^3+1}=y^2(x^3+1)\sin x$; $y(0)=1$.

622. $y\,dx+(x+x^2y^2)\,dy=0$.

● Принять за неизвестную функцию x.

623. $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0$.

624. $(y^2 + 2y + x^2)\, y' + 2x = 0;\ y(1) = 0$.

● Принять за неизвестную функцию x.

7. Уравнения вида $x = \varphi(y')$ и $y = \varphi(y')$. Эти уравнения легко интегрируются в параметрической форме, если положить $y' = p$ и принять p за параметр, через который следует выразить как x, так и y. В самом деле, полагая $y' = p$ в уравнении $x = \varphi(y')$, сразу получаем выражение для x через параметр $p: x = \varphi(p)$. Отсюда, дифференцируя, находим $dx = \varphi'(p)\, dp$, а так как $dy = y'\, dx = p\, dx$, то, следовательно, $dy = p\varphi'(p)\, dp$ и y находится интегрированием: $y = \int p\varphi'(p)\, dp + C$.

Таким образом, решение уравнения $x = \varphi(y')$ запишется в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)\, dp + C. \end{cases}$$

Аналогично, полагая $y' = p$ в уравнении $y = \varphi(y')$, находим $y = \varphi(p)$. Дифференцируя y, получаем $dy = \varphi'(p)\, dp$. Но по-прежнему $dy = p\, dx$. Таким образом, $p\, dx = \varphi'(p)\, dp$, откуда $dx = \dfrac{\varphi'(p)\, dp}{p}$ и x находим интегрированием: $x = \int \dfrac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C$. Общее решение уравнения $y = \varphi(y')$ имеет вид

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(p)\, dp}{p} + C, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

Если удается, в обоих случаях можно исключить параметр p и найти общий интеграл уравнения.

625. Проинтегрировать уравнение $x = y' \sin y' + \cos y'$.

△ Положим $y' = p$. Тогда $x = p \sin p + \cos p$. Продифференцируем это равенство:

$$dx = (\sin p + p\cos p - \sin p)\, dp = p \cos p\, dp$$

и подставим это значение dx в равенство $dy = p\, dx$:

$$dy = p^2 \cos p\, dp,$$

т. е.

$$y = \int p^2 \cos p\, dp = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C.$$

Таким образом, общее решение в параметрической форме имеет вид

$$\begin{cases} x = p \sin p + \cos p, \\ y = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C. \end{cases}$$ ▲

626. Проинтегрировать уравнение $y' = \operatorname{arctg}(y/y'^2)$.

△ Предварительно найдем $y = y'^2 \operatorname{tg} y'$. Положим $y' = p$; тогда $y = p^2 \operatorname{tg} p$. Продифференцируем это равенство: $dy = (2p \operatorname{tg} p + p^2 \sec^2 p)\, dp$ и, заменяя dy на $p\, dx$, получим $p\, dx = p(2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp$, откуда, сокращая на p и интегрируя, находим

$$x = \int (2 \operatorname{tg} p + p \sec^2 p)\, dp = p \operatorname{tg} p - \ln \cos p + C.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} y=p^2 \operatorname{tg} p, \\ x=p \operatorname{tg} p-\ln \cos p+C. \blacktriangle \end{cases}$$

627. Проинтегрировать уравнение $x=y'+\ln y'$.

$\triangle$ Положим $y'=p$. Таким образом, $x=p+\ln p$; дифференцируя, находим $dx=dp+\dfrac{dp}{p}$. Так как $dy=p\,dx$, то

$$dy=p\left(dp+\frac{dp}{p}\right)=(p+1)\,dp.$$

Интегрируя, находим $y=0{,}5\,(p+1)^2+C$.

Общее решение данного уравнения, записанное в параметрической форме, имеет вид

$$\begin{cases} x=p+\ln p, \\ y=0{,}5\,(p+1)^2+C. \end{cases}$$

Здесь параметр p легко исключить; из второго равенства получаем $p=\sqrt{2(y-C)}-1$ ($p>0$ и поэтому перед корнем надо взять знак плюс). Подставляя найденное для p выражение в первое равенство, находим общее решение уравнения в следующем виде:

$$x=\sqrt{2(y-C)}-1+\ln\left[\sqrt{2(y-C)}-1\right]. \blacktriangle$$

Решить уравнения:

628. $\arcsin(x/y')=y'$.

629. $y=e^{y'}(y'-1)$.

630. $x=2(\ln y'-y')$.

631. $y(1+y'^2)^{1/2}=y'$.

632. $x=2y'+3y'^2$.

633. $x=y'(1+e^{y'})$.

634. $x=e^{2y'}(2y'^2-2y'+1)$.

635. $y=y'\ln y'$.

8. Уравнения Лагранжа и Клеро. *Уравнением Лагранжа* называется дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно x и y, коэффициентами которого служат функции от y':

$$P(y')\,x+Q(y')\,y+R(y')=0.$$

Уравнение Лагранжа интегрируется следующим образом. Разрешим его относительно y и примем за параметр y', полагая $y'=p$:

$$y=xf(p)+\varphi(p).$$

[Здесь введены обозначения $f(y')=-P(y')/Q(y')$, $\varphi(y')=-R(y')/Q(y')$.] Дифференцируя полученное уравнение и заменяя в левой части dy на $p\,dx$, приходим к уравнению

$$p\,dx=f(p)\,dx+xf'(p)\,dp+\varphi'(p)\,dp.$$

Полученное уравнение — линейное относительно x (как функции от p) и поэтому может быть проинтегрировано. Если его решение есть $x=F(p, C)$, то общее решение исходного уравнения Лагранжа запишется в виде

$$\begin{cases} x=F(p,\ C), \\ y=xf(p)+\varphi(p)=F(p,\ C)\,f(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

Уравнением Клеро называется уравнение вида

$$y=xy'+\varphi(y'),$$

которое является частным случаем уравнения Лагранжа. Интегрируя его указанным способом, легко получить общее решение $y=Cx+\varphi(C)$, которое определяет семейство прямых на плоскости.

Однако уравнение Клеро, кроме общего решения, имеет еще и особое решение, определяемое следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=-\varphi'(p), \\ y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \end{cases}$$

Особое решение уравнения Клеро (оно существует, если $\varphi'(p)\neq \text{const}$) является огибающей семейства прямых, определяемых общим решением (иными словами, *общим решением уравнения Клеро служит семейство касательных к особому решению*).

Уравнение Лагранжа также может иметь особые решения, причем особыми решениями этого уравнения (если они существуют) являются общие касательные ко всем интегральным кривым, определяемым общим решением.

636. Проинтегрировать уравнение $y=xy'-e^{y'}$.

△ Это — уравнение Клеро. Положим $y'=p$ и перепишем уравнение в виде $y=px-e^p$. Дифференцируем его: $dy=pdx+xdp-e^p\,dp$; но $dy=p\,dx$, поэтому последнее уравнение примет вид $x\,dp-e^p\,dp=0$, или $(x-e^p)\,dp=0$. Таким образом, либо $dp=0$, либо $x=e^p$. Если положить $dp=0$, то $p=C$; подставляя это значение p в равенство $y=px-e^p$, получаем общее решение данного уравнения:

$$y=Cx-e^C.$$

Если положить $x=e^p$, то $y=pe^p-e^p=(p-1)\,e^p$, и приходим к особому решению исходного уравнения

$$\begin{cases} x=e^p \\ y=(p-1)\,e^p. \end{cases}$$

Исключая параметр p (в данном случае $p=\ln x$), находим особое решение в явном виде:

$$y=x(\ln x-1).$$

Проверим, что совокупность прямых, определяемых общим решением, есть семейство касательных к особой интегральной кривой.

Дифференцируя особое решение, находим $y'=\ln x$. Уравнение касательной к особой интегральной кривой в точке $M(x_0;\,y_0)$ [где $y_0=x_0(\ln x_0-1)$] запишется в виде

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),\ \text{или}\ y-x_0(\ln x_0-1)=\ln x_0\,(x-x_0),$$

что после упрощения дает $y=x\ln x_0-x_0$. Если здесь положить $\ln x_0=C$, то уравнение семейства касательных к особой интегральной кривой примет вид $y=Cx-e^C$, что и требовалось установить. ▲

637. Проинтегрировать уравнение $y=xy'^2+y'^2$.

△ Это — уравнение Лагранжа. Поступаем аналогично предыдущему, т. е. положим $y'=p$, тогда $y=xp^2+p^2$. Продифференцируем последнее равенство: $dy=p^2\,dx+2px\,dp+2p\,dp$. Производя замену $dy=p\,dx$, приходим к уравнению $p\,dx=p^2\,dx+2px\,dp+2p\,dp$. Отсюда, сокращая на p, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(1-p)\,dx=2(x+1)\,dp,\ \text{или}\ \frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p}.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln(x+1) = -2\ln|1-p| + \ln C; \; x+1 = C/(p-1)^2.$$

Используя данное уравнение $y=p^2(x+1)$, получим

$$y = Cp^2/(1-p^2).$$

Произведенное сокращение на p могло привести (и в данном случае привело) к потере особого решения; полагая $p=0$, находим из данного уравнения $y=0$: это—особое решение.

Итак,

$$\begin{cases} x+1 = C/(p-1)^2 \\ y = Cp^2/(p-1)^2 \end{cases} \text{—общее решение; } y=0\text{—особое решение.}$$

В общем решении параметр p можно исключить и привести его к виду $(\sqrt{y}+\sqrt{x+1})^2 = C$. ▲

Решить уравнения:

638. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$. **639.** $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$.

640. $y = xy' + y' - y'^2$. **641.** $y = x\left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'$.

642. $2y(y'+1) = xy'^2$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Основные понятия. *Дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Решением такого уравнения служит всякая n раз дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество, т. е.

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0.$$

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $y=y_0$, $y'=y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ при $x=x_0$, где x_0, y_0, y'_0, $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$—заданные числа, которые называются *начальными данными*, или *начальными условиями*.

Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется *общим решением* данного дифференциального уравнения n-го порядка, если при соответствующем выборе произвольных постоянных C_1, C_2, $\ldots$, C_n эта функция является решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях постоянных C_1, C_2, $\ldots$, C_n, называется *частным решением* этого уравнения. Для выделения из множества решений дифференциального уравнения определенного частного решения иногда используют и так называемые краевые условия. Эти условия (число которых не должно превышать порядка уравнения) задаются не в одной точке, а на концах некоторого промежутка. Очевидно, что краевые условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка (в конечном виде) удается произвести только в некоторых частных случаях.

2. Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$. Решение этого уравнения находится n-кратным интегрированием, а именно:

$$y^{(n)}=f(x),\quad y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1=f_1(x)+C_1,$$

$$y^{(n-2)}=\int [f_1(x)+C_1]\,dx=f_2(x)+C_1x+C_2,$$

. . . .

$$y=f_n(x)+\frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

где

$$f_n(x)=\underbrace{\int\int\int\ldots\int}_{n\ \text{раз}} f(x)\,dx^n.$$

Так как $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$, ... являются постоянными величинами, то общее решение может быть записано и так:

$$y=f_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

643. Найти частное решение уравнения $y''=xe^{-x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

△ Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y'=\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int [-xe^{-x}-e^{-x}+C_1]\,dx=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2,$$

или

$$y=(x+2)\,e^{-x}+C_1x+C_2.$$

Воспользуемся начальными условиями: $1=2+C_2$; $C_2=-1$; $0=-1+C_1$; $C_1=1$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$$y=(x+2)\,e^{-x}+x-1.$$

Это же решение можно найти и следующим образом, используя сразу заданные начальные условия:

$$y'=y'(0)+\int_0^x xe^{-x}\,dx=[-xe^{-x}-e^{-x}]_0^x=-xe^{-x}-e^{-x}+1;$$

$$y=y(0)+\int_0^x[-xe^{-x}-e^{-x}+1]\,dx=1+[(x+2)\,e^{-x}+x]_0^x=(x+2)e^{-x}+x-1. \blacktriangle$$

Решить уравнения:

644. $y^{\text{IV}}=\cos^2 x$; $y(0)=1/32$; $y'(0)=0$, $y''(0)=1/8$, $y'''(0)=0$.
645. $y'''=x\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.
646. $y'''\sin^4 x=\sin 2x$.
647. $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$.
648. $y'''=xe^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$, $y''(0)=2$.

3. Дифференциальные уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)})=0$, не содержащие искомой функции. Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных данного уравнения, т. е. полагая $y^{(k)}=z$. Тогда получим уравнение

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)})=0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

649. Найти общее решение уравнения $xy''=y' \ln(y'/x)$.

△ Полагая $y'=z$, преобразуем уравнение к виду

$$xz'=z\ln(z/x), \text{ или } z'=(z/x)\ln(z/x).$$

Это однородное уравнение первого порядка. Полагая $z/x=t$, откуда $z=tx$, $z'=t'x+t$, получим уравнение

$$t'x+t=t\ln t, \text{ или } \frac{dt}{t(\ln t-1)}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$$\ln(\ln t-1)=\ln x+\ln C_1, \text{ или } \ln t-1=C_1x,$$

откуда $t=e^{1+C_1x}$; возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'=xe^{1+C_1x}$. Следовательно,

$$y=\int xe^{1+C_1x}\,dx=\frac{1}{C_1}xe^{1+C_1x}-\frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1x}+C_2. \blacktriangle$$

650. Тело массы m падает по вертикали с некоторой высоты без начальной скорости. При падении тело испытывает сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости тела. Найти закон движения тела.

△ Введем обозначения: пусть s — пройденный телом путь, $v=\frac{ds}{dt}$ — скорость, $w=\frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение. На тело действуют силы: его вес $P=mg$ (по направлению движения) и сопротивление воздуха $F=kv^2=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ (против направления движения).

На основании второго закона Ньютона приходим к следующему дифференциальному уравнению движения тела:

$$mw=P-kv^2, \text{ или } m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Воспользуемся начальными условиями: если $t=0$, то $s=0$, $v=\frac{ds}{dt}=0$. Заменяя $\frac{ds}{dt}$ на v, перепишем уравнение в виде

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v^2,$$

откуда, полагая $\frac{mg}{k}=a^2$, имеем $\frac{dv}{a^2-v^2}=\frac{k}{m}dt$. Интегрируя, находим $(v\leqslant a)$:

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+v}{a-v}=\frac{k}{m}t+C_1.$$

Если $t=0$, то $v=0$, откуда $C_1=0$. Таким образом,

$$\ln\frac{a+v}{a-v}=\frac{2ak}{m}t.$$

Отсюда

$$v=a\frac{e^{2akt/m}-1}{e^{2akt/m}+1}=a\frac{e^{akt/m}-e^{-akt/m}}{e^{akt/m}+e^{-akt/m}}=a\,\mathrm{th}\,(akt/m).$$

Но $\frac{ak}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$; заменяя v на $\frac{ds}{dt}$, получаем для определения s уравнение

$$\frac{ds}{dt}=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

откуда, интегрируя, находим

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}\,a\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t+C_2.$$

Поскольку $s=0$ при $t=0$, имеем $C_2=0$.

Итак, закон падения тела при сопротивлении воздуха, пропорциональном квадрату скорости, описывается формулой

$$s=\frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t,$$

а скорость движения—формулой $v=a\,\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t$, здесь $a=\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Отметим, что скорость падения не возрастает беспредельно, так как $\lim\limits_{t\to\infty}v=a=$ $=\sqrt{\frac{P}{k}}$ $\left(\text{поскольку } \lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{th}\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t=1\right)$, где P—вес тела, причем практически скорость падения достигает своего предельного значения весьма быстро, отличаясь от него на весьма малую величину. Именно такую картину наблюдают на практике при затяжных прыжках с парашютом с большой высоты.

Решить уравнения:

651. $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1);\ y(2)=1,\ y'(2)=-1.$

652. $(1-x^2)\,y''-xy'=2.$

653. $2xy'''y''=y''^2-a^2.$

654. $(1+x^2)\,y''+1+y'^2=0.$

655. $y'''(x-1)-y''=0;\ y(2)=2;\ y'(2)=1,\ y''(2)=1.$

4. Дифференциальные уравнения вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, не содержащие независимой переменной. Уравнение этого вида допускает понижение порядка на единицу, если положить $y'=z$, а за новый аргумент принять сам y. В этом случае y'', y''', ... выразятся по формулам (они выводятся по правилу дифференцирования сложной функции) $y''=z\frac{dz}{dy}$, $y'''=z\times$ $\times\left[z\frac{d^2z}{d^2y}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]$, ... через z и производные от z по y, причем порядок уравнения понизится на единицу.

656. Решить уравнение $1+y'^2=yy''$.

△ Положим $y'=z$, $y''=z\frac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $1+z^2=yz\frac{dz}{dy}$; это— уравнение первого порядка относительно z с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{z\,dz}{1+z^2}=\frac{dy}{y};\ \ln(1+z^2)=2\ln y+2\ln C_1;\quad 1+z^2=C_1^2y^2;\quad z=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

Отсюда, возвращаясь к переменной y, имеем

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1},\qquad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx,\ \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right)=\pm(x+C_2),$$

или

$$y=\frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1}+e^{\mp(x+C_2)C_1}\right)=\frac{1}{C_1}\operatorname{ch}C_1(x+C_2)=C_1^*\operatorname{ch}\frac{x+C_2}{C_1^*}.\ ▲$$

657. Найти y' из уравнения $y''=b\sin y-ky'^2$ при начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

△ Положим $y'^2=z$; тогда $2y'y''=z'=y'\frac{dz}{dy}$, т. е. $y''=\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}$. Уравнение примет вид $\frac{1}{2}\frac{dz}{dy}=b\sin y-kz$. Это—линейное уравнение первого порядка относительно z:

$$\frac{dz}{dy}+2kz=2b\sin y.$$

Решая его методом Бернулли, т. е. используя подстановку $z=uv$, получим

$$u\frac{dv}{dy}+v\left(\frac{du}{dy}+2ku\right)=2b\sin y;$$

$$\frac{du}{dy}+2ku=0,\ u=e^{-2ky},\ dv=2be^{2ky}\sin y\,dy.$$

Интегрируя, находим

$$v=\frac{2b}{1+4k^2}e^{2ky}(2k\sin y-\cos y)+C$$

и

$$z=uv=Ce^{-2ky}+\frac{2b}{1+4k^2}(2k\sin y-\cos y)=y'^2.$$

Используем начальные условия: $C-\frac{2b}{1+4k^2}=0$, т. е. $C=\frac{2b}{1+4k^2}$, откуда получаем

$$y'=\pm\sqrt{\frac{2b}{1+4k^2}\left(e^{-2ky}+2k\sin y-\cos y\right)}.\ ▲$$

658. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен кубу нормали; искомая кривая должна проходить через точку $M(0;1)$ и иметь в этой точке касательную, составляющую с осью Ox угол 45°.

△ Так как радиус кривизны плоской кривой выражается формулой $R=(1+y'^2)^{3/2}y''$, а длина нормали $N=y\sqrt{1+y'^2}$, то дифференциальное уравнение задачи примет вид

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\left(y\sqrt{1+y'^2}\right)^3.$$

Отсюда, сократив на $(1+y'^2)^{3/2}$, приходим к уравнению $y''\cdot y^3=1$.

Полагая $y'=z$, $y''=z\cdot\frac{dz}{dy}$, получим для z уравнение $z\cdot\frac{dz}{dy}\cdot y^3=1$. Интегрируя его, находим

$$z\,dz=y^{-3}\,dy,\text{ или }\frac{1}{2}z^2=-\frac{1}{2}y^{-2}+\frac{1}{2}C_1,\text{ т. е. }z^2=C_1-y^{-2};$$

возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'^2=C_1-y^{-2}$.

Произвольную постоянную C_1 найдем из условия, что касательная в точке $M(0;\ 1)$ составляет с осью Ox угол $45°$, т. е. $\operatorname{tg}45°=y'_M=1$, или $y'(0)=1$. Следовательно, $1=C_1-1$, т. е. $C_1=2$.

Таким образом, для определения y получено уравнение первого порядка $y'^2=2-y^{-2}$, откуда $y'=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}$; разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2y^2-1}}=dx;\quad \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+\frac{1}{2}C_2;\quad y^2=\frac{1}{2}[(2x+C_2)^2+1].$$

Произвольную постоянную C_2 находим из условия прохождения кривой через точку $M(0;\ 1)$, т. е. $1=\frac{1}{2}[(2\cdot 0+C_2)^2+1]$; $C_2=1$. Следовательно, искомая кривая определяется уравнением

$$y^2=2x^2+2x+1.\ \blacktriangle$$

Решить уравнения:

659. $y''(2y+3)-2y'^2=0$.

660. $yy''-y'^2=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=2$.

661. $a^2y''^2=1+y'^2$.

662. $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

663. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$.

664. $y''(1+y)=y'^2+y'$.

665. $y''=y'/\sqrt{y}$.

5. Уравнения вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, однородные относительно $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Уравнение указанного вида допускает понижение порядка на единицу при замене $y'/y=z$, где z — новая неизвестная функция.

666. Решить уравнение $3y'^2=4yy''+y^2$.

△ Разделим обе части уравнения на y^2:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2-4\cdot\frac{y''}{y}=1.$$

Положим $\frac{y'}{y}=z$, откуда $\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}=z'$, или $\frac{y''}{y}=z'+z^2$. В результате получим уравнение

$$3z^2-4z^2-4z'=1,\text{ или }-4z'=1+z^2,\text{ т. е. }\frac{dz}{1+z^2}=-\frac{1}{4}dx.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{1}{4}x, \text{ или } z = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right), \text{ или } \frac{y'}{y} = \operatorname{tg}\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

Интегрируя последнее уравнение, получим

$$\ln y = 4 \ln \cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) + \ln C_2, \quad \text{или} \quad y = C_2 \cdot \cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right). \ \blacktriangle$$

667. Решить уравнение $y'^2 + yy'' = yy'$.

△ Хотя это уравнение принадлежит к предыдущему виду, его можно проинтегрировать более простым способом. В этом уравнении левая часть есть $(yy')'$, в силу чего уравнение принимает вид $(yy')' = yy'$, или $\dfrac{d(yy')}{yy'} = dx$. Отсюда $\ln(yy') = x + \ln C_1$, или $yy' = C_1 e^x$, т. е. $y dy = C_1 e^x dx$. Интегрируя, находим окончательный ответ:

$$y^2/2 = C_1 e^x + C_2. \ \blacktriangle$$

Решить уравнения:

668. $yy'' - y'^2 = 0$. **669.** $(y + y')y'' + y'^2 = 0$.

670. $2xy'''y'' = y''^2 - a^2$. **671.** $y'' = y'e^y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

672. Найти y' из уравнения $2yy'' = ky - y'^2$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

● Подстановка $y'^2 = z$.

673. Найти кривую, если проекция радиуса кривизны на ось Oy постоянна и равна a, а ось Ox касается искомой кривой в начале координат.

674. Найти кривую, у которой радиус кривизны в любой точке равен $\sec\alpha$, где α — угол, образованный с осью Ox касательной в соответствующей точке. Искомая кривая проходит через точку $M(0;\ 1)$ и касательная к кривой в этой точке параллельна оси Ox.

675. Тело, находившееся в начальный момент в жидкости, погружается в нее под действием собственного веса без начальной скорости. Сопротивление жидкости прямо пропорционально скорости тела. Найти закон движения тела, если его масса m.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Основные понятия. *Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + a_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = f(x). \qquad (1)$$

Здесь функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны в некотором промежутке (a, b).

Уравнение (1) называется линейным *неоднородным*, или уравнением *с правой частью*. Если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*. Однородное уравнение с той же левой частью, что и данное неоднородное, называется *соответствующим ему*.

Зная одно частное решение y_1 линейного однородного уравнения, можно с помощью линейной замены искомой функции $y=y_1\cdot\int z\,dx$ понизить порядок, а следовательно, и порядок соответствующего неоднородного уравнения на единицу. Полученное уравнение $(n-1)$-го порядка относительно z также является линейным.

676. Дано уравнение $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=x$ и известно частное решение $y_1=\ln x$ соответствующего однородного уравнения. Понизить порядок уравнения.

△ Воспользуемся подстановкой $y=\ln x\cdot\int z\,dx$, где z — новая неизвестная функция. Тогда, подставляя соответствующие производные

$$y'=\frac{1}{x}\int z\,dx+z\ln x,\quad y''=-\frac{1}{x^2}\int z\,dx+\frac{2z}{x}+z'\ln x,$$
$$y'''=\frac{2}{x^3}\int z\,dx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x$$

в данное уравнение, получим уравнение второго порядка

$$z''\ln x+\frac{2\ \ln x}{3}\cdot z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x. \ ▲$$

Примечание. Отметим, что применяя указанную подстановку к линейному уравнению второго порядка и учитывая, что линейное уравнение первого порядка интегрируется в квадратурах, можно проинтегрировать в квадратурах всякое линейное уравнение второго порядка, если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения.

677. Проинтегрировать уравнение $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, имеющее частное решение $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

△ Произведем замену $y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int z\,dx$; тогда

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\int z\,dx+\frac{\sin x}{x}z,$$
$$y''=\frac{\sin x}{x}z'+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^2}\cdot z-\frac{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}{x^3}\cdot\int z\,dx.$$

Получаем уравнение

$$\sin x\cdot z'+2\cos x\cdot z=0,\ \text{т. е.}\ z=\frac{C_1}{\sin^2 x}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int\frac{C_1\,dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}(C_2-C_1\operatorname{ctg} x)=C_2\cdot\frac{\sin x}{x}-C_1\frac{\cos x}{x}. \ ▲$$

678. Понизить порядок и проинтегрировать уравнение $y''\sin^2 x=2y$, имеющее частное решение $y=\operatorname{ctg} x$.

679. Уравнение $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=0$ имеет частное решение $y=x$. Понизить порядок и проинтегрировать это уравнение.

680. Уравнение $y''+(\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x)\,y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0$ имеет частное решение $y=\sin x$. Понизить порядок и проинтегрировать это уравнение.

2. Линейные однородные уравнения. Одним из замечательных свойств линейных уравнений является то, что общее решение таких уравнений можно найти по их известным частным решениям. Приведем теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения.

Теорема. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения уравнения*

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+a_2(x)\,y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)\,y=0,$$

то $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ есть общее решение этого уравнения (C_1, $C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные).

Примечание. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми в промежутке* (a, b), если они не связаны никаким тождеством

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — какие-нибудь постоянные, не равные нулю одновременно. Для случая двух функций это условие можно сформулировать и так: две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не является постоянной величиной: $y_1/y_2 \neq \text{const}$. Например: 1) $y_1=x$, $y_2=x^2$ — линейно независимы; 2) $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ — линейно независимы; 3) $y_1=2e^{3x}$, $y_2=5e^{3x}$ — линейно зависимы.

Достаточным условием линейной независимости n функций, непрерывных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка в промежутке (a, b), является то, что определитель Вронского (*вронскиан*) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ этих функций не равен нулю ни в одной точке промежутка (a, b), т. е.

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если данные n функций являются частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, то это условие (необращение в нуль) является не только достаточным, но и необходимым условием линейной независимости этих n решений.

Вронскиан n решений линейного однородного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\,y=0$$

связан с первым коэффициентом этого уравнения $a_1(x)$ *формулой Лиувилля — Остроградского*:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n]=W[y_1, y_2, \ldots, y_n]\big|_{x=x_0}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}$$

Совокупность n решений линейного однородного уравнения n-го порядка, определенных и линейно независимых в промежутке (a, b), называется *фундаментальной системой* решений этого уравнения.

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+a_1(x)\,y'+a_2(x)\,y=0$$

фундаментальная система состоит из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$; его общее решение находится по формуле

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x).$$

Если для такого уравнения известно одно частное решение $y_1(x)$, то второе его решение, линейно независимое с первым, можно найти по формуле

(являющейся следствием формулы Лиувилля — Остроградского)

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx.$$

Это дает возможность интегрировать линейные однородные уравнения второго порядка, для которых известно одно частное решение, сразу, не прибегая к понижению их порядка.

Так, в примере 677 для уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ известно решение $y_1(x)=\frac{\sin x}{x}$. Найдем по приведенной выше формуле второе решение:

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int \frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Рекомендуем решить этим способом примеры 678—680.

681. Показать, что $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ является общим решением уравнения $y''-9y=0$.

△ Подстановкой в уравнение легко убедиться в том, что функции $y_1=e^{3x}$ и $y_2=e^{-3x}$ являются его решениями. Эти частные решения линейно независимы, так как $y_1/y_2=e^{3x}/e^{-3x}=e^{6x}\neq\text{const}$, а потому они составляют фундаментальную систему решений и, следовательно, $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$ — общее решение. ▲

682. Дано уравнение $y'''-y'=0$. Составляют ли фундаментальную систему решений функции e^x, e^{-x}, $\operatorname{ch} x$, являющиеся, как легко проверить, решениями этого уравнения?

△ Для проверки линейной независимости этих решений вычислим вронскиан:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x\\ e^x & -e^{-x} & \operatorname{sh} x\\ e^x & e^{-x} & \operatorname{ch} x\end{vmatrix}.$$

Этот определитель равен нулю, так как элементы 1-й и 3-й строк одинаковы.

Следовательно, данные функции линейно зависимы, а потому составить общее решение по этим частным решениям нельзя. Тот же результат можно получить быстрее, поскольку $\operatorname{ch} x=(e^x+e^{-x})/2$ и, следовательно, данные три функции линейно зависимы. ▲

683. Уравнению $y''-y=0$ удовлетворяют два частных решения $y_1=\operatorname{sh} x$, $y_2=\operatorname{ch} x$. Составляют ли они фундаментальную систему?

684. Можно ли составить общее решение уравнения $y''+$

$+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0$ $(x\neq 0)$ по двум его частным решениям $y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sin x$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x$?

Установить, являются ли линейно независимыми в промежутке своего существования следующие функции:

685. $x+1$, $2x+1$, $x+2$.

686. $2x^2+1$, x^2-1, $x+2$.

687. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+a}$, $\sqrt{x+2a}$.

688. $\ln(2x)$, $\ln(3x)$, $\ln(4x)$.

3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. *Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — некоторые действительные числа. Для нахождения частных решений уравнения (1) составляют *характеристическое уравнение*

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0, \tag{2}$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями k, причем сама функция заменяется единицей. Уравнение (2) является уравнением n-й степени и имеет n корней (действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные).

Тогда общее решение дифференциального уравнения (1) строится в зависимости от характера корней уравнения (2):

1) каждому действительному простому корню k в общем решении соответствует слагаемое вида Ce^{kx};

2) каждому действительному корню кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида $(C_1+C_2x+\ldots+C_mx^{m-1})e^{kx}$;

3) каждой паре комплексных сопряженных простых корней $k^{(1)}=\alpha+\beta i$ и $k^{(2)}=\alpha-\beta i$ в общем решении соответствует слагаемое вида $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$;

4) каждой паре комплексных сопряженных корней $k^{(1)}=\alpha+\beta i$ и $k^{(2)}=\alpha-\beta i$ кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида
$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\ldots+C_{m-1}x^{m-1})\cos\beta x]+[(C_1'+C_2'x+\ldots+C_{m-1}'x^{m-1})\sin\beta x]$.

689. Найти общее решение уравнения $y''-7y'+6y=0$.

△ Составим характеристическое уравнение $k^2-7k+6=0$; его корни $k_1=6$, $k_2=1$. Следовательно, e^{6x} и e^x — частные линейно независимые решения, а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^x. \blacktriangle$$

690. Найти общее решения уравнения $y^{IV}-13y''+36y=0$.

△ Характеристическое уравнение имеет вид $k^4-13k^2+36=0$; его корням $k_{1,2}=\pm 3$, $k_{3,4}=\pm 2$ соответствуют линейно независимые частные решения e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} и e^{-2x}. Следовательно, общее решение

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}. \blacktriangle$$

691. Найти решение уравнения $\ddot{x}-\dot{x}-2x=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x=0$, $\dot{x}=3$ при $t=0$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-k-2=0$ имеет корни $k_1=2$, $k_2=-1$. Следовательно, общее решение $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$. Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2, \\ 3=2C_1-C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=1$, $C_2=-1$. Значит, решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям, имеет вид $y=e^{2t}-e^{-t}$. ▲

692. Найти решение уравнения $\ddot{x}-2\dot{x}=0$, удовлетворяющее краевым условиям $x=0$ при $t=0$ и $x=3$ при $t=\ln 2$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-2k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=2$. Следовательно, общее решение записывается в виде $x=C_1+C_2e^{2t}$. Подставляя краевые условия в найденное общее решение, получаем

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1+C_2e^{2\ln 2}=3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1+4C_2=3. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=-1$, $C_2=1$. Итак, $x=e^{2x}-1$ — искомое частное решение, удовлетворяющее заданным краевым условиям. ▲

693. Найти общее решение уравнения $y'''-2y''+y'=0$.

△ Характеристическое уравнение $k^3-2k^2+k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=k_3=1$. Здесь 1 является двукратным корнем, а поэтому линейно независимыми частными решениями служат 1, e^x, xe^x. Общее решение имеет вид

$$y=C_1+C_2e^x+C_3xe^x. \ ▲$$

694. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+13y=0$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-4k+13=0$ имеет корни $k=2\pm 3i$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, а потому им соответствуют частные решения $e^{2x}\cos 3x$ и $e^{2x}\sin 3x$. Следовательно, общее решение есть

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x). \ ▲$$

695. Материальная точка массы m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала; среда, в которой происходит движение, оказывает движению точки сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон движения.

△ Пусть $\dot{x}$ — скорость точки; $\ddot{x}$ — ее ускорение; на точку действуют две силы: восстанавливающая $f_1=-ax$ и сила сопротивления среды $f_2=-b\dot{x}$. Согласно второму закону Ньютона, имеем

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}-ax, \quad \text{или} \quad m\ddot{x}+b\dot{x}+ax=0.$$

Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его характеристическое уравнение $mk^2+bk+a=0$ имеет корни

$$k_{1,2}=(-b\pm\sqrt{b^2-4ma})/(2m).$$

1) Если $b^2-4ma>0$, то корни — действительные, различные и оба отрицательные; вводя для них обозначения

$$k_1=(-b+\sqrt{b^2-4ma})/(2m)=-r_1, \quad k_2=-(b+\sqrt{b^2-4ma})/(2m)=-r_2,$$

находим общее решение уравнения движения в виде

$$x = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$$

(это — случай так называемого *апериодического* движения).

2) Если $b^2 - 4ma = 0$, то корни характеристического уравнения — действительные равные:

$$k_1 = k_2 = -b/(2m) = -r.$$

В этом случае общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^{-rt}.$$

3) Наконец, если $b^2 - 4ma < 0$, то характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни:

$$k_1 = -\alpha + \beta i, \quad k_2 = -\alpha - \beta i,$$

где

$$\alpha = b/(2m), \quad \beta = (\sqrt{4am - b^2})/(2m).$$

Общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = e^{-\alpha t}\,(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \text{ или } x = A e^{-\alpha t} \sin (\beta t + \varphi_0),$$

где

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \ \sin \varphi_0 = C_1/A, \ \cos \varphi_0 = C_2/A$$

(*затухающие колебания*). ▲

Найти общие решения уравнений:

696. $y'' - y' - 2y = 0$. **697.** $y'' + 25y = 0$.

698. $y'' - y' = 0$. **699.** $y'' - 4y' + 4y = 0$.

700. $y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' = 0$. **701.** $y^{\text{IV}} + a^4 y = 0$.

702. $y^{\text{IV}} + 5y'' + 4y = 0$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным или краевым условиям:

703. $y'' + 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$.

704. $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

705. $y'' - 2y' + 10y = 0$; $y(\pi/6) = 0$, $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$.

706. $9y'' + y = 0$; $y(3\pi/2) = 2$, $y'(3\pi/2) = 0$.

707. $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

708. $y'' + 9y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi/4) = 1$.

709. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 1$, $y'(\pi/3) = 0$.

710. Решить задачу 695, если сила сопротивления среды равна нулю.

4. Линейные неоднородные уравнения. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения, т. е. уравнения с правой частью:

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),$$

определяется следующей теоремой.

Если $u = u(x)$ — частное решение неоднородного уравнения, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $y = u + C_1 y_1 +$

$+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$; иными словами, общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Следовательно, для построения общего решения неоднородного уравнения надо найти одно его частное решение (предполагая уже известным общее решение соответствующего однородного уравнения).

Рассмотрим два метода отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных. Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации заключается в следующем. Пусть известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$u(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n,$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\ldots+C_n'(x)y_n=0,\\
&C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0,\\
&C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)
\end{aligned}$$

[$f(x)$ — правая часть данного уравнения].

Для уравнения второго порядка $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x).\end{cases}$$

Решение этой системы находится по формулам

$$C_1(x)=-\int\frac{y_2f(x)\,dx}{W(y_1,\ y_2)};\ C_2(x)=\int\frac{y_1f(x)\,dx}{W(y_1,\ y_2)},$$

в силу чего $u(x)$ можно сразу определить по формуле

$$u(x)=-y_1\int\frac{y_2f(x)\,dx}{W(y_1,\ y_2)}+y_2\int\frac{y_1f(x)\,dx}{W(y_1,\ y_2)}$$

(здесь $W(y_1,\ y_2)$ — вронскиан решений y_1 и y_2).

Пусть, например, требуется проинтегрировать уравнение

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=\frac{\operatorname{ctg}x}{x}.$$

Для соответствующего однородного уравнения мы нашли частные решения $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ и $y_2=\dfrac{\cos x}{x}$ (см. с. 146); их вронскиан $W(y_1,\ y_2)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Поэтому $u(x)$ можно найти по формуле

$$u(x)=-\frac{\sin x}{x}\int\frac{\dfrac{\cos x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}}{(-1/x^2)}dx+\frac{\cos x}{x}\int\frac{\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}x}{x}}{(-1/x^2)}dx=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\cdot\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx-\frac{\cos x}{x}\cdot\int\cos x\,dx=\frac{\sin x}{x}\left[\ln|\operatorname{tg}(x/2)|+\cos x\right]-\frac{\cos x}{x}\sin x.$$

Таким образом, $u(x)=\frac{\sin x \ln|\operatorname{tg}(x/2)|}{x}$, а общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}\ln|\operatorname{tg}(x/2)|.$$

Примечание. Еще раз отметим, что линейное неоднородное уравнение второго порядка может быть проинтегрировано в квадратурах, если известно одно частное решение $y_1(x)$ соответствующего однородного уравнения; общее решение такого уравнения имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2+u(x)$, где y_2 определяется через y_1 по формуле

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx,$$

а $u(x)$ определяется через y_1 и y_2 по вышеприведенной формуле.

Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда его правая часть имеет следующий вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$$

(или является суммой функций такого вида). Здесь α и β — постоянные, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены от x соответственно n-й и m-й степени.

Частное решение уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_ny=f(x)$$

(где $f(x)$ имеет указанный вид, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные постоянные коэффициенты) следует искать в виде

$$u(x)=x^re^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x].$$

Здесь r равно показателю кратности корня $\alpha+\beta i$ в характеристическом уравнении $k^n+a_1k^{n-1}+\ldots+a_n=0$ (если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует положить $r=0$); $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ — полные многочлены от x степени l с неопределенными коэффициентами, причем l равно наибольшему из чисел n и m ($l=n\geqslant m$, или $l=m\geqslant n$):

$$P_l(x)=A_0x^l+A_1x^{l-1}+\ldots+A_l;\ Q_l(x)=B_0x^l+B_1x^{l-1}+\ldots+B_l.$$

Подчеркнем, что многочлены $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ должны быть полными (т. е. содержать все степени x от нуля до l), с различными неопределенными коэффициентами при одних и тех же степенях x в обоих многочленах и что при этом, если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в $u(x)$ надо всегда вводить обе функции.

Неопределенные коэффициенты можно найти из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного уравнения после подстановки в него $u(x)$ вместо y.

Проверку правильности выбранной формы частного решения дает сопоставление всех членов правой части уравнения с подобными им членами левой части, появившимися в ней после подстановки $u(x)$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций рассматриваемой структуры, то для отыскания частного решения такого уравнения нужно использовать теорему наложения решений: надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и является частным решением исходного уравнения (т. е. уравнения с суммой соответствующих функций в правой части).

Примечание. Частными случаями функции $f(x)$ рассматриваемой структуры (при наличии которых в правой части уравнения применим метод подбора частного решения) являются следующие функции:

1) $f(x)=Ae^{\alpha x}$, A — постоянная $\{\alpha+\beta i\equiv\alpha\}$.
2) $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, A и B — постоянные $\{\alpha+\beta i\equiv\beta i\}$.
3) $f(x)=P_n(x)$ (многочлен степени n) $\{\alpha+\beta i\equiv 0\}$.
4) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ $\{\alpha+\beta i\equiv\alpha\}$.
5) $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$ $\{\alpha+\beta i\equiv\beta i\}$.
6) $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$, A и B — постоянные.

711. Найти частное решение уравнения $y''-2y'-3y=e^{4x}$, удовлетворяющее краевым условиям $y|_{x=\ln 2}=1$; $y|_{x=2\ln 2}=1$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-2k-3=0$ имеет корни $k_1=3$, $k_2=-1$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y=C_1e^{3x}+$ $+C_2e^{-x}$. Частное решение исходного уравнения следует искать в виде $u=Ae^{4x}$ (так как в правой части отсутствуют синус и косинус, коэффициентом при показательной функции служит многочлен нулевой степени, т. е. $l=n=0$, и $r=0$, поскольку $\alpha=4$ не является корнем характеристического уравнения).

Итак,

$$\begin{array}{r|r|l} & -3 & u=\ \ Ae^{4x} \\ + & -2 & u'=\ \ 4Ae^{4x} \\ & 1 & u''=16Ae^{4x} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''-2u'-3u=5Ae^{4x}\equiv e^{4x}} \end{array}$$

Таким образом, $A=1/5$. Следовательно, общее решение данного уравнения

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{5}e^{4x}.$$

Для нахождения C_1 и C_2 воспользуемся краевыми условиями:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1e^{3\ln 2}+C_2e^{-\ln 2}+\dfrac{1}{5}e^{4\ln 2}=1, \\ C_1e^{6\ln 2}+C_2e^{-2\ln 2}+\dfrac{1}{5}e^{8\ln 2}=1, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} 8C_1+\dfrac{1}{2}C_2+\dfrac{16}{5}=1, \\ 64C_1+\dfrac{1}{4}C_2+\dfrac{256}{5}=1. \end{array}\right.$$

Отсюда $C_1=-491/600$, $C_2=652/75$. Итак,

$$y=\frac{1}{5}e^{4x}+\frac{652}{75}e^{-x}-\frac{491}{600}e^{3x}. \ ▲$$

712. Проинтегрировать уравнение $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$ при начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

△ Характеристическое уравнение $k^2+k-2=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=$ $=-2$, а потому общее решение однородного уравнения $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$. Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$u=A\cos x+B\sin x$$

(в данном случае $\alpha=0$, $\beta=1$, $\alpha+\beta i=i$; поскольку такого корня у характеристического уравнения нет, то $r=0$; $m=n=0$, а следовательно, и $l=0$).

Итак,

$$\begin{array}{r|r|l} & -2 & u=\ \ A\cos x+B\sin x \\ + & 1 & u'=-A\sin x+B\cos x \\ & 1 & u''=-A\cos x-B\sin x \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''+u'-2u=(B-3A)\cos x+(-3B-A)\sin x\equiv\cos x-3\sin x.} \end{array}$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} B-3A=1, \\ 3B+\ A=3, \end{cases} \quad \text{т. е. } A=0,\ B=1.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\sin x.$$

Найдем C_1 и C_2, используя начальные условия:

$$\begin{cases} C_1e^0+C_2e^0+\sin 0=1, \\ -2C_1e^0+C_2e^0+\cos 0=2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1+C_2=1, \\ -2C_1+C_2=1. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=0$, $C_2=1$, т. е. $y=e^x+\sin x$. ▲

713. Проинтегрировать уравнение $y''-y'=\operatorname{ch} 2x$ при начальных условиях $y(0)=y'(0)=0$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=1$. Общее решение однородного уравнения $y=C_1+C_2e^x$. Частное решение неоднородного уравнения в данном случае можно искать в виде $u=A\operatorname{ch} 2x+B\operatorname{sh} 2x$. Дифференцируя и подставляя в исходное уравнение, получим:

$$\begin{array}{r|r|l} & 0 & u=A\operatorname{ch} 2x+B\operatorname{sh} 2x \\ + & -1 & u'=2A\operatorname{sh} 2x+2B\operatorname{ch} 2x \\ & 1 & u''=4A\operatorname{ch} 2x+4B\operatorname{sh} 2x \\ \hline \end{array}$$
$$u''-u'=(4A-2B)\operatorname{ch} 2x+(4B-2A)\operatorname{sh} 2x\equiv\operatorname{ch} 2x.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 4A-2B=1, \\ -2A+4B=0; \end{cases} \quad A=1/3,\ B=1/6.$$

Значит, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y=C_1+C_2e^x+\frac{1}{3}\operatorname{ch} 2x+\frac{1}{6}\operatorname{sh} 2x.$$

Для нахождения C_1 и C_2 используем начальные условия:

$$\begin{cases} C_1+C_2\cdot e^0+\frac{1}{3}\operatorname{ch} 0+\frac{1}{6}\operatorname{sh} 0=0, \\ C_2\cdot e^0+\frac{2}{3}\operatorname{sh} 0+\frac{1}{3}\operatorname{ch} 0=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1+C_2=-\frac{1}{3}, \\ C_2+\frac{1}{3}=0. \end{cases}$$

Следовательно, $C_1=0$, $C_2=-1/3$. Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y=-\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{3}\operatorname{ch} 2x+\frac{1}{6}\operatorname{sh} 2x. \ ▲$$

Примечание. Согласно общей теории мы должны были бы правую часть заданного уравнения представить в виде $(1/2)(e^{2x}+e^{-2x})$ и применить теорему наложения, т. е. искать отдельно решения, соответствующие слагаемым $(1/2)e^{2x}$ и $(1/2)e^{-2x}$ правой части. Мы имели бы:

для $(1/2)e^{2x}$: $\alpha=2$, $\beta=0$; $\alpha+\beta i=2$; $r=0$; $n=l=0$; таким образом, $u_1(x)=A_1e^{2x}$;

для $(1/2)e^{-2x}$: $\alpha_1=-2$, $\beta_1=0$; $\alpha_1+\beta_1 i=-2$; $r=0$; $n_1=l_1=0$; таким образом, $u_2(x)=B_1e^{-2x}$.

Поэтому частное решение следовало искать в виде

$$u(x)=u_1(x)+u_2(x)=A_1e^{2x}+B_1e^{-2x},$$

но

$$A_1e^{2x}+B_1e^{-2x}=A_1(\operatorname{ch}2x+\operatorname{sh}2x)+B_1(\operatorname{ch}2x-\operatorname{sh}2x)=$$
$$=(A_1+B_1)\operatorname{ch}2x+(A_1-B_1)\operatorname{sh}2x=A\operatorname{ch}2x+B\operatorname{sh}2x.$$

Именно в этом виде мы и искали решение данного уравнения.

Вообще следует заметить, что при изменении метода подбора частного решения последнее всегда отыскивается в виде функции такой же структуры, как и правая часть заданного уравнения, но при этом целесообразно дополненной добавочными слагаемыми и множителями, чтобы обеспечить возможность отождествления полученных после подстановки в левую часть уравнения членов со всеми (подобными им) членами правой части.

714. Решить уравнение $y''-2y'+2y=x^2$.

△ Характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет корни $k_{1,2}=1\pm i$, а потому общее решение однородного уравнения $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$. Частное решение следует искать в виде $u=Ax^2+Bx+C$ (в данном случае $\alpha=0$, $\beta=0$, $\alpha+\beta i=0$; так как 0 не является корнем характеристического уравнения, то $r=0$; $n=l=2$). Итак,

$$\begin{array}{c|r|l} & 2 & u=Ax^2+Bx+C \\ + & -2 & u'=2Ax+B \\ & 1 & u''=2A \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''-2u'+2u=2Ax^2+(2B-4A)x+(2C-2B+2A)\equiv x^2.} \end{array}$$

Отсюда $2A=1$, $2B-4A=0$, $2C-2B+2A=0$, т. е. $A=1/2$, $B=1$, $C=1/2$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2. \ ▲$$

715. Решить уравнение $y''+y=xe^x+2e^{-x}$.

△ Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Пользуясь принципом наложения, частное решение исходного уравнения будем искать в виде $u=u_1+u_2=(Ax+B)e^x+Ce^{-x}$ (имеем для u_1: $f_1(x)=xe^x$, $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\alpha_1+\beta_1 i=1$; поскольку такого корня нет, $r_1=0$; $n=l=1$; для u_2: $f_2(x)=2e^{-x}$; $\alpha_2=-1$, $\beta_2=0$, $\alpha_2+\beta_2 i=-1$; $r_2=0$; $n_1=l_1=0$). Итак,

$$\begin{array}{c|c|l} & 1 & u=(Ax+B)e^x+Ce^{-x} \\ + & 0 & u'=Ae^x+(Ax+B)e^x-Ce^{-x} \\ & 1 & u''=2Ae^x+(Ax+B)e^x+Ce^{-x} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''+u=2Axe^x+(2A+2B)e^x+2Ce^{-x}\equiv xe^x+2e^{-x}.} \end{array}$$

Отсюда $2A=1$, $2A+2B=0$, $2C=2$, т. е. $A=1/2$, $B=-1/2$, $C=1$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x-1)e^x+e^{-x}. \ ▲$$

716. Решить уравнение $y'''+y''-2y'=x-e^x$.

△ Характеристическое уравнение $k^3+k^2-2k=0$ имеет корни $k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=-2$, а потому общее решение однородного уравнения $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}$. Частное решение ищем, пользуясь принципом наложения, в виде $u=u_1+u_2=x(Ax+B)+Cxe^x$. Итак,

$$\begin{array}{c|r|l} & 0 & u=(Ax+B)x+Cxe^x \\ & -2 & u'=2Ax+B+Ce^x+Cxe^x \\ + & 1 & u''=2A+2Ce^x+Cxe^x \\ & 1 & u'''=3Ce^x+Cxe^x \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u'''+u''-2u'=-4Ax+(2A-3B)+3Ce^x\equiv x-e^x.} \end{array}$$

Отсюда $-4A=1$, $2A-2B=0$, $3C=-1$, т. е. $A=-1/4$, $B=-1/4$, $C=-1/3$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}-\frac{1}{4}x(x+1)-\frac{1}{3}xe^x. \blacktriangle$$

717. Найти решение уравнения $y''+y=3\sin x$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)+y'(0)=0$, $y(\pi/2)+y'(\pi/2)=0$.

$\triangle$ Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, а потому общее решение однородного уравнения $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Частное решение следует искать в виде $u=x(A\cos x+B\sin x)$ (в данном случае $\alpha=0$, $\beta=i$, $\alpha+\beta i=i$; так как i является простым корнем характеристического уравнения, то $r=1$; $m=n=l=0$). Итак,

$$\begin{array}{c|c|l} & 1 & u=(A\cos x+B\sin x)x \\ + & 0 & u'=(-A\sin x+B\cos x)+(A\cos x+B\sin x) \\ & 1 & u''=2(-A\sin x+B\cos x)+(-A\cos x-B\sin x)x \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''+u=-2A\sin x+2B\cos x\equiv 3\sin x.} \end{array}$$

Отсюда $-2A=3$, $2B=0$, т. е. $A=-3/2$, $B=0$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{3}{2}x\cos x.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем, используя краевые условия. Имеем

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{3}{2}x\sin x-\frac{3}{2}\cos x,$$

и, далее,

$$y(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0-\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\cos 0=C_1,$$

$$y'(0)=-C_1\sin 0+C_2\cos 0+\frac{3}{2}\cdot 0\cdot\sin 0-\frac{3}{2}\cos 0=C_2-\frac{3}{2},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=C_1\cos\frac{\pi}{2}+C_2\sin\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=C_2,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-C_1\sin\frac{\pi}{2}+C_2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2}=-C_1+\frac{3\pi}{4}.$$

Таким образом,

$$y(0)+y'(0)=C_1+C_2-3/2=0,$$
$$y(\pi/2)+y'(\pi/2)=C_2-C_1+3\pi/4=0,$$

откуда получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=3/2, \\ C_1-C_2=3\pi/4, \end{cases}$$

решая которую, находим $C_1=3(2+\pi)/8$, $C_2=(2-\pi)/8$. Значит, решение исходного уравнения, удовлетворяющее поставленным краевым условиям, имеет вид

$$y=\frac{3}{8}[(\pi+2)\cos x-(\pi-2)\sin x]-\frac{3}{2}x\cos x. \blacktriangle$$

718. Найти решение уравнения $y''+6y'+10y=80e^x\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4$, $y'(0)=10$.

△ Характеристическое уравнение $k^2+6k+10=0$ имеет корни $k_{1,2}=-3\pm i$ и общее решение соответствующего однородного уравнения $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. Частное решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде $u=e^x(A\cos x+B\sin x)$. Тогда

$$
\begin{array}{r|c|l}
 & 10 & u=e^x(A\cos x+B\sin x)\\
+ & 6 & u'=e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+B\cos x)\\
 & 1 & u''=e^x(-2A\sin x+2B\cos x)\\
\hline
\multicolumn{3}{c}{u''+6u'+10u=e^x[(16A+8B)\cos x+(16B-8A)\sin x]\equiv 80e^x\cos x.}
\end{array}
$$

Отсюда $16A+8B=80$, $16B-8A=0$, т. е. $A=4$, $B=2$, и общее решение исходного уравнения таково:

$$y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+2e^x(2\cos x+\sin x).$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем, используя начальные условия. Имеем

$$y'=e^{-3x}(-3C_1\cos x-3C_2\sin x-C_1\sin x+C_2\cos x)+2e^x(3\cos x-\sin x)$$

и, далее, $y(0)=C_1+4=4$, $y'(0)=-3C_1+C_2+6=10$, откуда $C_1=0$, $C_2=4$. Итак, решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y=4e^{-3x}\sin x+2e^x(2\cos x+\sin x). \ ▲$$

719. Найти решение уравнения $y''+y=\operatorname{tg} x$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0)=y(\pi/6)=0$.

△ Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm i$, а потому общее решение однородного уравнения $y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Частное решение исходного уравнения методом неопределенных коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)$, в отличие от предыдущего, имеет другую структуру), а потому воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Будем искать решение уравнения в виде

$$y=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x,$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1+C_2'(x)\,y_2=0,\\ C_1'(x)\,y_1'+C_2'(x)\,y_2'=f(x),\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0,\\ -C_1'(x)\sin x+C_2'(x)\cos x=\operatorname{tg} x.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $C_1'(x)=-\sin^2 x/\cos x$, $C_2'=\sin x$, откуда

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx+A=\sin x-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+A;$$

$$C_2(x)=-\cos x+B.$$

(Вместо решения этой системы можно было воспользоваться формулами, приведенными на с. 152.)

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y=A\cos x+B\sin x-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$

где A и B — произвольные постоянные, которые нужно определить из краевых условий:

$$\begin{cases} A\cos 0+B\sin 0-\cos 0\cdot\ln\operatorname{tg}(\pi/4)=0,\\ A\cos(\pi/6)+B\sin(\pi/6)-\cos(\pi/6)\ln\operatorname{tg}(\pi/3)=0.\end{cases}$$

Отсюда $A=0$, $B=(\sqrt{3}/2)\ln 3$. Следовательно, решение, удовлетворяющее поставленным краевым условиям, имеет вид

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3\sin x-\cos x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right). \ ▲$$

720. Свободно висящая на крюке однородная цепь соскальзывает с него под действием силы тяжести (трением можно пренебречь). Определить, за какое время соскользнет с крюка вся цепь, если в начальный момент цепь покоилась, а длина цепи с одной стороны крюка была равна 10 м, с другой 8 м.

△ Пусть масса одного погонного метра цепи равна m. Обозначим через x длину большей части цепи, свешивающейся с крюка через время t после начала движения. К центру тяжести цепи приложена сила $F=[x-(18-x)]\,mg$. Масса всей цепи равна $18m$, ее ускорение равно $\ddot{x}$. Итак, приходим к уравнению движения центра тяжести цепи:

$$18m\ddot{x}=(2x-18)\,mg, \text{ или } \ddot{x}-\frac{g}{9}x=-g.$$

Это уравнение надо проинтегрировать при начальных условиях: $x=10$, $\dot{x}=0$ при $t=0$.

Корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm\sqrt{g}/3$; частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $u=A$; после подстановки в уравнение находим $A=9$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$x=C_1e^{t\sqrt{g}/3}+C_2e^{-t\sqrt{g}/3}+9.$$

Используя начальные условия, получим

$$\begin{cases} C_1+C_2+9=10, \\ (\sqrt{g}/3)(C_1-C_2)=0, \end{cases}$$

откуда $C_1=C_2=0{,}5$. Значит,

$$x=\left(e^{t\sqrt{g}/3}+e^{-t\sqrt{g}/3}\right)/2+9=9+\operatorname{ch}(t\sqrt{g}/3).$$

Время, за которое соскользнет вся цепь, определится из условия: $x=18$ м при $t=T$. Следовательно,

$$18=9+\operatorname{ch}(T\sqrt{g}/3), \text{ или } \frac{e^{T\sqrt{g}/3}+e^{-T\sqrt{g}/3}}{2}=9.$$

Решая полученное уравнение относительно T, находим

$$T=(3/\sqrt{g})\ln(9+4\sqrt{5})\approx 2{,}76 \text{ с. } \blacktriangle$$

Решить уравнения:

721. $y''-4y'+3y=e^{5x}$; $\quad y(0)=3, \quad y'(0)=9.$
722. $y''-8y'+16y=e^{4x}$; $\quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$
723. $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x.$
724. $y''+y=\cos 3x$; $\quad y(\pi/2)=4, \quad y'(\pi/2)=1.$
725. $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1.$
726. $2y''-y'=1$; $\quad y(0)=0, \; y'(0)=1.$
727. $y''+4y=\sin 2x+1$; $\quad y(0)=1/4, \quad y'(0)=0.$
728. $y''-4y'=2\operatorname{sh} 2x.$
729. $y''+4y=\cos 2x$; $\quad y(0)=y(\pi/4)=0.$
730. $y''+3y'-10y=xe^{-2x}.$
731. $y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=ae^{\alpha x}+be^{\beta x}.$
732. $y''-y=x\cos^2 x.$
733. $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}.$
734. $y''-y=2\operatorname{sh} x$; $\quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$
735. $y''-4y=\operatorname{ch} 2x.$

736. $y''-2y\cos\varphi+y=2\sin x\cos\varphi$.

737. $y''-2y'+2y=e^x\sin x$.

738. $y''+9y=2\sin x\sin 2x;\quad y(0)=y(\pi/2)=0$.

739. $y''-4y'+8y=61e^{2x}\sin x;\quad y(0),\quad y'(0)=4$.

740. Показать, что общее решение дифференциального уравнения $y''-m^2y=0$ можно представить в виде $y=C_1\operatorname{ch} mx+C_2\times\times\operatorname{sh} mx$.

741. Показать, что общее решение дифференциального уравнения $y''-2\alpha y'+(\alpha^2-\beta^2)y=0$ можно представить в виде $y==e^{\alpha x}(C_1\operatorname{ch}\beta x+C_2\operatorname{sh}\beta x)$.

742. Определить закон движения материальной точки массы m, перемещающейся по прямой под влиянием восстанавливающей силы, направленной к началу отсчета перемещений и прямо пропорциональной расстоянию точки от начала отсчета, если сопротивление среды отсутствует, а на точку действует внешняя сила $F=A\sin\omega t$.

Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных:

743. $y''+y=1/\sqrt{\cos 2x}$. **744.** $y''+5y'+6y=1/(1+e^{2x})$.

745. $y''+4y=\operatorname{ctg} 2x$. **746.** $y''\cos(x/2)+(1/4)\,y\cos(x/2)=1$.

747. Решить задачу 720 с учетом трения цепи о крюк, если сила трения равна весу одного погонного метра цепи.

● Уравнение движения центра тяжести цепи имеет вид

$$18\ddot{x}=gx-(18-x)\,g-g\cdot 1.$$

5. Уравнение Эйлера. Линейное уравнение с переменными коэффициентами вида

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

или более общего вида

$$(ax+b)^n\,y^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(ax+b)\,y'+a_ny=f(x) \qquad (2)$$

называется *уравнением Эйлера*. Здесь a_i — постоянные коэффициенты. С помощью подстановок $x=e^t$ для уравнения (1) и $ax+by=e^t$ для уравнения (2) оба эти уравнения преобразуются в линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

748. Решить уравнение $x^2y''-xy'+y=0$.

△ Полагая $x=e^t$, или $t=\ln x$, откуда $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}=e^{-t}$, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}\,[e^{-t}\dot{y}]\,\frac{dt}{dx}=(\dot{y}e^{-t})'_t\cdot e^{-t}=(\ddot{y}-\dot{y})\,e^{-2t}$$

(дифференцирование по t обозначаем точками). Тогда исходное уравнение примет вид

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})-e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+y=0,\ \text{или}\ \ddot{y}-2\dot{y}+y=0.$$

Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет корни $k_1=k_2=1$. Следовательно, общее решение

$$y=(C_1+C_2t)e^t, \text{ или } y=(C_1+C_2\ln x)x. \ ▲$$

749. Решить уравнение $(4x-1)^2y''-2(4x-1)y'+8y=0$.

△ Положим $4x-1=e^t$; тогда $dx=\frac{1}{4}e^t\,dt$, $\frac{dt}{dx}=4e^{-t}$. Отсюда

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=4e^{-t}\cdot\dot{y}, \quad y''=16e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

Исходное уравнение принимает вид

$$16e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})-4\cdot 2e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{y}+8y=0, \text{ или } 2\ddot{y}-3\dot{y}+y=0.$$

Характеристическое уравнение $2k^2-3k+1=0$ имеет корни $k_1=1$, $k_2=1/2$. Следовательно, общее решение

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2}, \text{ или } y=C_1(4x-1)+C_2\sqrt{4x-1}. \ ▲$$

750. Решить уравнение $y''-xy'+y=\cos\ln x$.

△ Положим $x=e^t$; тогда $t=\ln x$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, следовательно, $y'=\dot{y}\times$ $\times e^{-t}$, $y''=(\ddot{y}-\dot{y})e^{-2t}$. Данное уравнение примет вид

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y=\cos t.$$

Общее решение однородного уравнения есть $y=(C_1+C_2t)e^t$, а частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $u=A\cos t+B\sin t$. Тогда

$$\begin{array}{c|r|l} & 1 & u=A\cos t+B\sin t \\ + & -2 & u'=-A\sin t+B\cos t \\ & 1 & u''=-A\cos t-B\sin t \\ \hline \multicolumn{3}{c}{u''-2u'+u=-2B\cos t+2A\sin t\equiv\cos t,} \end{array}$$

откуда $B=-1/2$, $A=0$. Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=(C_1+C_2t)e^t-\frac{1}{2}\sin t, \text{ или } y=(C_1+C_2\ln x)x-\frac{1}{2}\sin\ln x. \ ▲$$

Решить уравнения:

751. $x^2y''-xy'+2y=0$.
752. $x^2y''-3xy'+3y=3\ln^2 x$.
753. $x^2y''+xy'+y=\sin(2\ln x)$.
754. $x^2y''+3xy'+y=1/x$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$.
755. $x^2y''-3xy'+4y=x^3/2$; $y(1)=1/2$, $y(4)=0$.

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

1. Применение рядов к решению дифференциальных уравнений. В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, решение такого уравнения ищут в виде степенного ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты C_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ находят подстановкой ряда в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x-x_0$ в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, то полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y'=f(x, y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y|_{x=x_0}=y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y, y', \ldots$ значений x_0, y_0, y_0' и всех остальных найденных последующих производных. Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков.

756. Проинтегрировать уравнение $y''-x^2y=0$.

△ Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots.$$

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, находим

$$[2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x+4\cdot 3C_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n+\ldots]-$$
$$-x^2[C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots]\equiv 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x:

$$2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x^2+\sum_{n=0}^{\infty}[(n+4)(n+3)C_{n+4}-C_n]x^{n+2}\equiv 0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты полученного ряда (чтобы уравнение обратилось в тождество), находим

$$C_2=C_3=0;\quad C_{n+4}=\frac{C_n}{(n+3)(n+4)}\quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Последнее соотношение позволяет найти последовательно все коэффициенты искомого разложения (C_0 и C_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных интегрирования):

$$C_{4k}=\frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)\cdot 4k};\quad C_{4k+1}=\frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k(4k+1)};$$
$$C_{4k+2}=C_{4k+3}=0\quad (k=0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$y=C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\ldots(4k-1)4k}+C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4k(4k+1)}.$$

Полученные ряды сходятся на всей числовой оси и определяют два линейно независимых частных решения исходного уравнения. ▲

С помощью разложения в ряд по степеням x проинтегрировать следующие уравнения и определить область существования полученного решения:

757. $y'+xy=0$.

758. $y'=x-2y$; $\quad y(0)=0$.

● В силу начального условия положить $C_0=0$.

759. $y''+xy'+y=0$.

760. $y''-xy'-2y=0$.

761. $y''+x^2y=0$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

● В силу начальных условий положить $C_0=0$, $C_1=1$.

762. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение $y'=x^2+y^2$, $y(0)=1$, взяв шесть первых членов разложения, отличных от нуля.

△ Из уравнения начальных условий находим $y'(0)=0^2+1^2=1$. Дифференцируя данное уравнение, последовательно получаем

$$y''=2x+2yy',\quad y'''=2+2y'^2+2yy'',\quad y^{IV}=6y'y''+2yy''',$$
$$y^{V}=6y''^2+8y'y'''+2yy^{IV}.$$

Полагая $x=0$ и используя значения $y(0)=1$, $y'(0)=1$, последовательно находим $y''(0)=2$, $y'''(0)=8$, $y^{IV}(0)=28$, $y^{V}(0)=144$. Искомое решение имеет вид

$$y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\ldots. \ ▲$$

763. $y''=x+y^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

△ Дифференцируя уравнение $y''=x+y^2$, имеем

$$y'''=1+2yy',\quad y^{IV}=2yy''+2y'^2,\quad y^{V}=2yy'''+6y'y'',$$
$$y^{VI}=2yy^{IV}+8y''y'''+6y''^2.$$

При $x=0$ получаем

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=1,\ y^{IV}(0)=2,\ y^{V}(0)=0,\ y^{VI}(0)=16.$$

Решение имеет вид

$$y=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{16x^3}{6!}+\ldots=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{45}+\ldots. \ ▲$$

764. $y'=x^2y+y^3$, $y(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

765. $y'=x+2y^2$, $y(0)=0$. Найти два первых (отличных от нуля) члена разложения.

766. $y''-xy^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

767. $y'=2x-y$; $y(0)=2$. Найти точное решение.

768. $y'=y^2+x$; $y(0)=1$. Найти пять первых членов разложения.

769. $y''=(2x-1)y-1$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Найти пять первых членов разложения.

2. Уравнение Бесселя. Линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами, имеющее вид

$$x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=0\ (\lambda=\text{const}), \tag{1}$$

называется *уравнением Бесселя* (к этому же виду сводится уравнение $x^2y''+xy'+(m^2x^2-\lambda^2)y=0$ заменой $mx=\xi$).

Решение уравнения (1) будем искать в виде обобщенного степенного ряда, т. е. произведения некоторой степени x на степенной ряд:

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}. \tag{2}$$

Подставляя обобщенный степенной ряд в уравнение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени x в левой части уравнения, получим систему

$$\begin{array}{l|l} x^r & (r^2-\lambda^2)\, a_0 = 0, \\ x^{r+1} & [(r+1)^2-\lambda^2]\, a_1 = 0, \\ x^{r+2} & [(r+2)^2-\lambda^2]\, a_2 + a_0 = 0, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{r+k} & [(r+k)^2-\lambda^2]\, a_k + a_{k-2} = 0. \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Считая, что $a_0 \neq 0$, из данной системы находим $r_{1,2} = \pm\lambda$. Пусть $r_1 = \lambda$. Тогда из второго уравнения системы находим $a_1 = 0$, а из уравнения $[(r+k)^2-\lambda^2] \times a_k = -a_{k-2}$, придавая k значения 3, 5, 7, ..., заключаем, что $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2k+1} = 0$. Для коэффициентов с четными номерами получаем выражения

$$a_2 = \frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2}, \quad a_4 = \frac{-a_2}{(2\lambda+4)\cdot 4} = \frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4}, \dots,$$

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2\lambda+2)\cdot 2\cdot k} = (-1)^{k+1}\cdot\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2k\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)\dots(2\lambda+2k)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (2), получим решение

$$y_1(x) = a_0\cdot x^\lambda \left[1 - \frac{x^2}{2(2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2\lambda+2)(2\lambda+4)(2\lambda+6)} + \dots\right] = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\lambda+2k}}{4^k k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)},$$

где коэффициент a_0 остается произвольным.

При $r_2 = -\lambda$ все коэффициенты a_k аналогично определяются только в случае, когда λ не равно целому числу. Тогда решение можно получить, заменяя в предыдущем решении $y_1(x)$ величину λ на $-\lambda$:

$$y_2(x) = a_0\cdot x^{-\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\,(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)} + \dots\right] =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(-\lambda+1)(-\lambda+2)\dots(-\lambda+k)}.$$

Полученные степенные ряды сходятся для всех значений x, что легко устанавливается на основании признака Даламбера. Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, так как их отношение не является постоянным.

Решение $y_1(x)$, умноженное на постоянную $a_0 = \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$, называется *функцией Бесселя* (или *цилиндрической функцией*) *порядка* λ *первого рода* и обозначается символом $J_\lambda(x)$. Решение y_2 обозначают $J_{-\lambda}(x)$.

Следовательно, общее решение уравнения (1) при λ, не равном целому числу, имеет вид

$$y(x) = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные величины.

В общепринятом выборе постоянной a_0 участвует гамма-функция $\Gamma(\lambda+1)$, которая определяется несобственным интегралом (см. с. 35):

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\lambda-1}\,dx\ (\lambda>0).$$

Можно показать, что при λ, равном половине нечетного числа, функция Бесселя выражается через элементарные функции, так как в этом случае гамма-функция, входящая в определение функции Бесселя

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)}\cdot\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k\cdot x^{\lambda+2k}}{4^k\cdot k!\,(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k},$$

[произведение $(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)\,\Gamma(\lambda+1)$ заменено, согласно свойству гамма-функции, на $\Gamma(\lambda+k+1)$], принимает следующие значения:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx=2\int_0^\infty e^{-t^2}dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

(здесь использовано значение интеграла Пуассона);

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi};\ \ldots.$$

Функцию Бесселя J_λ при $\lambda=n$ (натуральном) можно записать так:

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Для отрицательного и целого λ частное решение не выражается функцией Бесселя первого рода и его следует искать в форме

$$K_n(x)=J_n(x)\cdot\ln x+x^{-n}\sum_{k=0}^\infty b_kx^k.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), мы определим коэффициенты b_k. Функция $K_n(x)$, умноженная на некоторую постоянную, называется *функцией Бесселя n-го порядка второго рода*.

770. Найти функцию Бесселя при $\lambda=0$.

△ Воспользовавшись равенством

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda},$$

при $\lambda=0$ получим

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{4^k\cdot k!\cdot k!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{4^k\cdot(k!)^2}=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{4^2(1\cdot 2)^2}-\frac{x^6}{4^3(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\ldots\ \blacktriangle$$

771. Решить уравнение $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$.

$\triangle$ Так как $\lambda=1/2$, то общее решение уравнения имеет вид $y=C_1J_{1/2}+C_2J_{-1/2}$, где

$$J_{1/2}=\frac{1}{2^{1/2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\cdot x^{1/2}\left[1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Точно так же получим $J_{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Следовательно, общее решение

$$y=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(C_1\sin x+C_2\cos x).\ \blacktriangle$$

772. Найти $J_1(x)$.

773. Решить уравнение $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{9}{4}\right)y=0$.

774. Решить уравнение $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{4}{9}\right)y=0$.

§ 5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Нормальная система дифференциальных уравнений. Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ \frac{dx_2}{dt}=f_2(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dx_n}{dt}=f_n(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\end{cases}$$

где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ — неизвестные функции независимой переменной t, называется *нормальной системой*.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, то система дифференциальных уравнений называется *линейной*.

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удается свести к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый *метод исключения*).

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения (так называемый *метод интегрируемых комбинаций*), что позволяет найти решение системы.

775. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=x+y, \quad \frac{dy}{dt}=x-y$$

при начальных условиях $x(0)=2$, $y(0)=0$.

△ Продифференцируем по t первое уравнение: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}$; исключая из полученного уравнения $\frac{dy}{dt}$ и y, имеем $\frac{d^2x}{dt^2}-2x=0$. Характеристическое уравнение $k^2-2=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm\sqrt{2}$. Следовательно, общее решение для x запишется в виде

$$x=C_1e^{t\sqrt{2}}+C_2e^{-t\sqrt{2}}.$$

Общее решение для y находим из первого уравнения:

$$y=\frac{dx}{dt}-x=C_1(\sqrt{2}-1)\,e^{t\sqrt{2}}-C_2(\sqrt{2}+1)\,e^{-t\sqrt{2}}.$$

Воспользуемся начальными условиями для нахождения произвольных постоянных:

$$C_1+C_2=2, \quad \sqrt{2}\,(C_1-C_2)-(C_1+C_2)=0.$$

Отсюда $C_1=(\sqrt{2}+2)/2$, $C_2=(2-\sqrt{2})/2$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)e^{t\sqrt{2}}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-t\sqrt{2}}, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t\sqrt{2}}. \ \blacktriangle$$

776. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x}{2x+3y}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{2x+3y}$$

при начальных условиях $x(0)=1$, $y(0)=2$.

△ Составим первую интегрируемую комбинацию. Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}; \quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}; \quad \ln x=\ln y+\ln C_1, \ \text{т. е.} \ x=C_1y.$$

Составим вторую интегрируемую комбинацию. Сложив удвоенное первое и утроенное второе уравнения, получим

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}=1; \quad 2dx+3dy=dt, \quad \text{т. е.} \ 2x+3y=t+C_2.$$

Из системы уравнений $x=C_1y$, $2x+3y=t+C_2$ находим общее решение системы

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3}, \quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}.$$

Используя начальные условия, получаем

$$1=\frac{C_1C_2}{2C_1+3},\ 2=\frac{C_2}{2C_2+3},\ \text{т. е. } C_1=\frac{1}{2},\ C_2=8.$$

Подставив в общее решение найденные значения C_1 и C_2, получим частные решения, удовлетворяющие начальным условиям: $x=(1/8)\,t+1$, $y=(1/4)\,t+2$. ▲

777. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=2y,\quad \frac{dy}{dt}=2z,\quad \frac{dz}{dt}=2x.$$

△ Продифференцируем по t первое уравнение: $\frac{d^2x}{dt^2}=2\frac{dy}{dt}$. Исключая из полученного уравнения $\frac{dy}{dt}$, имеем $\frac{d^2x}{dt^2}=4z$. Еще раз продифференцируем по t полученное уравнение второго порядка: $\frac{d^3x}{dt^3}=4\frac{dz}{dt}$. Исключая $\frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{d^3x}{dt^3}-8x=0,$$

т. е. мы пришли к уравнению с одной неизвестной функцией. Решив это линейное однородное уравнение третьего порядка, находим

$$x=C_1e^{2t}+e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\sin t\sqrt{3}\right).$$

Общее решение для y получим из первого уравнения системы:

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\left[2C_1e^{2t}-e^{-t}\left(C_2\cos t\sqrt{3}+C_3\sin t\sqrt{3}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-t}\sqrt{3}\left(C_3\cos t\sqrt{3}-C_2\sin t\sqrt{3}\right)\right],$$

или

$$y=C_1e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-t}\left[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2)\sqrt{3}+C_3)\sin t\sqrt{3}\right].$$

Из второго уравнения системы найдем z:

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dt}=C_1e^{2t}-\frac{1}{2}e^{-t}\left[(C_3\sqrt{3}+C_2)\cos t\sqrt{3}-(C_2\sqrt{3}-C_3)\sin t\sqrt{3}\right].\ ▲$$

Решить системы дифференциальных уравнений:

778. $\frac{dx}{dt}=2x+y,\ \frac{dy}{dt}=x+2y;\ x(0)=1,\ y(0)=3.$

779. $\frac{dx}{dt}=4x+6y,\ \frac{dy}{dt}=2x+3y+t.$

780. $\frac{dx}{dt}=e^{3t}-y,\ \frac{dy}{dt}=2e^{3t}-x.$

781. $y'=e^x-z,\quad z'=e^{-x}+y.$

782. $\frac{dx}{dt}=y+t,\ \frac{dy}{dt}=x+e^t;\quad x(0)=1,\quad y(0)=0.$

783. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x+y},\ \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x+y};\ x(0)=2,\ y(0)=4.$

784. $\frac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-x+2\sin t.$

785. $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2(x+y), \quad \frac{dy}{dt}=3x+y.$

786. $\frac{dx}{dt}+\frac{2x}{t}=1, \quad \frac{dy}{dt}=x+y+\frac{2x}{t}-1.$

787. $\frac{dx}{dt}=x^2+xy, \quad \frac{dy}{dt}=xy+y^2.$

● Рассмотреть две интегрируемые комбинации: 1) сложить уравнения; 2) разделить почленно первое уравнение на второе.

788. $\frac{dx}{dt}+\frac{2dy}{dt}-2(x-y)=3e^t, \quad \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+y=4e^{2t}.$

789. $\frac{d^2x}{dt^2}+m^2y=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}-m^2x=0.$

790. $\frac{dx}{dt}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$

2. Решение линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью матриц (видоизмененный метод Эйлера). Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt}=AX.$$

Здесь

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}.$$

Ищем решение системы в виде

$$x_1=p_1e^{\lambda t}, \quad x_2=p_2e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad x_n=p_ne^{\lambda t},$$

где $\lambda=\text{const}$, $p_i=\text{const}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Подставив значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему дифференциальных уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1+a_{12}p_2+\ldots+a_{1n}p_n=0, \\ a_{21}p_1+(a_{22}-\lambda)p_2+\ldots+a_{2n}p_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}p_1+a_{n2}p_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)p_n=0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ получаем уравнение n-й степени

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение является характеристическим уравнением матрицы A и в то же время характеристическим уравнением системы.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, которые являются характеристическими числами матрицы A. Каждому характеристическому числу соответствует свой собственный вектор. Пусть характеристическому числу λ_k соответствует собственный вектор $(p_{1k}; p_{2k}; \dots; p_{nk})$, где $k=1, 2, \dots, n$. Тогда система дифференциальных уравнений имеет n решений:

1-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_1$:

$$x_{11}=p_{11}e^{\lambda_1 t}, \quad x_{21}=p_{21}e^{\lambda_1 t}, \ \dots, \ x_{n1}=p_{n1}e^{\lambda_1 t};$$

2-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_2$:

$$x_{12}=p_{12}e^{\lambda_2 t}, \quad x_{22}=p_{22}e^{\lambda_2 t}, \ \dots, \ x_{n2}=p_{n2}e^{\lambda_2 t};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

n-е решение, соответствующее корню $\lambda=\lambda_n$:

$$x_{1n}=p_{1n}e^{\lambda_n t}, \quad x_{2n}=p_{2n}e^{\lambda_n t}, \ \dots, \ x_{nn}=p_{nn}e^{\lambda_n t}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений. Общее решение системы таково:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1x_{11}+C_2x_{12}+\dots+C_nx_{1n}, \\ x_2 &= C_1x_{21}+C_2x_{22}+\dots+C_nx_{2n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= C_1x_{n1}+C_2x_{n2}+\dots+C_nx_{nn}. \end{aligned}$$

Случаи комплексных и кратных корней рассмотрим на примерах.

791. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=7x_1+3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=6x_1+4x_2. \end{cases}$$

△ Составим характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^2-11\lambda+10=0.$$

Его корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=10$ — характеристические числа матрицы.

При $\lambda=1$ уравнения для определения собственного вектора имеют вид $(7-1)p_1+3p_2=0$ и $6p_1+(4-1)p_2=0$ и сводятся к одному уравнению $2p_1+p_2=0$. Последнее определяет вектор $(1; -2)$.

При $\lambda=10$ получаем уравнения $(7-10)p_1+3p_2=0$, $6p_1+(4-10)p_2=0$, или $p_1-p_2=0$. Это уравнение определяет вектор $(1; 1)$.

Получаем фундаментальную систему решений: для $\lambda=1$: $x_{11}=e^t$, $x_{21}=-2e^t$; для $\lambda=10$: $x_{12}=e^{10t}$, $x_{22}=e^{10t}$.

Общее решение системы имеет вид

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{10t}, \quad x_2=-2C_1e^t+C_2e^{10t}. \ ▲$$

792. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-12y-z, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y-z, \\ \dfrac{dz}{dt}=-4x+12y+3z. \end{cases}$$

△ Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, находим

$$(6-\lambda)(\lambda^2-9)-48-12+12+4\lambda+72-12\lambda+36-12\lambda=0,$$

или окончательно $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$. Это уравнение имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Определяем собственные векторы матрицы A.

При $\lambda=1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5p_1-12p_2-\ p_3=0, \\ p_1-\ 4p_2-\ p_3=0, \\ -4p_1+12p_2+2p_3=0, \end{cases}$$

одно из которых — следствие двух других. Возьмем, например, первые два уравнения:

$$5p_1-12p_2-p_3=0, \quad p_1-4p_2-p_3=0.$$

Отсюда

$$p_1=\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}\cdot k=8k, \quad p_2=-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot k=4k, \quad p_3=\begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}\cdot k=-8k.$$

Приняв $k=1/4$, получаем собственный вектор $(2;\ 1;\ -2)$.

При $\lambda=2$ имеем систему

$$\begin{cases} 4p_1-12p_2-p_3=0, \\ p_1-\ 5p_2-p_3=0, \\ -4p_1+12p_2+p_3=0. \end{cases}$$

Снова используя первые два уравнения (третье — их следствие), находим

$$p_1=\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}\cdot k=7k, \quad p_2=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot k=3k, \quad p_3=\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\cdot k=-8k.$$

Полагая $k=1$, находим собственный вектор $(7;\ 3;\ -8)$.

При $\lambda=3$ имеем систему

$$\begin{cases} 3p_1-12p_2-p_3=0, \\ p_1-\ 6p_2-p_3=0, \\ -4p_1+12p_2\qquad=0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $p_1=3p_2$. Подставляем это значение p_1 в первое уравнение и находим $p_3=-3p_2$. Приняв $p_2=1$, получаем $p_1=3$, $p_3=-3$, т. е. собственный вектор $(3;\ 1;\ -3)$.

Фундаментальная система решений:

$$\begin{aligned} &\text{для } \lambda=1\colon\ x_{11}=2e^t, \quad x_{21}=e^t, \quad x_{31}=-2e^t, \\ &\text{для } \lambda=2\colon\ x_{12}=7e^{2t}, \ x_{22}=3e^{2t}, \ x_{32}=-8e^{2t}, \\ &\text{для } \lambda=3\colon\ x_{13}=3e^{3t}, \ x_{23}=e^{3t}, \quad x_{33}=-3e^{3t}. \end{aligned}$$

Общее решение записывается в виде

$$x_1 = 2C_1e^t + 7C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t},$$
$$x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + C_3e^{3t},$$
$$x_3 = -2C_1e^t - 8C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}. \ \blacktriangle$$

793. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 3x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

△ Составляем характеристическое уравнение матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0;\ (4-\lambda)^2 = -9,\ \lambda - 4 = \pm 3i,\ \lambda = 4 \pm 3i.$$

Определяем собственные векторы.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $p_2 = ip_1$. Приняв $p_1 = 1$, находим $p_2 = i$, т. е. собственный вектор $(1;\ i)$.

При $\lambda_2 = 4 - 3i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 - 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственный вектор $(1;\ -i)$.

Фундаментальная система решений:

для $\lambda_1 = 4 + 3i$:

$$x_{11} = e^{(4+3i)t} = e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t),$$
$$x_{21} = ie^{(4+3i)t} = e^{4t}(-\sin 3t + i \cos 3t);$$

для $\lambda_2 = 4 - 3i$:

$$x_{12} = e^{(4-3i)t} = e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t),$$
$$x_{22} = e^{4t}(-\sin 3t - i \cos 3t).$$

Итак, получаем общее решение

$$x_1 = C_1e^{4t}(\cos 3t + i \sin 3t) + C_2e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t),$$
$$x_2 = C_1e^{4t}(-\sin 3t + i \cos 3t) + C_2e^{4t}(-\sin 3t - i \cos 3t),$$

т. е.

$$x_1 = e^{4t}[(C_1 + C_2)\cos 3t + (C_1 - C_2)\, i \sin 3t],$$
$$x_2 = e^{4t}[-(C_1 + C_2)\sin 3t + (C_1 - C_2)\, i \cos 3t].$$

Полагая $C_1 + C_2 = C_1^*$, $(C_1 - C_2)\, i = C_2^*$, получаем

$$x_1 = e^{4t}(C_1^* \cos 3t + C_2^* \sin 3t),$$
$$x_2 = e^{4t}(-C_1^* \sin 3t + C_2^* \cos 3t).$$

Общее решение может быть найдено и иначе. В решениях, соответствующих одному из комплексных характеристических чисел, отделим действительную и мнимую части (сопряженное характеристическое число мы не рассматриваем, так как решения, соответствующие корню $a - bi$, линейно зависимы с решениями для корня $a + bi$):

$$e^{(4+3i)t} = e^{4t}\cos 3t + ie^{4t}\sin 3t,\quad ie^{(4+3i)t} = -e^{4t}\sin 3t + ie^{4t}\cos 3t.$$

Получаем два линейно независимых частных решения: $x_{11}=e^{4t}\cos 3t$, $x_{21}=-e^{4t}\sin 3t$, $x_{12}=e^{4t}\sin 3t$, $x_{22}=e^{4t}\cos 3t$. Общее решение

$$x_1=C_1x_{11}+C_2x_{12},\quad x_2=C_1x_{21}+C_2x_{22},$$

т. е.

$$x_1=e^{4t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t),\ x_2=e^{4t}(-C_1\sin 3t+C_2\cos 3t).\ \blacktriangle$$

794. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_3,\\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt}=x_1,\\[2mm] \dfrac{dx_3}{dt}=x_1-x_2.\end{cases}$$

$\triangle$ Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & -\lambda & 0\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \text{или}\quad (1-\lambda)(1+\lambda^2)=0.$$

Характеристические числа: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=i$, $\lambda_3=-i$.

При $\lambda=1$ для определения собственного вектора получаем систему уравнений

$$\begin{cases}-p_3=0,\\ p_1-p_2=0,\\ p_1-p_2-p_3=0.\end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор (1; 1; 0).

При $\lambda=i$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases}(1-i)\,p_1-p_3=0,\\ p_1-ip_2=0,\\ p_1-p_2-ip_3=0.\end{cases}$$

Эта система определяет собственный вектор $(1;\ -i;\ 1-i)$.

Собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda=-i$, мы рассматривать не будем.

Значению $\lambda=1$ соответствуют решения

$$x_{11}=e^t,\ x_{21}=e^t,\ x_{31}=0.$$

Значению $\lambda=i$ соответствуют решения

$$e^{it}=\cos t+i\sin t,\ -ie^{it}=\sin t-i\cos t,$$
$$(1-i)\,e^{it}=(\cos t+\sin t)+i(\sin t-\cos t).$$

Отделяя действительные части, получим решения

$$x_{12}=\cos t,\quad x_{22}=\sin t,\quad x_{32}=\cos t+\sin t.$$

Отделяя мнимые части, находим решения

$$x_{13}=\sin t,\quad x_{23}=-\cos t,\quad x_{33}=\sin t-\cos t.$$

Общее решение

$$x_1=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t,$$
$$x_2=C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t,$$
$$x_3=C_2(\cos t+\sin t)+C_3(\sin t-\cos t).\ \blacktriangle$$

795. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2. \end{cases}$$

△ Решаем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0;\ (5-\lambda)(3-\lambda)+1=0;\ \lambda^2-8\lambda+16=0;\ \lambda_1=\lambda_2=4.$$

Если λ_1 — корень характеристического уравнения кратности m, то этому корню соответствует решение $x_1=p_1(t)\,e^{\lambda_1 t}$, $x_2=p_2(t)\,e^{\lambda_1 t}$, ..., $x_n=p_n(t)\,e^{\lambda_1 t}$, где $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$ — многочлены степени не выше $m-1$.

Таким образом, двукратному корню $\lambda=4$ соответствует решение

$$x_1=e^{4t}(a_1t+a_2),\ x_2=e^{4t}(b_1t+b_2).$$

Дифференцируя x_1 и x_2, получим

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1e^{4t}+4(a_1t+a_2)\,e^{4t},\quad \frac{dx_2}{dt}=b_1e^{4t}+4(b_1t+b_2)\,e^{4t}.$$

Значения x_1, x_2, $\dfrac{dx_1}{dt}$, $\dfrac{dx_2}{dt}$ подставим в систему уравнений. После сокращения на e^{4t} имеем

$$a_1+4(a_1t+a_2)=5(a_1t+a_2)-(b_1t+b_2),$$
$$b_1+4(b_1t+b_2)=a_1t+a_2+3(b_1t+b_2).$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем системы уравнений

$$\begin{cases} 4a_1=5a_1-b_1, \\ 4b_1=a_1+3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1+4a_2=5a_2-b_2, \\ b_1+4b_2=a_2+3b_2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_1=b_1$, $a_2-b_2=a_1=b_1$. Полагая $a_1=C_1$, $a_2=C_2$ (C_1, C_2 — произвольные постоянные), находим $b_1=C_1$, $b_2=C_2-C_1$. Следовательно,

$$x_1=e^{4t}(C_1t+C_2),\ x_2=e^{4t}(C_1t+C_2-C_1).$$

Эта система проще решается методом исключения. Действительно, выразив из первого уравнения x_2 и продифференцировав, подставим затем значения x_2 и $\dfrac{dx_2}{dt}$ во второе уравнение. В результате получим линейное однородное уравнение второго порядка относительно x_1. Рекомендуем самостоятельно решить данную систему методом исключения. ▲

Найти общие решения систем уравнений:

796. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-ax_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=-ax_1. \end{cases}$ **797.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=8x_2-x_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2. \end{cases}$

798. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+x_3. \end{cases}$ **799.** $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-x_2. \end{cases}$

800. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 12x_1 - 5x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$

801. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2. \end{cases}$

802. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -15x_1 - 6x_2 + 16x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -15x_1 - 7x_2 + 18x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -19x_1 - 8x_2 + 21x_3. \end{cases}$

803. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a+1)\,x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + (a-1)\,y. \end{cases}$

804. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

805. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ, ЕГО ЧАСТОТА И ВЕРОЯТНОСТЬ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия события и вероятности события.

Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

События будем обозначать буквами A, B, C, ... Если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условий, то оно называется *достоверным*; если же оно не может произойти — *невозможным*.

Если событие A при реализации комплекса условий может произойти, а может и не произойти, то оно называется *случайным*.

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, будем называть *суммой* (*объединением*) событий A и B и обозначать $A+B$ или $A \cup B$.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, будем называть *произведением* (*совмещением*) событий A и B и обозначать AB или $A \cap B$.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пусть, например, нас интересует появление определенного числа очков на грани при одном бросании игральной кости: $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Выпадение конкретного числа очков назовем *элементарным событием* (*исходом*), которое обозначим ω_i. Таким образом, для каждого связанного с этим опытом события A можно выделить совокупность тех элементарных исходов ω, наступление которых влечет за собой наступление события A.

Пусть событие A состоит в появлении нечетного числа очков на грани. Этому событию благоприятствуют элементарные события ω_1, ω_3, ω_5, т. е. некоторое подмножество множества всех элементарных исходов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$.

Совокупность элементарных событий обозначается Ω и называется *пространством элементарных событий*.

Элементарные события взаимно исключают друг друга и в результате данного опыта обязательно произойдет одно из них. Пространство элементарных событий образует так называемую *полную группу попарно несовместных событий*, так как появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными*. Для противоположных событий одновременно выполняются два условия: $A+\overline{A}$ — достоверное событие и $A\overline{A}$ — невозможное событие.

Для количественной оценки возможности появления случайного события A вводится понятие вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу:

$$P(A)=m/n$$

(классическое определение вероятности).

В рассмотренном примере вероятность выпадения грани с нечетным числом очков составляет $P(A)=3/6=1/2$.

Приведем аксиоматическое определение вероятности, предложенное А. Н. Колмогоровым.

1^0. *Каждому случайному событию A из поля событий ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$, называемоз вероятностью.*

2^0. $P(\Omega)=1$.

3^0. Аксиома сложения. *Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k)$.*

Отсюда следует, что:

1) вероятность невозможного события равна нулю;

2) для любого события A $P(A)=1-P(\overline{A})$, где $\overline{A}$ — противоположное событие;

3) каково бы ни было случайное событие A, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

Используя эти аксиомы, свойства вероятностей выводят в качестве теорем.

К числу основных понятий теории вероятностей также относится *частота* события, под которой понимают отношение числа испытаний, в которых это событие произошло, к общему числу фактически произведенных испытаний. Частоту события называют *статистической вероятностью*. Для вычисления частоты события необходимо произвести в действительности испытания (опыт), что не требуется для определения вероятности.

Массовые случайные события обладают свойством *устойчивости частоты*: наблюдаемые в различных сериях однородных испытаний (с достаточно большим числом испытаний в каждой серии) значения частоты данного случайного события колеблются от серии к серии в довольно тесных пределах и стремятся (по вероятности) к некоторому постоянному числу. При этих условиях частоту можно принять за приближенное значение вероятности.

При классическом определении вероятности не всегда можно определить числа m и n для вычисления вероятностей событий, и поэтому непосредственно пользоваться формулой $P(A)=m/n$ не удается. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, т. е. вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т. д.).

Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g. При этом выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо часть области G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т. д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$p=\frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}$$

(геометрическое определение вероятности).

806. В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

△ Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу всех возможных случаев, т. е. $m=n=10$ и $P(A)=1$. В этом случае событие A достоверно. ▲

807. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

△ Синих шаров в урне нет, т. е. $m=0$, а $n=15$. Следовательно, $P(A)=0/15=0$. В данном случае событие A — невозможное. ▲

808. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

△ Здесь $m=4$, $n=12$ и $P(A)=4/12=1/3$. ▲

809. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара — белые?

△ Здесь число всех случаев $n = C_{10}^2 = (10 \cdot 9)/(1 \cdot 2) = 45$. Число же случаев, благоприятствующих событию A, определяется равенством $m = C_6^2$, т. е. $m = (6 \cdot 5)/(1 \cdot 2) = 15$. Итак, $P(A) = 15/45 = 1/3$. ▲

810. В лотерее 2000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 руб., на четыре билета — выигрыш по 50 руб., на десять билетов — выигрыш по 20 руб., на двадцать билетов — выигрыш по 10 руб., на 165 билетов — выигрыш по 5 руб., на 400 билетов — выигрыш по 1 руб. Остальные билеты невыигрышные. Какова вероятность выиграть по билету не менее 10 руб.?

△ Здесь $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$, т. е. $P(A) = m/n = 35/2000 = 0{,}0175$. ▲

811. В урне 20 шаров с номерами от 1 до 20. Какова вероятность вынуть шар с номером 37?

812. Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

813. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором — с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров: 1) не меньше 7; 2) равна 11; 3) не больше 11?

814. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 — выигрышные и 500 — невыигрышные. Куплено два билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

815. В группе из 30 учеников на контрольной работе 6 учеников получили оценку «отлично», 10 учеников — «хорошо», 9 учеников — «удовлетворительно». Какова вероятность того, что все три ученика, вызванные к доске, имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе?

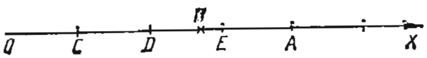

Рис. 37

816. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу нанесена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину, бóльшую $L/4$.

△ Разобьем отрезок OA на четыре равные части точками C, D, E (рис. 37). Требование задачи будет выполнено, если точка B попадет на отрезок DE, длина которого равна $L/4$. Следовательно, $p = (L/4):L = 1/4$. ▲

817. Внутри эллипса $x^2/25 + y^2/16 = 1$ расположен круг $x^2 + y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

△ Пусть событие A — попадание точки в кольцо. Тогда $P(A) = S_{\text{кол}}/S_{\text{эл}}$, где $S_{\text{кол}} = S_{\text{эл}} - S_{\text{кр}} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$, то

$$P(A) = (20\pi - 9\pi)/(20\pi) = 11/20 = 0{,}55. \quad ▲$$

Примечание. В случае классического определения вероятность невозможного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение, т. е. если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. При геометрическом же определении вероятности обратное утверждение не имеет места. Вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

818 (Задача о встрече). Два студента A и B условились встретиться в определенном месте во время перерыва между 13 ч и 13 ч 50 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 мин может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

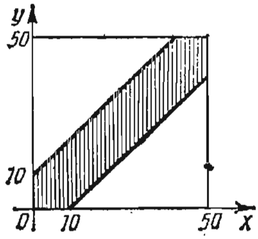

Рис. 38

△ Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B — через y. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x-y| \leqslant 10$. Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем одну минуту (рис. 38). Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50, а исходы, благоприятствующие встрече, — точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$p=(50^2-40^2)/50^2=0{,}36. \blacktriangle$$

819. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R. Найти вероятность того, что эта точка окажется от центра на расстоянии, меньшем r $(r<R)$.

820. Точка взята наудачу внутри круга радиуса R. Найти вероятность того, что эта точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от расположения внутри круга.

821. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Теорема сложения вероятностей. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Эта теорема обобщается на случай произвольного числа попарно несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Событие A называется *независимым* от события B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет. Событие A называется *зависимым* от события B, если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что имело место другое событие B, называется *условной вероятностью* события A и обозначается $P(A/B)$.

Условие независимости события A от события B можно записать в виде $P(A/B)=P(A)$, а условие зависимости — в виде $P(A/B) \neq P(A)$.

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:*

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A) \quad \text{или} \quad P(AB)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A; тогда

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Условная вероятность события A_k, определенная в предположении, что осуществились события $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, обозначается $P(A_k/A_1A_2\ldots A_{k-1})$.

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место:

$$P(A_1A_2\ldots A_k)=P\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots P(A_k/A_1A_2\ldots A_{k-1}).$$

В случае независимых событий справедлива формула

$$P\left(\prod_{i=1}^{k} A_i\right)=\prod_{i=1}^{k} P(A_i).$$

822. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый; черный; синий; красный; белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

△ Имеем $n=10+15+20+25=70$, $P(\text{Б})=10/70=1/7$, $P(\text{Ч})=15/70=3/14$, $P(\text{С})=20/70=2/7$, $P(\text{К})=25/70=5/14$. Применив теорему сложения вероятностей, получим

$$P(\text{Б}+\text{Ч})=P(\text{Б})+P(\text{Ч})=1/7+3/14=5/14;$$
$$P(\text{С}+\text{К})=P(\text{С})+P(\text{К})=2/7+5/14=9/14;$$
$$P(\text{Б}+\text{Ч}+\text{С})=1-P(\text{К})=1-5/14=9/14. \ ▲$$

823. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

△ В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A — появление белого шара из первого ящика, событие B — появление белого шара из второго ящика. При этом A и B — независимые события. Имеем $P(A)=2/12=1/6$, $P(B)=8/12=2/3$. Применив теорему умножения вероятностей, находим

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=(1/6)\cdot(2/3)=1/9. \ ▲$$

824. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой — черный.

△ Пусть:
событие A — появление белого шара из первого ящика;

» B — » » » » второго »

» C — » черного » » первого » $(C=\overline{A})$;

» D — » » » » второго » $(D=\overline{B})$.

Тогда $P(A)=1/6$, $P(B)=2/3$, $P(C)=P(\overline{A})=1-1/6=5/6$, $P(D)=P(\overline{B})=1-2/3=1/3$.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика — черный:

$$P(AD)=P(A)\cdot P(D)=(1/6)\cdot(1/3)=1/18.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика — белый:

$$P(BC)=P(B)\cdot P(C)=(2/3)\cdot(5/6)=5/9.$$

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого или второго), окажется белым, а шар, вынутый из другого ящика, — черным. Применяем теорему сложения вероятностей:

$$P=P(AD)=P(BC)=1/18+5/9=11/18. \ ▲$$

825. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

△ Пусть событие A — появление белого шара при первом вынимании; событие B — появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для случая зависимых событий имеем $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$. Но $P(A)=6/(6+8)=6/14=3/7$ (вероятность появления первого белого шара); $P(B/A)=(6-1)/(6+8-1)=5/13$ (вероятность появления второго белого шара в предположении, что первый белый шар уже вынут). Следовательно, $P(AB)=(3/7)\cdot(5/13)=15/91$. ▲

826. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго — 0,8, для третьего — 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

△ $P(A)=0{,}75$, $P(B)=0{,}8$, $P(C)=0{,}9$; $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}75\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}54$. ▲

827. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадает хотя бы один стрелок.

△ Здесь $P(\overline{A})=1-0{,}75=0{,}25$ (вероятность промаха первого стрелка); $P(\overline{B})=1-0{,}8=0{,}2$ (вероятность промаха второго стрелка); $P(\overline{C})=1-0{,}9=0{,}1$ (вероятность промаха третьего стрелка); тогда $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ — вероятность одновременного промаха всех трех стрелков — определится следующим образом:

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=0{,}25\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}005.$$

Но событие, противоположное событию $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность $P=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$, т. е. $P=1-0{,}005=0{,}995$. ▲

828. Вероятность выхода станка из строя в течение одного рабочего дня равна α (α — малое положительное число, второй степенью которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя? Решить задачу при $\alpha=0{,}01$.

△ Так как $1-\alpha$ — вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение дня, то по теореме умножения вероятностей $(1-\alpha)^5$ — вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение 5 дней.

Воспользовавшись биномиальным разложением и пренебрегая членами, содержащими α^2, α^3, α^4 и α^5, получим приближенное равенство $(1-\alpha)^5 \approx 1-5\alpha$, т. е. $P \approx 1-5\alpha$. Приняв $\alpha=0{,}01$, получаем $P \approx 0{,}95$. ▲

829. В ящике a белых и b черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой — черный? (Вынутый шар в урну не возвращается).

△ Пусть:

событие	A —	появление	белого	шара при	первом	вынимании;
»	B —	»	черного	» »	втором	» ;
»	C —	»	»	» »	первом	» ;
»	D —	»	белого	» »	втором	» .

Вычислим вероятность того, что первый вынутый шар белый, а второй — черный:

$$P_1=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b-1}=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Найдем вероятность того, что первый вынутый шар черный, а второй — белый:

$$P_2=P(C)\cdot P(D/C)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

Таким образом, вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой — черный, определится по теореме сложения: $P=P_1+P_2$, т. е.

$$P=\frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}. \ ▲$$

830. В ящике a белых, b черных и c синих шаров. Вынули один шар. Вычислить вероятность того, что вынутый шар: 1) белый; 2) черный; 3) синий; 4) белый или черный; 5) белый или синий; 6) черный или синий.

831. В первом ящике a белых и b черных шаров; во втором ящике c белых и d черных шаров. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара черные?

832. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна p_1, а вторым стрелком — p_2. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что один из них попадет в цель, а другой не попадет?

833. Вероятность того, что в южном городе N температура в июле в любой день меньше $5°$, равна α (α — малое число, квадратом которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что в течение первых трех дней июля температура будет не меньше $5°$?

834. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором ящике 2 белых, 6 красных, 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих?

835. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдет ни одной неполадки?

836. В классе 12 мальчиков и 18 девочек. Нужно выбрать делегацию из двух человек. Какова вероятность (если считать выбор случайным), что выбраны: 1) два мальчика; 2) две девочки; 3) девочка и мальчик?

837. В урне 9 белых и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова вероятность того, что все шары белые?

838. Производят три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов произойдет только одно попадание.

§ 3. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ. НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО НАСТУПЛЕНИЙ СОБЫТИЯ

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, то вероятность того, что событие A появится в этих n испытаниях m раз, выражается *формулой Бернулли*

$$P_{m,\,n}=C_n^m\, p^m q^{n-m},$$

где $q=1-p$. Таким образом,

$$P_{0,\,n}=q^n,\ P_{1,\,n}=npq^{n-1},\ P_{2,\,n}=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}p^2q^{n-2},\ \ldots,\ P_{n,\,n}=p^n.$$

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом* наступлений события A в n испытаниях, если значение $P_{m,\,n}$ при $m=m_0$ не меньше остальных значений $P_{m,\,n}$, т. е. $P_{m_0,\,n}\geqslant P_{m_i,\,n}$ при $m_i\neq m_0$.

Если $p\neq 0$ и $p\neq 1$, то число m_0 можно определить из двойного неравенства

$$np-q\leqslant m_0\leqslant np+p.$$

Разность граничных значений в этом двойном неравенстве равна 1. Если $np+p$ не является целым числом, то двойное неравенство определяет лишь одно наивероятнейшее значение m_0. Если же $np+p$ — целое число, то имеются два наивероятнейших значения: $m_0'=np-q$ и $m_0''=np+p$.

839. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

△ Вероятность извлечения белого шара $p=20/30=2/3$ можно считать одной и той же во всех четырех испытаниях; $q=1-p=1/3$. Используя формулу Бернулли, получаем

$$P_{2,\,4}=C_4^2p^2q^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}.\ ▲$$

840. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трех раз?

△ Здесь $p=0,4$, $q=0,6$. Имеем:
вероятность появления события A 0 раз: $P_{0,10}=q^{10}$;
» » » » 1 »: $P_{1,10}=10pq^9$;
» » » » 2 раза: $P_{2,10}=45p^2q^8$;
» » » » 3 »: $P_{3,10}=120p^3q^7$.

Вероятность того, что событие A появится не больше трех раз, составляет

$$P=P_{0,10}+P_{1,10}+P_{2,10}+P_{3,10},$$

т. е.

$$P=q^{10}+10pq^9+45p^2q^8+120p^3q^7, \text{ или } P=q^7(q^3+10q^2p+45qp^2+120p^3).$$

Полагая $p=0,4$, $q=0,6$, получим $P=0,6^7(0,216+1,44+4,32+7,68)\approx 0,38$. ▲

841. Определить вероятность того, что в семье, имеющей пять детей, будет три девочки и два мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

△ Вероятность рождения девочки $p=0,5$, тогда $q=1-p=0,5$ (вероятность рождения мальчика). Значит, искомая вероятность

$$P_{3,5}=C_5^3p^3q^2=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0,5)^3\cdot(0,5)^2=\frac{5}{16}. \ ▲$$

842. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что среди детей будет не больше трех девочек.

△ $P_{0,5}=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$; $P_{1,5}=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{32}$;

$P_{2,5}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$; $P_{3,5}=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$;

$P=P_{0,5}+P_{1,5}+P_{2,5}+P_{3,5}=\frac{13}{16}$. ▲

843. Монету подбрасывают 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

844. Монету подбрасывают 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не больше трех раз?

845. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было два мальчика и одна девочка?

846. В каждом из четырех ящиков по 5 белых и по 15 черных шаров. Из каждого ящика вынули по одному шару. Какова вероятность вынуть два белых и два черных шара?

847. В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

△ Здесь $n=14$, $p=10/50=1/5$, $q=1-p=4/5$. Используя двойное неравенство $np-q\leqslant m_0\leqslant np+p$ при указанных значениях n, p и q, получим

$$14/5-4/5\leqslant m_0\leqslant 14/5+1/5, \text{ т. е. } 2\leqslant m_0\leqslant 3.$$

Таким образом, задача имеет два решения: $m_0'=2$, $m_0''=3$. ▲

848. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

△ Здесь $n=25$, $p=0{,}7$, $q=0{,}3$. Следовательно,

$$25\cdot 0{,}7-0{,}3\leqslant m_0\leqslant 25\cdot 0{,}7+0{,}7, \text{ т. е. } 17{,}2\leqslant m_0\leqslant 18{,}2.$$

Так как m — целое число, то $m_0=18$. ▲

849. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет.

△ Имеем $n=40$, $p=1/7$, $q=6/7$. Таким образом,

$$40\cdot\frac{1}{7}-\frac{6}{7}\leqslant m_0\leqslant 40\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{7},\ 4\frac{6}{7}\leqslant m_0\leqslant 5\frac{6}{7}, \text{ т. е. } m_0=5. ▲$$

850. Имеется 20 ящиков однородных деталей. Вероятность того, что в одном взятом наудачу ящике детали окажутся стандартными, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число ящиков, в которых все детали стандартные.

851. В урне 100 белых и 80 черных шаров. Из урны извлекают n шаров (с возвратом каждого вынутого шара). Наивероятнейшее число появлений белого шара равно 11. Найти n.

△ Из двойного неравенства $np-q\leqslant m_0\leqslant np+p$ следует, что

$$(m_0-p)/p\leqslant n\leqslant (m_0+q)/p.$$

Здесь $m_0=11$, $p=100/180=5/9$, $q=4/9$; следовательно,

$$\frac{11-5/9}{5/9}\leqslant n\leqslant\frac{11+4/9}{5/9}, \text{ т. е. } 18{,}8\leqslant n\leqslant 20{,}6.$$

Итак, задача имеет два решения: $n_1=19$, $n_2=20$. ▲

852. Можно ли в предыдущей задаче изменить числовые значения m_0 и p так, чтобы задача не имела решений?

853. Первый рабочий за смену может изготовить 120 изделий, а второй — 140 изделий, причем вероятности того, что эти изделия высшего сорта, составляют соответственно 0,94 и 0,8. Определить наивероятнейшее число изделий высшего сорта, изготовленных каждым рабочим.

854. Имеется 100 урн с белыми и черными шарами. Вероятность появления белого шара из каждой урны равна 0,6. Найти наивероятнейшее число урн, в которых все шары белые.

§ 4. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Если известно, что событие A может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (гипотез), образующими полную группу попарно несовместных событий, то событие A можно представить как объединение событий AH_1, AH_2, $\ldots$, AH_n, т. е. $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. Вероятность события A можно определить по формуле

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

Условная вероятность события H_i в предположении, что событие A уже имеет место, определяется по *формуле Бейеса*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A/H_i) \cdot P(H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вероятности $P(H_i/A)$, вычисленные по формуле Бейеса, часто называют *вероятностями гипотез*.

855. Имеются четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй — 2 белых и 3 черных шара, в третьей — 3 белых и 5 черных шаров, и четвертой — 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i — выбор i-й урны ($i = 1, 2, 3, 4$). Известно, что вероятность выбора i-й урны равна $i/10$, т. е. $P(H_1) = 1/10$, $P(H_2) = 1/5$, $P(H_3) = 3/10$, $P(H_4) = 2/5$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

△ Из условия следует, что $P(A/H_1) = 1/2$ (условная вероятность извлечения белого шара из первой урны); аналогично $P(A/H_2) = 2/5$, $P(A/H_3) = 3/8$, $P(A/H_4) = 4/11$. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4) =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{11} = \frac{1707}{4400}. \ ▲$$

856. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором — 10 белых и 10 черных шаров, в третьем — 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

△ Пусть H_1, H_2, H_3 — гипотезы, состоящие в выборе соответственно первого, второго и третьего ящика; событие A — появление белого шара. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ (выбор любого из ящиков равновозможен); $P(A/H_1) = 1$ (вероятность извлечения белого шара из первого ящика); $P(A/H_2) = 10/20 = 1/2$ (вероятность извлечения белого шара из второго ящика); $P(A/H_3) = 0$ (вероятность извлечения белого шара из третьего ящика).

Искомую вероятность $P(H_1/A)$ находим по формуле Бейеса:

$$P(H_1/A) = \frac{1 \cdot (1/3)}{1 \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3)} = \frac{2}{3}. \ ▲$$

857. В ящике имеется N изделий, среди которых могут быть и бракованные. Вынутое наугад изделие оказалось небракованным. Определить вероятность того, что: все изделия в ящике небракованные; $N-1$ изделий небракованных и одно изделие бракованное; $N-2$ изделий небракованных и два изделия бракованных; ...; все N изделий в ящике бракованные.

△ Гипотезы до опыта: H_0 — все изделия в ящике небракованные; H_1 — одно изделие бракованное; H_2 — два изделия бракованных; ...; H_N — все изделия бракованные. Событие A — появление небракованного изделия. Требуется найти $P(H_0/A)$, $P(H_1/A)$, $P(H_2/A)$, ..., $P(H_N/A)$.

Пусть до опыта все гипотезы равновозможны:

$$P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=\ldots=P(H_N)=\frac{1}{N+1},$$

т. е.

$$P(A/H_0)=1,\ P(A/H_1)=\frac{N-1}{N},\ P(A/H_2)=\frac{N-2}{N},\ \ldots,$$

$$P(A/H_{N-1})=\frac{1}{N},\ P(A/H_N)=0.$$

Отсюда находим

$$P(H_0/A)=\frac{1\cdot\frac{1}{N+1}}{1\cdot\frac{1}{N+1}+\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}+0\cdot\frac{1}{N+1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{2}{N}+\ldots+\frac{N-1}{N}+1}=\frac{N}{1+2+\ldots+N-1+N}=\frac{2}{N+1}.$$

Аналогично получаем

$$P(H_1/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-1}{N},\ P(H_2/A)=\frac{2}{N+1}\cdot\frac{N-2}{N},\ \ldots,\ P(H_N/A)=$$

$$=\frac{2}{N+1}\cdot 0=0.\ ▲$$

858. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй — 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар — белый.

△ После того, как из второй урны переложили в первую один шар, в первой урне оказалось две совокупности шаров: 1) 5 белых и 10 черных шаров, первоначально находившихся в этой урне; 2) один шар, переложенный из второй урны. Вероятность появления белого шара из первой совокупности составляет $P(A/H_1)=5/15=1/3$, а из второй совокупности $P(A/H_2)=3/10$. Вероятность того, что произвольно вынутый шар принадлежит первой совокупности, есть $P(H_1)=15/16$, а второй совокупности — $P(H_2)=1/16$.

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{10}=\frac{53}{160}.\ ▲$$

859. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй — 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый?

§ 5. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА И ЗАКОН ЕЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если каждому элементарному событию ω из некоторого множества событий Ω можно поставить в соответствие определенную величину $X = X(\omega)$, то говорят, что задана *случайная* величина. Случайную величину X можно рассматривать как функцию события ω с областью определения Ω.

Случайная величина может принять то или иное значение из некоторого числового множества, однако заранее неизвестно, какое именно. Случайные величины принято обозначать большими буквами X, Y, ..., а принимаемые ими значения — соответствующими строчными буквами x, y, ...

Если значения, которые может принимать данная случайная величина X, образуют дискретный (конечный или бесконечный) ряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, то и сама случайная величина X называется *дискретной*.

Если же значения, которые может принимать данная случайная величина X, заполняют конечный или бесконечный промежуток (a, b) числовой оси Ox, то случайная величина называется *непрерывной*.

Каждому значению случайной величины дискретного типа x_n отвечает определенная вероятность p_n; каждому промежутку (a, b) из области значений случайной величины непрерывного типа также отвечает определенная вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной, попадет в этот промежуток.

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, где суммирование распространяется на все (конечное или бесконечное) множество возможных значений данной случайной величины X.

Закон распределения непрерывной случайной величины удобно задавать с помощью так называемой *функции плотности вероятности* $f(x)$. Вероятность $P(a < X < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной X, попадет в промежуток (a, b), определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

График функции $f(x)$ называется *кривой распределения*. Геометрически вероятность попадания случайной величины в промежуток (a, b) равна площади соответствующей криволинейной трапеции, ограниченной кривой распределения, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 39).

Функция плотности вероятности $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1°. $f(x) \geqslant 0$.

2°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

(если все значения случайной величины X заключены в промежутке (a, b), то последнее равенство можно записать в виде $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 1$).

Рассмотрим теперь функцию $F(x) = P(X < x)$. Эта функция называется *функцией распределения вероятности* случайной величины X. Функция $F(x)$ существует как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин. Если $f(x)$ — функция плотности распределения вероятности непрерывной случайной величины X, то

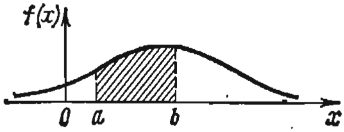

Рис. 39

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Из последнего равенства следует, что

$$f(x) = F'(x).$$

Иногда функцию $f(x)$ называют *дифференциальной функцией распределения вероятности*, а функцию $F(x)$ — *интегральной функцией распределения вероятности*.

Отметим важнейшие свойства функции распределения вероятности:

1°. $F(x)$ — неубывающая функция.

2°. $F(-\infty) = 0$,

3°. $F(+\infty) = 1$.

Понятие функции распределения является центральным в теории вероятностей. Используя это понятие, можно дать другое определение непрерывной случайной величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если ее интегральная функция распределения $F(x)$ непрерывна.

860. Даны вероятности значений случайной величины X: значение 10 имеет вероятность 0,3; значение 2 — вероятность 0,4; значение 8 — вероятность 0,1; значение 4 — вероятность 0,2. Построить ряд распределения случайной величины X.

△ Расположив значения случайной величины в возрастающем порядке, получим ряд распределения:

x_i	2	4	8	10
p_i	0,4	0,2	0,1	0,3

Возьмем на плоскости xOp точки (2; 0,4), (4; 0,2) и т. д. Соединив последовательные точки прямолинейными отрезками, получим так называемый *многоугольник* (или *полигон*) распределения случайной величины X (рис. 40). ▲

861. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ a(3x-x^2) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 0 & \text{при } x>3 \end{cases}$$

Требуется: 1) Найти коэффициент a; 2) построить график распределения плотности $y=f(x)$; 3) найти вероятность попадания X в промежуток **(1, 2)**.

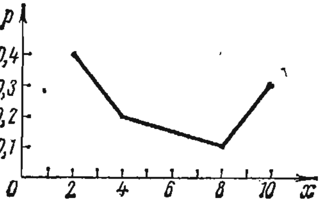

Рис. 40

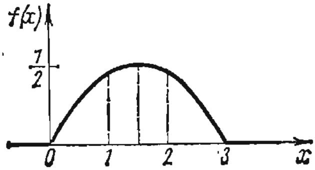

Рис. 41

△ 1) Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке [0, 3], то $\int\limits_0^3 a(3x-x^2)\,dx=1$, откуда

$$a\left[\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3=1,\quad \text{или}\quad a\left(\frac{27}{2}-9\right)=1,\ \text{т. е.}\ a=\frac{2}{9}.$$

2) Графиком функции $f(x)$ в интервале [0, 3] является парабола $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2$, а вне этого интервала графиком служит сама ось абсцисс (рис. 41).

3) Вероятность попадания случайной величины X в промежуток **(1, 2)** найдется из равенства

$$P(1<X<2)=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27}\right]_1^2=\frac{4}{3}-\frac{16}{27}-\frac{1}{3}+\frac{2}{27}=\frac{13}{27}.\ ▲$$

862. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности этой случайной величины.

△ Если $x\leqslant 10$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

» $10<x\leqslant 20$, » $F(x)=P(X<x)=0{,}2$;

» $20<x\leqslant 30$, » $F(x)=P(X<x)=0{,}2+0{,}3=0{,}5$;

» $30<x\leqslant 40$, » $F(x)=P(X<x)=0{,}2+0{,}3+0{,}35=0{,}85$;

» $40<x\leqslant 50$, » $F(x)=P(X<x)=0{,}2+0{,}3+0{,}35+0{,}1=0{,}95$;

» $x>50$, » $F(x)=P(X<x)=0{,}2+0{,}3+0{,}35+0{,}1+0{,}05=1$. ▲

863. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией)

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1 \\ (x-1)/2 & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы **(1,5; 2,5) и (2,5; 3,5).**

△ $P_1=F(2{,}5)-F(1{,}5)=(2{,}5-1)/2-(1{,}5-1)/2=0{,}75-0{,}25=0{,}5,$
$P_2=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-(2{,}5-1)/2=1-0{,}75=0{,}25.$ ▲

864. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы **(1; 2,5) и (2,5; 3,5).**

△ $P_1=F(2{,}5)-F(1)=(2{,}5-2)^2-0=0{,}25,$
$P_2=F(3{,}5)-F(2{,}5)=1-(2{,}5-2)^2=1-0{,}25=0{,}75.$ ▲

865. Случайная величина X задана функцией распределения, указанной в предыдущей задаче. Найти плотность распределения (дифференциальную функцию распределения) случайной величины.

△ Плотность распределения равна производной функции распределения, т. е. $f(x)=F'(x)$, поэтому

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<2, \\ 2(x-2) & \text{при } 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 0 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

866. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

● Воспользоваться формулой Бернулли.

867. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X — сумма номеров шаров. Построить ряд распределения случайной величины X.

868. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} a/\sqrt{a^2-x^2} & \text{при } |x|<a, \\ 0 & \text{при } |x|\geqslant a. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) найти вероятность попадания случайной величины X на участок **$(a/2, a)$**; 3) построить график распределения плотности вероятности.

869. Показать, что функция $f(x)=1/(x^2+\pi^2)$ является плотностью вероятности некоторой случайной величины X, и вычислить вероятность попадания случайной величины X на участок (π, ∞).

870. Дана функция плотности распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ a \sin x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Определить a и $F(x)$.

871. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули один шар. Случайная величина X — число вынутых белых шаров. Построить функцию распределения $F(x)$.

§ 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности этих значений.

Если случайная величина X характеризуется конечным рядом распределения:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

то математическое ожидание $M(X)$ определяется по формуле

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n, \text{ или } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \quad (1)$$

Так как $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, то

$$M(X) = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

Таким образом, $M(X)$ является взвешенной средней арифметической значений случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при весах $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Если $n = \infty$, то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ (при условии, что ряд абсолютно сходится).

Понятие математического ожидания распространяется и на непрерывную случайную величину. Пусть $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины X. Тогда *математическое ожидание непрерывной случайной величины* X определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

(при условии, что интеграл абсолютно сходится).

Геометрически математическое ожидание как непрерывной, так и дискретной случайной величины равно абсциссе центра тяжести площади, ограниченной кривой (или полигоном) распределения и осью абсцисс. Поэтому при симметрии кривой (или полигона) распределения относительно некоторой прямой, параллельной оси ординат, математическое ожидание совпадает с абсциссой точки пересечения этой оси симметрии с осью абсцисс.

Точка оси Ox, имеющая абсциссу, равную математическому ожиданию случайной величины, часто называется *центром распределения* этой случайной величины.

Дисперсией случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2.$$

Если ввести обозначение $M(X)=m$, то формулы для вычисления дисперсии дискретной случайной величины X запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i-m)^2, \\ D(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i-m)^2 \text{ (при } n=\infty), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

а для непрерывной случайной величины X — в виде

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Для дисперсии случайной величины справедлива формула

$$D(X)=M[(X-a)^2]-[M(X)-a]^2, \text{ или } D(X)=M[(X-a)^2]-(m-a)^2, \qquad (4)$$

где a — произвольное число. Этой формулой часто пользуются для вычисления дисперсии случайной величины, так как вычисление по этой формуле обычно проще, чем по формулам (2) и (3).

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется величина $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратичное отношение есть мера рассеяния значений случайной величины около ее математического ожидания.

872. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ (1/2)\sin x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ 0 & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

Показать, что $f(x)$ может служить плотностью вероятности некоторой случайной величины X. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

△ Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_0^{\pi} f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^{\pi}=1.$$

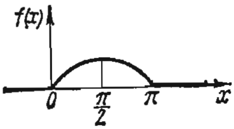

Рис. 42

Кроме того, $f(x)\geqslant 0$. Следовательно, $f(x)$ может служить плотностью вероятности некоторой случайной величины. Так как прямая $x=\pi/2$ является осью симметрии соответствующей дуги кривой $y=(1/2)\sin x$ (рис. 42), то математическое ожидание случайной величины X равно $\pi/2$, т. е. $M(X)=\pi/2$.

Найдем дисперсию. Для этого в формуле (4) положим $a=0$, $M(X)=\pi/2$, тогда остается только вычислить интеграл, определяющий $M(X^2)$; имеем

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi^2-4).$$

Поэтому

$$D(X)=\frac{1}{2}(\pi^2-4)-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-2,\quad \sigma_x=\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-2}\approx 0{,}69.\ \blacktriangle$$

873. Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Определить математическое ожидание и дисперсию.

$\triangle$ По формуле (1) находим математическое ожидание:

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}08+4\cdot 0{,}02=1{,}32.$$

Дисперсию найдем по формуле (4), полагая $a=2$; отсюда $M(X)-a=1{,}32-2=-0{,}68$. Составляем таблицу:

x_i	0	1	2	3	4
x_i-a	-2	-1	0	1	2
$(x_i-a)^2$	4	1	0	1	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02
$p_i(x_i-a)^2$	0,8	0,4	0	0,08	0,08

Теперь находим

$$M[(X-a)^2]=\sum_{i=0}^{4} p_i(x_i-a)^2=1{,}36;$$

$$D(X)=1{,}36-(-0{,}68)^2=1{,}36-0{,}4634=0{,}8966;\quad \sigma_x=\sqrt{0{,}8966}=0{,}95.\ \blacktriangle$$

874. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

875. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0; \\ \lambda(4x-x^3) & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

При каком значении λ функция $f(x)$ может быть принята за плотность вероятности случайной величины X? Определить это значение λ, найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение соответствующей случайной величины X.

§ 7. МОДА И МЕДИАНА

Модой дискретной случайной величины X называется ее наиболее вероятное значение.

Модой непрерывной случайной величины X называется то ее значение, при котором плотность распределения максимальна.

Моду будем обозначать символом $\overline{M}$.

Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение μ, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше μ, т. е. $P(X<\mu)=$ $=P(X>\mu)=0{,}5$.

Геометрически мода является абсциссой той точки кривой (полигона) распределения, ордината которой максимальна. Ордината же, проведенная в точке с абсциссой $x=\mu$, делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения. Если прямая $x=a$ является осью симметрии кривой распределения $y=f(x)$, то $\overline{\mu}=\mu=M(X)=a$ (рис. 43).

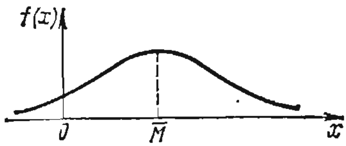

Рис. 43

876. Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины $f(x)=ae^{2x-x^2}$ $(a>0)$. Найти моду этой случайной величины.

△ Найдем максимум функции $y=f(x)$. Для этого находим производные первого и второго порядков:

$$f'(x)=2a(1-x)e^{2x-x^2}, \quad f''(x)=-2ae^{2x-x^2}+4a(1-x)^2e^{2x-x^2}.$$

Из уравнения $f'(x)=0$ получаем $x=1$. Так как $f''(1)=-2ae<0$, то при $x=1$ функция $f(x)$ имеет максимум, т. е. $\overline{M}=1$. Мы не определяли значения постоянной величины a, так как максимум функции $f(x)=ae^{2x-x^2}$ не зависит от числового значения a. ▲

877. Дана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ x-x^3/4 & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 2, \\ 0 & \text{при} \quad x>2. \end{cases}$$

Найти медиану этой случайной величины.

△ Медиану μ найдем из условия $P(X<\mu)=0{,}5$. В данном случае

$$P(X<\mu)=\int\limits_0^{\mu}\left(x-\frac{1}{4}x^3\right)dx=\frac{\mu^2}{2}-\frac{\mu^4}{16}.$$

Таким образом, приходим к уравнению $\mu^2/2-\mu^4/16=0,5$, или $\mu^4-8\mu^2+8=0$, откуда $\mu=\pm\sqrt{4\pm\sqrt{8}}$. Из четырех корней этого уравнения нужно выбрать тот, который заключен между 0 и 2. Таким образом, $\mu=\sqrt{4-\sqrt{8}}\approx 1,09$. ▲

878. Дан ряд распределения дискретной случайной величины:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

Найти моду.

879. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<2, \\ a(x-2)(4-x) & \text{при } 2\leqslant x\leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x>4. \end{cases}$$

Определить значение a, моду и медиану.

§ 8. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Равномерным называется распределение таких случайных величин, все значения которых лежат на некотором отрезке $[a, b]$ и имеют постоянную плотность вероятности на этом отрезке (рис. 44). Таким образом,

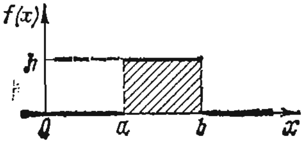

Рис. 44

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ h & \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \\ 0 & \text{при } x>b. \end{cases}$$

Так как $h(b-a)=1$, то $h=1/(b-a)$ и, следовательно,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<a, \\ 1/(b-a) & \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \\ & \text{при } x>b. \end{cases}$$

880. Определить математическое ожидание случайной величины с равномерным распределением.

△ Имеем

$$M(X)=\int_a^b xf(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2},$$

т. е. $M(X)=(a+b)/2$, как это и должно быть в силу симметрии распределения. ▲

881. Вычислить дисперсию и среднее квадратичное отклонение для случайной величины с равномерным распределением.

△ Используем формулу $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, учитывая найденное в предыдущей задаче значение $M(X)=(a+b)/2$. Таким образом, остается вычислить $M(X^2)$; имеем

$$M(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{1}{3(b-a)}\,x^3\Big|_a^b=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Отсюда

$$D(X)=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Следовательно, $\sigma_x=\sqrt{D(X)}=(b-a)/(2\sqrt{3})$. ▲

882. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке [2, 8]. Найти вероятность попадания случайной величины в промежуток **(3, 5)**.

883. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее чем за две минуты до отхода следующего поезда?

§ 9. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАКОН ПУАССОНА

Если вероятность наступления случайного события в каждом испытании равна p, то, как известно, вероятность того, что при n испытаниях событие осуществится m раз, определяется формулой Бернулли:

$$P_{m,\,n}=C_n^m p^m q^{n-m} \quad (\text{где } q=1-p).$$

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать $n+1$ значение $(0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, описываемый формулой Бернулли, называется *биномиальным*.

Закон распределения случайной величины X, которая может принимать любые целые неотрицательные значения $(0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, описываемый формулой

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}\,e^{-a},$$

носит название *закона Пуассона*.

Закон Пуассона является законом распределения вероятностей, например, для следующих случайных величин.

а) Пусть на интервале **(0, *N*)** оси Ox случайно размещаются n точек независимо друг от друга, причем события, заключающиеся в попадании одной точки на любой наперед заданный отрезок постоянной (например, единичной) длины, равновероятны.

Если $N\longrightarrow\infty$, $n\longrightarrow\infty$ и $a=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{n}{N}$, то случайная величина X, равная числу точек, попадающих на заданный отрезок единичной длины (которая может принимать значения $0,\ 1,\ \ldots,\ m,\ \ldots$), распределяется по закону Пуассона.

б) Если n равно среднему числу вызовов абонентов, поступающих за один час на данную телефонную станцию, то число вызовов, поступающих за одну минуту, приближенно распределяется по закону Пуассона, причем $a=n/60$.

Математическое ожидание и дисперсия случайных величин, распределенных по биномиальному закону и закону Пуассона, определяются по следующим формулам:

для биномиального закона: $M(X)=np$; $D(X)=npq$;

для закона Пуассона: $M(X)=a$; $D(X)=a$.

884. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

△ За минуту АТС получает в среднем $300/60=5$ вызовов, т. е. $a=5$. Требуется найти P_2. Применив формулу Пуассона, находим

$$P_2=\frac{5^2}{2!}e^{-5}=\frac{25}{2e^5}\approx 0{,}09. \ ▲$$

885. Книга в 1000 страниц имеет 100 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не менее четырех опечаток?

△ Среднее количество опечаток на одну страницу есть $a=100/1000=0{,}1$. В данном случае следует применить формулу Пуассона:

$$P_m=\frac{(0{,}1)^m}{m!}e^{-0{,}1}.$$

Здесь P_m — вероятность иметь m опечаток на одной странице.

Если $m=0$, то $P_0=e^{-0{,}1}$; если $m=1$, то $P_1=0{,}1\cdot e^{-0{,}1}$; если $m=2$, то $P_2=0{,}005\cdot e^{-0{,}1}$; если $m=3$, то $P_3=0{,}000167\cdot e^{-0{,}1}$. Сумма $P_0+P_1+P_2+P_3$ является вероятностью того, что на странице окажется не более трех опечаток. Эта сумма равна $1{,}105167\cdot e^{-0{,}1}$. Вероятность же того, что на случайно выбранной странице не менее четырех опечаток, равна

$$1-1{,}105167\cdot e^{0{,}1}=1-1{,}105167\cdot 0{,}904837=1-0{,}999996=0{,}000004. \ ▲$$

886. Среди семян ржи имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

887. Определить математическое ожидание и дисперсию частоты m/n появлений случайного события при n испытаниях, если вероятность появления события при одном испытании равна p.

888. Показать, что биномиальное распределение обращается в пределе в распределение Пуассона, если $n\to\infty$, $p\to 0$, но $np=a$.

● Воспользоваться равенством

$$C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{(np)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}(1-p)^{\frac{np}{p}-m}$$

и перейти к пределу.

889. Случайная величина X подчинена биномиальному закону распределения $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. Определить математическое ожидание этой случайной величины.

△ Имеем

$$M(X)=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=\sum_{m=1}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m}=np\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n}C_n^m p^{m-1}q^{n-m}.$$

Но

$$\frac{m}{n}C_n^m=\frac{m}{n}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(m-1)m}=C_{n-1}^{m-1}.$$

Следовательно,

$$M(X) = np \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} p^{(n-1)-(m-1)} = np\,(p+q)^{n-1},$$

т. е. $M(X) = np$.

890. Определить дисперсию случайной величины X, подчиненной биномиальному закону распределения.

△ Предварительно найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = \sum_{m=1}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} = np \sum_{m=1}^{n} m \cdot \frac{m}{n} C_n^m p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)} =$$

$$= np \sum_{m=1}^{n} m C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)} =$$

$$= np \left(\sum_{m=1}^{n} (m-1)\, C_{n-1}^{m-1}\, p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)} + \sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1}\, p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)} \right).$$

Первая из сумм в скобках является математическим ожиданием случайной величины X, подчиненной биномиальному закону $P(X = m-1) = C_{n-1}^{m-1} p^{m-1} q^{(n-1)-(m-1)}$, поэтому она равна $(n-1)\,p$ (см. предыдущую задачу). Вторая же сумма равна $(p+q)^{n-1} = 1$.

Итак, $M(X^2) = np\,(n-1)\,p + np$. Но $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, поэтому

$$D(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np\,(1-p) = npq. \ ▲$$

891. Найти математическое ожидание случайной величины X, подчиненной закону Пуассона $P(X = m) = \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$.

△ Имеем

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m e^{-a}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!} = ae^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Но $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = e^a$, следовательно, $M(X) = a$. ▲

892. Найти дисперсию случайной величины X, подчиненной закону Пуассона.

△ Сначала находим

$$M(X^2) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{a^m e^{-a}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} =$$

$$= a \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^{m-1} e^{-a}}{(m-1)!} + ae^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Первая сумма является математическим ожиданием случайной величины X, подчиненной закону Пуассона, а вторая сумма равна e^a. Отсюда получаем $M(X^2)=a^2+a$. Следовательно, $D(X)=a^2+a-a^2=a$. ▲

893. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 2/3. Стрелком сделано 15 выстрелов. Случайная величина X — число попаданий в мишень. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

△ Здесь следует воспользоваться значениями математического ожидания и дисперсии для биномиального закона распределения: $M(X)=np=15\cdot(2/3)=10$, $D(X)=npq=15\cdot(2/3)\cdot(1/3)=10/3$. ▲

§ 10. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ (ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ФУНКЦИЯ НАДЕЖНОСТИ

Аналогом закона Пуассона для непрерывных случайных величин служит *показательный* (*экспоненциальный*) закон, функция плотности распределения которого имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geqslant 0, \end{cases}$$

где $\lambda>0$ — постоянный параметр.

Функция распределения (интегральная функция) показательного закона

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{x} xe^{-\lambda x}\,dx=1-e^{-\lambda x},$$

т. е.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geqslant 0. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β) составляет

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=(1-e^{-\lambda\beta})-(1-e^{-\lambda\alpha})=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta},$$

т. е.

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Определим числовые характеристики показательного закона распределения: математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

дисперсия

$$D(X)=\int\limits_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx-[M(X)]^2=$$

$$=\left[-x^2e^{-\lambda x}-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2},$$

среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\lambda}, \text{ т. е. } M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Если T — непрерывная случайная величина, выражающая продолжительность времени безотказной работы какого-либо элемента, а λ — интенсивность отказов (среднее число отказов в единицу времени), то продолжительность времени t безотказной работы этого элемента можно считать случайной величиной, распределенной по показательному закону с функцией распределения $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$, которая определяет вероятность отказа элемента за время t.

Функция надежности $R(t)$ определяет вероятность безотказной работы элемента за время t: $R(t) = e^{-\lambda t}$.

894. Для какого значения k функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ ke^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

является функцией плотности показательного закона?

△ Так как $f(x) = 0$ при $x < 0$, то $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \int\limits_0^\infty ke^{-\lambda x}\,dx = 1$. Отсюда $k\left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = 1$, $\frac{k}{\lambda} = 1$, т. е. $k = \lambda$. ▲

895. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 4e^{-4x} & \text{при} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал $(0{,}2;\ 0{,}5)$.

△ Используя формулу $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$, имеем

$$P(0{,}2 < X < 0{,}5) = e^{-4\cdot 0{,}2} - e^{-4\cdot 0{,}5} = e^{-0{,}8} - e^{-2} = 0{,}4493 - 0{,}1353 = 0{,}314$$

(для вычисления значений функции e^{-x} мы воспользовались табл. II на с. 410). ▲

896. Время t расформирования состава через горку — случайная величина, подчиненная показательному закону. Пусть $\lambda = 5$ — среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 ч. Определить вероятность того, что время расформирования состава: 1) меньше 30 мин; 2) больше 6 мин, но меньше 24 мин.

△ Используем функцию распределения показательного закона $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

1) Вероятность того, что расформирование состава займет менее 30 мин $= 0{,}5$ ч, есть

$$F(0{,}5) = P(T < 0{,}5) = 1 - e^{-5\cdot 0{,}5} = 1 - e^{-2{,}5} = 1 - 0{,}082 = 0{,}918.$$

2) Вероятность того, что время расформирования составляет от 6 мин $= 0{,}1$ ч до 24 мин $= 0{,}4$ ч, такова:

$$P(0{,}1 < T < 0{,}4) = e^{-5\cdot 0{,}1} - e^{-5\cdot 0{,}4} = e^{-0{,}5} - e^{-2} = 0{,}6065 - 0{,}1353 = 0{,}4712.$$ ▲

897. Вероятность безотказной работы элемента распределена по показательному закону $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 50 ч.

△ Используя функцию надежности $R(t)=e^{-\lambda t}$, получим $R(50)=e^{-0,02\cdot 50}=e^{-1}=0,3679$. ▲

898. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону $f(x)=2,5e^{-2,5x}$ при $x\geqslant 0$ и $f(x)=0$ при $x<0$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

899. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с функцией плотности

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 7e^{-7x} & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытаний X попадет в интервал **(0,15; 0,6)**.

900. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной по показательному закону, если функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 1-e^{-0,25x} & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

901. Время t расформирования состава через горку — случайная величина, подчиненная показательному закону. Пусть $\lambda=5$ — среднее число поездов, которые горка может расформировать за 1 ч. Определить вероятность того, что время расформирования состава составит более 0,3 ч.

902. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0,02t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что за $t=24$ ч элемент: 1) откажет; 2) не откажет.

903. Вероятность безотказной работы телевизора распределена по показательному закону $f(t)=0,002e^{-0,002t}$ $(t>0)$. Найти вероятность того, что телевизор проработает 1000 ч.

§ 11. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ФУНКЦИЯ ЛАПЛАСА

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Нетрудно видеть, что функция $f(x)$ удовлетворяет двум условиям, предъявляемым к плотности распределения: 1) $f(x)>0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

Кривая $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 45. Она симметрична относительно прямой $x=m$, максимальная ордината кривой (при $x=m$) равна $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ и ось абсцисс является асимптотой этой кривой. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=m$, то параметр m является математическим ожиданием случайной величины X. С другой стороны, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2f(x)\,dx=\sigma^2$, откуда $D(x)=\sigma^2$, т. е. σ является средним квадратичным отклонением величины X.

Введем обозначение

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

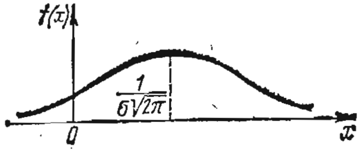

Рис. 45

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*, или *интегралом вероятностей*. Эту функцию называют также *функцией ошибок* и обозначают $\operatorname{erf} x$. Иногда используются и другие формы функции Лапласа, например, $\overline{\Phi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$ (*нормированная функция Лапласа*), которая связана с функцией ошибок $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ соотношением $\overline{\Phi}(x)=0{,}5\Phi(x/\sqrt{2})$, или $\overline{\Phi}(x\sqrt{2})=0{,}5\Phi(x)$.

Для вычисления значений функции Лапласа пользуются специальной таблицей (см. табл. III на с. 411).

Вероятность попадания в интервал $]a, b[$ случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется через значения функции Лапласа по формуле

$$P(a<X<b)=0{,}5\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

Отметим следующие свойства функции Лапласа.

1°. $\Phi(0)=0$, так как $\int_0^0 e^{-t^2}\,dt=0$;

2°. $\Phi(+\infty)=1$, поскольку $\Phi(+\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$;

3°. $\Phi(x)$ — нечетная функция.

Справедлива также формула

$$P(|X-m|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

С помощью этой формулы можно находить вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, в интервал, симметричный относительно точки m.

904. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m=40$ и дисперсией $D=200$. Вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал **(30, 80)**.

△ Здесь $a=30$, $b=80$, $m=40$, $\sigma=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$; пользуясь табл. III на с. 411, находим

$$P(30<X<80)=0{,}5\left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\right)\right]=$$
$$=0{,}5\,[\Phi(2)+\Phi(0{,}5)]=0{,}5\,[0{,}995+0{,}521]=0{,}758. \blacktriangle$$

905. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если стандартная длина равна $m=40$ см и среднее квадратичное отклонение равно $\sigma=0,4$ см, то какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8?

△ Требуется найти положительное число ε, для которого $P(|X-40|<\varepsilon)=0,8$. Так как

$$P(|X-40|<\varepsilon)=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,4\sqrt{2}}\right)=\Phi(1,77\varepsilon),$$

то задача сводится к решению неравенства $\Phi(1,77\varepsilon)>0,8$. С помощью табл. III устанавливаем, что $1,77\varepsilon>0,91$. Остается найти наименьшее значение ε, удовлетворяющее этому неравенству, откуда $\varepsilon=0,52$. ▲

906. Стрельба ведется из точки O вдоль прямой Ox. Средняя дальность полета снаряда равна m. Предполагая, что дальность полета X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma=80$ м, найти, какой процент выпускаемых снарядов даст перелет от 120 до 160 м.

907. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ. Вычислить с точностью до 0,01 вероятности попадания X в интервалы $(m, m+\sigma)$, $(m+\sigma, m+2\sigma)$, $(m+2\sigma, m+3\sigma)$.

908. Показать, что вероятность попадания в интервал (a, b) случайной величины X с математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ, подчиненной нормальному закону, не изменится, если каждое из чисел a, b, m и σ увеличить в λ раз $(\lambda>0)$.

909. Масса вагона — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением $\sigma=0,9$ т. Найти вероятность того, что очередной вагон имеет массу не более 70 т, но не менее 60 т.

910. Мастерская изготавливает стержни, длина которых l представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением, равными соответственно 25 и 0,1 см. Найти вероятность того, что отклонение длины стержня в ту или другую сторону от математического ожидания не превзойдет 0,25 см.

911. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a=65$ т и средним квадратичным отклонением $\sigma=0,9$ т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

912. Диаметр детали, изготавливаемой на станке, — случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a=25$ см и средним квадратичным отклонением $\sigma=0,4$ см. Найти вероятность того, что две взятые наудачу детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 см.

△ Вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет отклонение δ в ту или другую сторону от математического ожидания, составляет

$$P(a-\delta < X < a+\delta) = P(|X-a| < \delta) = 2\overline{\Phi}(\delta/\sigma).$$

Отсюда

$$P(|X-25| < 0,16) = 2\overline{\Phi}(0,16/0,4) = 2\overline{\Phi}(0,4) = 2\cdot 0,1554 = 0,3108.$$

Тогда для двух наудачу взятых деталей искомая вероятность есть $0,3108^2 = 0,096$. ▲

913. Пусть X — случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием $a = 1,6$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 1$. Какова вероятность того, что при четырех испытаниях эта случайная величина попадет хотя бы один раз в интервал **(1, 2)**?

△ Найдем вероятность попадания случайной величины X в интервал **(1, 2)** при одном испытании:

$$P(1 < X < 2) = \overline{\Phi}\left(\frac{2-1,6}{1}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{1-1,6}{1}\right) = \overline{\Phi}(0,4) + \overline{\Phi}(0,6) =$$
$$= 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Тогда вероятность того, что случайная величина не попадет в интервал]1, 2[при одном испытании, есть $1 - 0,3811 = 0,6189$, а при четырех испытаниях $0,6189^4 \approx 0,1467$. Значит, искомая вероятность составляет $1 - 0,1467 = 0,8533$. ▲

914. Диаметр выпускаемой детали — случайная величина, подчиненная нормальному закону с математическим ожиданием 5 см и средним квадратичным отклонением 0,9 см. Установить: 1) вероятность того, что наудачу взятая деталь имеет диаметр в пределах от 4 до 7 см; 2) вероятность того, что размер диаметра наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более чем на 2 см; 3) в каких границах следует ожидать размер диаметра детали, чтобы вероятность не выйти за эти границы была равна 0,95.

△ 1) $P(4 < d < 7) = \overline{\Phi}\left(\frac{7-5}{0,9}\right) - \overline{\Phi}\left(\frac{4-5}{0,9}\right) = \overline{\Phi}(2,22) + \overline{\Phi}(1,11) =$
$= 0,4867 + 0,3664 = 0,8531;$

2) $P(|d-5| < 2) = 2\overline{\Phi}(2/0,9) = 2\overline{\Phi}(2,22) = 2\cdot 0,4867 = 0,9734;$

3) $P(|d-5| < \delta) = 2\overline{\Phi}(\delta/0,9) = 0,95$, $\overline{\Phi}(\delta/0,9) = 0,475$. Используя таблицу значений нормированной функции Лапласа, имеем $\delta/0,9 = 1,96$, откуда $\delta = 1,76$. ▲

915. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием 2,2 и средним квадратичным отклонением 0,5. Какова вероятность того, что при первом испытании случайная величина окажется на отрезке [3, 4], а при втором испытании — на отрезке [1, 2]?

916. Случайная величина X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a = 10$. Каково должно быть среднее квадратичное отклонение σ этой случайной величины, чтобы с вероятностью 0,8 отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не превышало 0,2?

§ 12. МОМЕНТЫ, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Начальным моментом s-го порядка дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

называется сумма ряда

$$\alpha_s = x_1^s p_1 + x_2^s p_2 + \ldots + x_n^s p_n + \ldots .$$

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ начальным моментом s-го порядка называется интеграл

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\, dx.$$

Нетрудно видеть, что начальный момент первого порядка случайной величины X равен математическому ожиданию этой случайной величины: $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом s-го порядка дискретной случайной величины X называется сумма ряда

$$\mu_s = (x_1 - m_x)^s p_1 + (x_2 - m_x)^s p_2 + \ldots + (x_n - m_x)^s p^n + \ldots,$$

где m_x — математическое ожидание случайной величины X.

Для непрерывной случайной величины центральным моментом s-го порядка называется интеграл

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)\, dx.$$

Для любой случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю, т. е. $\mu_1 = 0$.

Центральный момент второго порядка любой случайной величины равен дисперсии случайной величины, т. е. $\mu_2 = D(X)$.

Центральные и начальные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков связаны соотношениями:

$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$
$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$
$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка равны нулю, т. е. $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$.

Отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратичного отклонения называется *асимметрией*:

$$S_k = \mu_3/\sigma_x^3.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то для кривой распределения (гистограммы) $S_k = 0$.

На рис. 46 и 47 изображены гистограммы для $S_k > 0$ и $S_k < 0$.

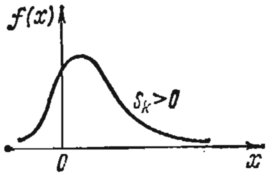

Рис. 46

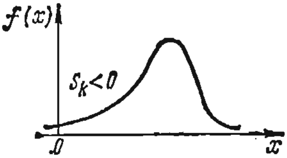

Рис. 47

Эксцессом случайной величины X называется величина E_x, определяемая равенством

$$E_x = \mu_4/\sigma_x^4 - 3.$$

Для нормального закона распределения $E_x = 0$.

Кривые, более островершинные по сравнению с нормальной (так называемой *кривой Гаусса*), обладают положительным эксцессом; для кривых, более плосковершинных, $E_x < 0$ (рис. 48).

917. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков этой случайной величины, а также определить асимметрию и эксцесс.

△ Начальный момент первого порядка

$$\alpha_1 = 1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,1 = 4,6.$$

Начальный момент первого порядка является математическим ожиданием, поэтому $M(X) = 4,6$.

Найдем начальный момент второго порядка:

$$\alpha_2 = 1 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,4 + 25 \cdot 0,2 + 49 \cdot 0,2 + 81 \cdot 0,1 = 26,6.$$

Начальный момент третьего порядка

$$\alpha_3 = 1 \cdot 0,1 + 27 \cdot 0,4 + 125 \cdot 0,2 + 343 \cdot 0,2 + 729 \cdot 0,1 = 177,4.$$

Начальный момент четвертого порядка

$$\alpha_4 = 1 \cdot 0,1 + 81 \cdot 0,4 + 625 \cdot 0,2 + 2401 \cdot 0,2 + 6561 \cdot 0,1 = 1293,8.$$

Найдем теперь центральные моменты. Как известно, $\mu_1 = 0$. Центральный момент второго порядка найдем по формуле

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 26,6 - 4,6^2 = 26,6 - 21,16 = 5,44.$$

Этот центральный момент является дисперсией случайной величины, т. е. $D(X)=5{,}44$.

Отсюда легко определить среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{5{,}44}=2{,}33.$$

Центральный момент третьего порядка определится по формуле

$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=177{,}4-3\cdot 4{,}6\cdot 26{,}6+2\cdot 4{,}6^3=$$
$$=177{,}4-367{,}08+194{,}672=4{,}992.$$

Теперь нетрудно определить асимметрию:

$$S_k=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}=\frac{4{,}992}{5{,}44\cdot 2{,}33}=\frac{4{,}992}{12{,}675}=0{,}394.$$

Для центрального момента четвертого порядка воспользуемся формулой

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4=1293{,}8-4\cdot 4{,}6\cdot 177{,}4+6\cdot 4{,}6^2\cdot 26{,}6-3\cdot 4{,}6^4=$$
$$=1293{,}8-3264{,}16+33{,}77{,}136-1343{,}227=64{,}55.$$

Теперь можно найти эксцесс:

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\frac{64{,}54}{5{,}44^2}-3=\frac{64{,}55}{29{,}59}-3=2{,}18-3=-0{,}82. \blacktriangle$$

918. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ ax^2 & \text{при } 0\leqslant x<1, \\ a(2-x)^2 & \text{при } 1\leqslant x<2, \\ 0 & \text{при } x\geqslant 2, \end{cases}$$

(рис. 49). При каком значении a функция $f(x)$ является плотностью распределения случайной величины X? Определить началь-

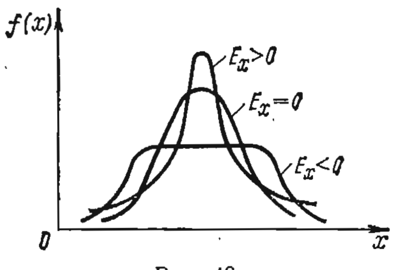

Рис. 48

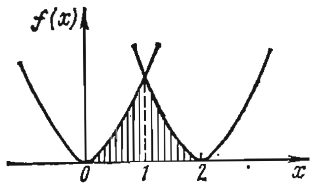

Рис. 49

ные и центральные моменты первых четырех порядков, асимметрию и эксцесс.

△ Для нахождения a имеем уравнение

$$a\int_0^1 x^2\,dx+a\int_1^2 (2-x)^2\,dx=1,$$

откуда

$$a\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1-a\cdot\frac{(2-x)^3}{3}\bigg|_1^2=1;\quad \frac{a}{3}+\frac{a}{3}=1,\ \text{т. е. } a=\frac{3}{2}.$$

Находим начальные моменты:

$$\alpha_1=\frac{3}{2}\int_0^1 x^3\,dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x(2-x)^2\,dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(6-\frac{28}{3}+\frac{15}{4}\right)=1;$$

$$\alpha_2=\frac{3}{2}\int_0^1 x^4\,dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^2(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{3}{10}+14-\frac{45}{2}+\frac{93}{10}=1,1;$$

$$\alpha_3=\frac{3}{2}\int_0^1 x^5\,dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^3(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{12}+\frac{3}{2}\left[x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right]_1^2=\frac{1}{4}+\frac{45}{2}-\frac{186}{5}+\frac{63}{4}=1,3;$$

$$\alpha_4=\frac{3}{2}\int_0^1 x^6\,dx+\frac{3}{2}\int_1^2 x^4(2-x)^2\,dx=$$

$$=\frac{3}{14}+\frac{3}{2}\left[\frac{4x^5}{5}-\frac{2x^6}{3}+\frac{x^7}{7}\right]_1^2=\frac{3}{14}+\frac{186}{5}-63+\frac{381}{14}=1\frac{22}{35}.$$

Находим центральные моменты:

$$\mu_1=0;$$
$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2=1,1-1=0,1;$$
$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=1,3-3\cdot 1,1+2=0$$

(действительно, кривая имеет вертикальную ось симметрии);

$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4=1\frac{22}{35}-4\cdot 1,3+6\cdot 1,1-3=\frac{1}{35}.$$

Отсюда получаем:
$D(X)=\mu_2=0,1$ (дисперсия);
$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,1}=0,316$ (среднее квадратичное отклонение).
Находим асимметрию: $S_k=\mu_3/\sigma_x^3=0$.

Находим эксцесс: $E_x=\dfrac{\mu_4}{\sigma_x^4}-3=\dfrac{1/35}{0,01}-3=-\dfrac{1}{7}$. ▲

919. Дан ряд распределения случайной величины:

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков этой случайной величины, а также определить асимметрию и эксцесс.

920. Плотность распределения случайной величины X задана следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ x & \text{при } 0\leqslant x<1, \\ 2-x & \text{при } 1\leqslant x<2, \\ 0 & \text{при } x\geqslant 2. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков, асимметрию и эксцесс.

921. Случайная величина X подчинена закону с плотностью распределения $f(x)=\lambda e^{-|x|}$. Определить значение λ и эксцесс случайной величины X.

§ 13. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

1. Теорема Чебышева. Говорят, что случайная величина X_n *сходится по вероятности к* a, если при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$P(|X_n-a|<\varepsilon)>1-\delta,$$

где ε — произвольное малое положительное число, а значение δ зависит от выбора ε и n. В терминах данного определения теорему Чебышева можно сформулировать следующим образом: *при достаточно большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию*, т. е.

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n-M(X)\right|<\varepsilon\right)>1-\delta.$$

В этом неравенстве можно принять $0<\delta<\dfrac{D(X)}{n\varepsilon^2}$, где $D(X)$ — дисперсия случайной величины X.

Теорема Чебышева является одним из законов больших чисел, которые лежат в основе многих практических применений теории вероятностей.

2. Теорема Бернулли. Другим и притом простейшим (и ранее всех установленным) законом больших чисел является теорема Я. Бернулли.

Теорема Бернулли устанавливает, что *при неограниченном увеличении числа испытаний частота случайного события сходится по вероятности к вероятности события*, т. е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\delta \tag{1}$$

$\left(\text{причем можно принять, что } 0<\delta<\dfrac{pq}{n\varepsilon^2}\right)$, если вероятность события от испытания к испытанию не изменяется и равна p $(q=1-p)$.

922. Монету подбрасывают 1000 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты появления «герба» от вероятности его появления меньше чем на 0,1.

△ Здесь $n=1000$, $p=q=1/2$, $\varepsilon=0{,}1$. Используя неравенство (1), получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right|<0{,}1\right)>1-\frac{(1/2)\cdot(1/2)}{1000\cdot 0{,}01}=\frac{39}{40}.$$

Неравенство $\left|\frac{m}{1000}-\frac{1}{2}\right| < 0{,}1$ равносильно двойному неравенству $400 < m < 600$; поэтому можно сказать, что вероятность числа попаданий «герба» в интервал $]400,\ 600[$ больше 39/40. ▲

923. В урне 1000 белых и 2000 черных шаров. Вынули (с возвращением) 300 шаров. Оценить снизу вероятность того, что число m извлеченных при этом белых шаров удовлетворяет двойному неравенству $80 < m < 120$.

△ Данное двойное неравенство можно переписать в виде

$$-20 < m - 100 < 20, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{15} < \frac{m}{300} - \frac{1}{3} < \frac{1}{15}.$$

Итак, требуется оценить вероятность неравенства $\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}$; следовательно, $\varepsilon = 1/15$ и

$$P\left(\left|\frac{m}{300}-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{15}\right) > 1 - \frac{(1/3)\cdot(2/3)}{300\cdot 1/225} = \frac{5}{6}. \ ▲$$

924. Пусть в результате 100 независимых опытов найдены значения случайной величины X: $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Пусть математическое ожидание $M(X) = 10$ и дисперсия $D(X) = 1$. Оценить снизу вероятность того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины $\left(\sum_{i=0}^{100} x_i\right)\Big/100$ и математическим ожиданием будет меньше 1/2.

△ Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\Big/ n - M(X)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}.$$

Полагая $n = 100$, $M(X) = 10$, $D(X) = 1$, $\varepsilon = 1/2$, получаем

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 10\right| < \frac{1}{2}\right) > 1 - \frac{1}{100\cdot(1/4)} = \frac{24}{25}.$$

Таким образом, искомая вероятность больше 0,96. ▲

925. В каждой из двух урн имеется по 10 шаров с номерами от 1 до 10. Испытание заключается в вынимании (с последующим возвращением) из каждой урны по шару. Случайная величина X — сумма номеров шаров, вынутых из двух урн. Произведено 100 испытаний. Оценить снизу вероятность попадания суммы $\sum_{i=1}^{100} x_i$ в интервал **(800, 1400)**.

△ Найдем закон распределения случайной величины X. Эта случайная величина (сумма номеров извлеченных из двух урн шаров) может принимать значения $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $\ldots$; $x_{19} = 20$.

Найдем вероятность того, что X примет значение $x_k = k+1$. Если $k \leqslant 10$, то сумма номеров вынутых шаров может быть равна $k+1$ в следующих k равновозможных случаях:

на первом шаре стоит номер 1, на втором — номер k;
» » » » » 2, » » — » $k-1$
. . . .
» » » » » k, » « — » 1.

Так как вероятность каждой из этих комбинаций равна $(1/10)\cdot(1/10) = 1/100$, то вероятность p_k получить на двух шарах сумму номеров, равную $k+1$ (если $k \leqslant 10$), составляет $k/100$. Итак, $p_k = k/100$ (если $k \leqslant 10$).

Если $k > 10$, то сумма номеров вынутых шаров может быть равна $k+1$ в следующих равновозможных случаях (число которых равно $20-k$):
на первом шаре стоит номер $k-9$, на втором — номер 10,
» » » » » $k-8$, » » — » 9,
. . . .
» » » » » 10, » » — » $k-9$.

Так как вероятность каждой из этих комбинаций по-прежнему равна 1/100, то при $k > 10$ имеем $p_k = (20-k)/100$.

Для определения $M(X)$ и $D(X)$ составим таблицу:

k	x_k	p_k	$p_k x_k$	$x_k - M(X)$	$[x_k - M(X)]^2$	$p_k[x_k - M(X)]^2$
1	2	0,01	0,02	—9	81	0,81
2	3	0,02	0,03	—8	64	1,28
3	4	0,03	0,12	—7	49	1,47
4	5	0,04	0,20	—6	36	1,44
5	6	0,05	0,30	—5	25	1,25
6	7	0,06	0,42	—4	16	0,96
7	8	0,07	0,56	—3	9	0,63
8	9	0,08	0,72	—2	4	0,32
9	10	0,09	0,90	—1	1	0,09
10	11	0,10	1,10	0	0	0
11	12	0,09	1,08	1	1	0,09
12	13	0,08	1,04	2	4	0,32
13	14	0,07	0,98	3	9	0,63
14	15	0,06	0,90	4	16	0,96
15	16	0,05	0,80	5	25	1,25
16	17	0,04	0,68	6	36	1,44
17	18	0,03	0,54	7	49	1,47
18	19	0,02	0,38	8	64	1,28
19	20	0,01	0,20	9	81	0,81
$\sum$		1,00	11,00	—	—	16,50

Значит, $M(X) = \sum_{k=1}^{19} p_k x_k = 11$, $D(X) = 16{,}5$. Очевидно, что

$$\left(800 < \sum_{i=1}^{100} x_i < 1400\right) \Leftrightarrow \left(-300 < \sum_{i=1}^{100} x_i - 1100 < 300\right) \Leftrightarrow$$
$$-3 < \left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 11 < 3 \Leftrightarrow \left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 11\right| < 3.$$

Таким образом, $\varepsilon = 3$. Следовательно,

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)\Big/ 100 - 11\right| < 3\right) \geqslant 1 - \frac{16{,}5}{900} \approx 0{,}982. \ \blacktriangle$$

926. Шестигранную кость подбрасывают 10 000 раз. Оценить вероятность отклонения частоты появления шести очков от вероятности появления того же числа очков меньше чем на 0,01.

927. В урне 100 белых и 100 черных шаров. Вынули с возвращением 50 шаров. Оценить снизу вероятность того, что количество белых шаров из числа вынутых удовлетворяет двойному неравенству $15 < m < 35$.

928. В результате 200 независимых опытов найдены значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_{200}$, причем $M(X) = D(X) = 2$. Оценить снизу вероятность того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим значений случайной величины $\left(\sum_{i=1}^{200} x_i\right)/200$ и математическим ожиданием меньше 1/5.

§ 14. ТЕОРЕМА МУАВРА — ЛАПЛАСА

Если производится n испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, то частота m/n появлений события является случайной величиной, распределенной по биномиальному закону, математическое ожидание и дисперсия которой равны соответственно p и $\sqrt{pq/n}$. Случайная величина $\tau_n = \frac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}}$, математическое ожидание которой равно нулю, а дисперсия — единице, носит название *нормированной* частоты случайного события (ее распределение — также биномиальное).

Теорема Муавра — Лапласа устанавливает, что *при неограниченном возрастании числа n испытаний биномиальный закон распределения нормированной частоты в пределе превращается в нормальный с тем же математическим ожиданием (равным* 0) *и дисперсией (равной* 1). В силу этого при больших значениях n для вероятностей неравенств, которым должна удовлетворять частота (или число наступлений) случайного события, можно использовать приближенную оценку с помощью интеграла вероятностей (функции Лапласа), а именно, справедливы следующие приближенные формулы:

$$P\left\{a < \frac{m/n - p}{\sqrt{pq/n}} < b\right\} = P\left\{a < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \approx \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right\}.$$

929. Какова вероятность, что при n испытаниях событие A появится от α до β раз? Вероятность появления события A равна p.

△ Очевидно, что

$$\left(a < \frac{x - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \Leftrightarrow \left(np + a\sqrt{npq} < x < np + b\sqrt{npq}\right).$$

Полагаем $np + a\sqrt{npq} = \alpha$, $np + b\sqrt{npq} = \beta$. Отсюда $a = (\alpha - pn)/\sqrt{npq}$, $b = (\beta - np)/\sqrt{npq}$. Применив теорему Муавра — Лапласа, получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{2npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{2npq}}\right)\right]. \blacktriangle$$

930. Вероятность события A при каждом испытании равна 0,7. Сколько раз достаточно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что частота появления события A будет отклоняться от вероятности не больше чем на 0,05?

△ Из условия следует, что $\left|\frac{X}{n}-0,7\right|<0,05$. Отсюда $0,65n<X<0.75n$. В формуле, полученной при решении задачи 929, положим $\alpha=0,65n$, $\beta=0,75n$. Тогда

$$P(0,65n<X<0,75n)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{0,75n-0,7n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)-\right.$$
$$\left.-\Phi\left(\frac{0,65n-0,7n}{\sqrt{2n\,(1/2)\cdot(1/2)}}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{2n}}{20}\right).$$

Из уравнения $\Phi(\sqrt{2n}/20)=0,9$, используя табл. III на с. 411, находим $\sqrt{2n}/20=1,17$, т. е. $n=273$. ▲

931. Какова вероятность, что при 100 бросаниях монеты «герб» появится от 40 до 60 раз?

● Воспользоваться результатом решения задачи 929 при $\alpha=40$, $\beta=60$, $n=100$, $p=q=1/2$.

932. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Сколько шаров (с возвращением) нужно вынуть из урны, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота появления белого шара будет отклоняться от вероятности меньше чем на 0,1?

§ 15. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В этом случае принято говорить, что указанные случайные величины образуют систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки $(X; Y)$ в область D, принято обозначать в виде $(X; Y)\subset D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин может быть задан с помощью таблицы

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

где $x_1<x_2<\ldots<x_m$, $y_1<y_2<\ldots<y_n$, p_{ij} — вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X=x_i$, $Y=y_j$. При этом

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) будем задавать с помощью функции плотности вероятности $f(x, y)$.

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D определяется равенством

$$P[(X;\ Y)\subset D]=\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1°. $f(x,\ y)\geqslant 0$.

2°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-8}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy=1.$

Если все случайные точки $(X;\ Y)$ принадлежат конечной области D, то последнее условие принимает вид $\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy=1$.

Математические ожидания дискретных случайных величин X и Y, входящих в систему, определяются по формулам

$$m_x=M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij},\ m_y=M(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij},$$

а математические ожидания непрерывных случайных величин — по формулам

$$m_x=M(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\ y)\,dx\,dy,\quad m_y=M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{+\infty} yf(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Точка $(m_x;\ m_y)$ называется *центром рассеивания* системы случайных величин $(X,\ Y)$.

Математические ожидания m_x и m_y можно найти и проще, если случайные величины X и Y независимы. В этом случае из законов распределения этих случайных величин можно определить математические ожидания m_x и m_y по формуле, приведенной в § 6 этой главы.

Дисперсии дискретных случайных величин X и Y определяются по формулам

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i-m_x)^2,\quad D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j-m_y)^2.$$

Дисперсии же непрерывных случайных величин X и Y, входящих в систему, находятся по формулам

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x,\ y)\,dx\,dy,\quad D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-m_y)^2 f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)},\quad \sigma_y=\sqrt{D(Y)}.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,\ D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2.$$

Важную роль в теории систем случайных величин играет так называемый *корреляционный момент* (*ковариация*)

$$C_{xy}=M\,[(X-m_x)(Y-m_y)].$$

Для дискретных случайных величин корреляционный момент находится по формуле

$$C_{xy}=\sum_m\sum_n (x_n-m_x)(y_m-m_y)\,p_{nm},$$

а для непрерывных — по формуле

$$C_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

Корреляционный момент можно также найти по формуле

$$C_{xy}=M(XY)-M(X)\,M(Y).$$

Здесь

$$M(XY)=\sum_m\sum_n x_n y_m p_{mn}$$

для дискретных случайных величин X и Y и

$$M(XY)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xyf(xy)\,dx\,dy$$

для непрерывных величин.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если вероятность одной из них принять значение, лежащее в любом промежутке области ее значений, не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В этом случае

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y);\ C_{xy}=0.$$

Для характеристики связи между величинами X и Y рассматривается так называемый *коэффициент корреляции*

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},$$

являющийся безразмерной величиной.

Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{xy}=0$. Если же случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью $Y=aX+b$, то $r_{xy}=\operatorname{sgn} a$, т. е. $r_{xy}=1$ при $a>0$ и $r_{xy}=-1$ при $a<0$.

Вообще же коэффициент корреляции удовлетворяет условию $-1\leqslant r_{xy}\leqslant 1$.

933. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в 1-м ящике: 1 шар — с № 1, 2 шара — с № 2, 3 шара — с № 3; во 2-м ящике: 2 шара — с № 1, 3 шара — с № 2, 1 шар — с № 3. Пусть X — номер шара, вынутого из первого ящика, Y — номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X, Y).

△ Случайная точка (1; 1) имеет кратность $1\times 2=2$;

»	»	(1; 2)	»	»	$1\times 3=3$;
»	»	(1; 3)	»	»	$1\times 1=1$;
»	»	(2; 1)	»	«	$2\times 2=4$;
»	»	(2; 2)	»	»	$2\times 3=6$;

»	»	(2; 3)	»	»	$2\times 1=2;$
»	»	(3; 1)	»	»	$3\times 2=6;$
»	»	(3; 2)	»	»	$3\times 3=9;$
»	»	(3; 3)	»	»	$3\times 1=3.$

Всего случайных точек $6\times 6=36$ (n-кратную точку принимаем за n точек).

Так как отношение кратности точки ко всему количеству точек равно вероятности появления этой точки, то таблица закона распределения системы случайных величин имеет вид

X \ Y	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Сумма всех вероятностей, указанных в таблице, равна единице. ▲

934. Найти математические ожидания случайных величин X и Y по условию предыдущей задачи.

△ Имеем

$$m_x=1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{3};$$

$$m_y=1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{11}{6}.$$

Точка (7/3; 11/6) является центром рассеивания для заданной системы (X, Y).

Так как случайные величины X и Y независимы (см. задачу 933), то математические ожидания m_x и m_y можно подсчитать проще, используя ряды распределения:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

y_j	1	2	3
p_j	1/3	1/2	1/6

Отсюда находим

$$m_x=\sum p_ix_i=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{7}{3},\qquad m_y=\sum p_jy_j=\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}.\ ▲$$

935. Найти дисперсии случайных величин X и Y по условию задачи 933.

△ От системы величин (X, Y) перейдем к системе центрированных величин $(\mathring{X}, \mathring{Y})$, где $\mathring{X}=X-m_x=X-7/3$, $\mathring{Y}=Y-m_y=Y-11/6$. Составим таблицу

$\overset{\circ}{X}$ \ $\overset{\circ}{Y}$	$-5/6$	$1/6$	$7/6$
$-4/3$	$1/18$	$1/12$	$1/36$
$-1/3$	$1/9$	$1/6$	$1/18$
$2/3$	$1/6$	$1/4$	$1/12$

Имеем

$$D(X)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{9};$$
$$D(Y)=\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+$$
$$+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{17}{36}.$$

Отсюда $\sigma_x=\sqrt{5}/3$, $\sigma_y=\sqrt{17}/6$.

Заметим, что $D(X)$ и $D(Y)$ можно найти по формулам $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$, $D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2$. ▲

936. Найти коэффициент корреляции по условию задачи 933.

△ Воспользуемся таблицей распределения системы $(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y})$ центрированных случайных величин.

Определим ковариацию:

$$C_{xy}=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36}+$$
$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{18}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=$$
$$=-\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108}+\frac{1}{72}+\frac{7}{216}\right)-\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{54}+\frac{1}{36}+\frac{7}{108}\right)+$$
$$+\frac{2}{3}\left(-\frac{5}{36}+\frac{1}{24}+\frac{7}{72}\right)=-\frac{4}{3}\cdot 0-\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 0=0.$$

Так как $C_{xy}=0$, то и коэффициент корреляции $r_{xy}=0$.

Этот же результат мы могли бы получить и не определяя ковариации C_{xy}. Действительно, полагая $Y=1$, получаем, что значение $X=1$ повторяется 2 раза, значение $X=2$ — 4 раза, а значение $X=3$ — 6 раз. Значит, при $Y=1$ получаем ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Если $Y=2$, то значение $X=1$ повторяется 3 раза, значение $X=2$—6 раз, а значение $X=3$ —9 раз. Следовательно, при $Y=2$ получается ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Наконец, если $Y=3$, то значение $X=1$ повторяется 1 раз, значение $X=2$ — 2 раза, а значение $X=3$ — 3 раза. Ряд распределения случайной величины X при $Y=3$ имеет вид

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

Итак, при различных значениях Y получаем один и тот же ряд распределения случайной величины X. Так как ряд распределения случайной величины X не зависит от значений случайной величины Y, то случайные величины X и Y независимы. Отсюда следует, что коэффициент корреляции равен нулю. ▲

937. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2\leqslant r^2, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2>r. \end{cases}$$

Найти коэффициент a.

△ Коэффициент a определяем из уравнения

$$a\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=1,$$

где D—круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=r^2$. Перейдя к полярным координатам, получаем

$$a\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r \rho^3\,d\rho\,d\theta=1,\quad \frac{r^4}{4}\cdot 2\pi a=1,\quad \text{т. е.}\quad a=\frac{2}{\pi r^4}.\ ▲$$

938. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y)=\begin{cases} a(x+y) & \text{в области } D; \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases}$$

Область D—квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$. Требуется: 1) определить коэффициент a; 2) вычислить вероятность попадания случайной точки $(X;\ Y)$ в квадрат Q, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$; 3) найти математические ожидания m_x и m_y; 4) найти средние квадратичные отклонения σ_x и σ_y.

$\triangle$ 1) Коэффициент a находим из уравнения $a\int\limits_0^3\int\limits_0^3 (x+y)\,dx\,dy=1$, откуда

$$a\int\limits_0^3\int\limits_0^3 (x+y)\,dx\,dy=a\int\limits_0^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^3 dx=a\int\limits_0^3\left(3x+\frac{9}{2}\right)dx=$$

$$=a\left[\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_0^3=a\left(\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\right)=27a,\quad 27a=1,\ \text{т. е. } a=\frac{1}{27}.$$

2) $P[(X;\,Y)\subset Q]=\frac{1}{27}\int\limits_0^2\int\limits_0^2 (x+y)\,dx\,dy=$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^2\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^2 dx=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\left(2x+2-x-\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_1^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{1}{27}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}\right]_1^2=\frac{1}{27}\left(2+3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{9}.$$

3) Находим математические ожидания m_x и m_y; имеем

$$m_x=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3 x(x+y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\left[x^2y+\frac{xy^2}{2}\right]_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\left(3x^2+\frac{9}{2}x\right)dx=\frac{1}{27}\left[x^3+\frac{9}{4}x^2\right]_0^3=\frac{1}{27}\left(27+\frac{81}{4}\right)=7/4.$$

Следовательно, и $m_y=7/4$.

4) Находим средние квадратичные отклонения σ_x и σ_y:

$$\sigma_x^2=\iint\limits_D (x-m_x)^2\cdot f(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot(x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(x-\frac{7}{4}+y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3 dy\,dx+\frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)dy\,dx=$$

$$=\frac{1}{27}\cdot\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot y\Big|_0^3 dx+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\int\limits_0^3\left(x-\frac{7}{4}\right)^2\cdot\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\Big|_0^3 dx=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(x-\frac{7}{4}\right)^4}{4}\Bigg|_0^3+\frac{1}{27\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{361}{16}-\frac{49}{16}\right)\Bigg|_0^3=\frac{11}{16}.$$

Итак, $\sigma_x=\sigma_y=\sqrt{11}/4$. ▲

939. Система случайных величин $(X,\ Y)$ подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,\ y)=\begin{cases} a\sin(x+y) & \text{в области } D;\\ 0 & \text{вне этой области.}\end{cases}$$

Область D определяется неравенствами $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Найти: 1) коэффициент a; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) средние квадратичные отклонения σ_x и σ_y; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

△ 1) Коэффициент a находим из уравнения $a \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\,dx = 1$. Отсюда

$$a \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy\,dx = -a \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} dx =$$

$$= a \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,dx = a(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = 2a.$$

Итак, $a = 1/2$, т. е. $f(x, y) = (1/2)\sin(x+y)$ в области D.

$$2)\ m_x = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x \sin(x+y)\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} x\,dx \int\limits_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x\right] x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x)\,dx = \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Точно так же и $m_y = \pi/4$.

$$3)\ \sigma_x^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y)\,dy\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 (\sin x + \cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} x(\sin x - \cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2.$$

Следовательно, $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_x \sigma_y = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$.

4). Определим ковариацию:

$$C_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x+y)\,dy\,dx-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\,dx\int_0^{\pi/2} y\sin(x+y)\,dy-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\,y\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)\,dy\right]x\,dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cdot\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x\right]dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2} x\left(-\frac{\pi}{2}\sin x-\cos x+\sin x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}\sin x+\cos x-\sin x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{1}{2}\,x\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\cos x+\cos x\right)dx-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\sin x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\pi^2}{16}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{16}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}.$$

Отсюда

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-\frac{0{,}73688}{3{,}00232}\approx-0{,}2454.\ \blacktriangle$$

940. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X, Y):

X \ Y	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найти: 1) коэффициент λ; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

941. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y)=\begin{cases} axy & \text{в области } D, \\ 0 & \text{вне этой области.}\end{cases}$$

Область D—треугольник, ограниченный прямыми $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Найти: 1) коэффициент a; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

942. Система случайных величин подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x, y)=\begin{cases} a^2-x^2-y^2 & \text{при} \quad x^2+y^2\leqslant a^2 \ (a>0), \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2>a^2.\end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент a; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

§ 16. ЛИНИИ РЕГРЕССИИ. КОРРЕЛЯЦИЯ

Дана система случайных величин (X, Y). Пусть в результате n испытаний получено n точек $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., (x_n, y_n) (среди этих точек могут быть и совпавшие). Требуется вычислить коэффициент корреляции этой системы случайных величин.

Приняв во внимание закон больших чисел, при достаточно большом a в формулах для определения σ_x^2, σ_y^2 и C_{xy} можно заменить математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$ средними арифметическими значений соответствующих случайных величин. При этом имеют место следующие приближенные равенства:

$$M(X)\approx\overline{x}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Big/n;\quad M(Y)\approx\overline{y}=\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\Big/n,$$

$$\sigma_x^2\approx\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\Big/n-\overline{x}^2;\quad \sigma_y^2\approx\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)\Big/n-\overline{y}^2,\quad C_{xy}\approx\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\Big/n-xy.$$

Отсюда можно найти коэффициент корреляции по формуле

$$r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Если $|r_{xy}|\sqrt{n-1}\geqslant 3$, то связь между случайными величинами X и Y достаточно вероятна. Если связь между X и Y установлена, то линейное приближение $\overline{y}_x$ от x дается формулой *линейной регрессии*

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x}),\quad\text{или}\quad \overline{y}_x=ax+b.$$

Линейное же приближение $\overline{x}_y$ от y дается формулой линейной регрессии

$$\overline{x}_y-\overline{x}=r_{xy}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y}), \quad \text{или} \quad \overline{x}_y=cy+d.$$

Следует иметь в виду, что $\overline{y}_x=ax+b$ и $\overline{x}_y=cy+d$ — различные прямые (рис. 50). Первая прямая получается в результате решения задачи о минимизации суммы квадратов отклонений по вертикали, а вторая — при решении задачи о минимизации суммы квадратов отклонений по горизонтали.

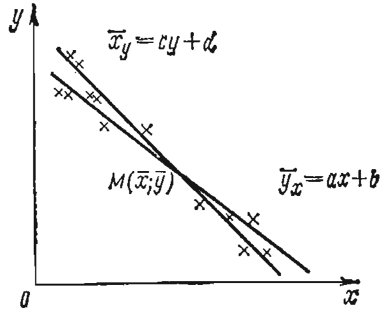

Рис. 50

Для построения уравнений линейной регрессии нужно:

1) по исходной таблице значений (X, Y) вычислить $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y, C_{xy}, r_{xy};

2) проверить гипотезу о существовании связи между X и Y;

3) составить уравнения обеих линий регрессии и изобразить графики этих уравнений.

943. Дана таблица

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	0,25	0,37	0,44	0,55	0,60	0,62	0,68	0,70	0,73
Y	2,57	2,31	2,12	1,92	1,75	1,71	1,60	1,51	1,50

i	10	11	12	13	14	15	16	17
X	0,75	0,82	0,84	0,87	0,88	0,90	0,95	1,00
Y	1,41	1,33	1,31	1,25	1,20	1,19	1,15	1,00

Определить коэффициент корреляции r_{xy} и уравнения линий регрессии.

△ Составим расчетную таблицу:

i	X	Y	X^2	Y^2	XY
1	0,25	2,57	0,0625	6,6049	0,6425
2	0,37	2,31	0,1369	5,3361	0,8547
3	0,44	2,12	0,1936	4,4944	0,9328
4	0,55	1,92	0,3025	3,6864	1,0560
5	0,60	1,75	0,3600	3,0625	1,0500
6	0,62	1,71	0,3844	2,9241	1,0602
7	0,68	1,60	0,4624	2,5600	1,0880
8	0,70	1,51	0,4900	2,2801	1,0570
9	0,73	1,50	0,5329	2,2500	1,0950
10	0,75	1,41	0,5625	1,9881	1,0575
11	0,82	1,33	0,6724	1,7689	1,0906
12	0,84	1,31	0,7056	1,7161	1,1004
13	0,87	1,25	0,7569	1,5625	1,0875
14	0,88	1,20	0,7744	1,4400	1,0560
15	0,90	1,19	0,8100	1,4161	1,0710
16	0,95	1,15	0,9025	1,3225	1,0925
17	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,0000
Σ	11,95	26,83	9,1095	45,4127	17,3917

Из таблицы получаем: $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i = 11{,}95$, $\sum\limits_{i=1}^{17} y_i = 26{,}83$, $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i^2 = \sum 9{,}1095$, $\sum\limits_{i=1}^{17} y_i^2 = 45{,}4127$, $\sum\limits_{i=1}^{17} x_i y_i = 17{,}3917$. Теперь находим

$$\bar{x} = 11{,}95/17 = 0{,}7029, \quad \bar{y} = 26{,}83/17 = 1{,}5782;$$
$$\sigma_x^2 = 9{,}1095/17 - (0{,}7029)^2 = 0{,}0418, \quad \sigma_x = 0{,}2042,$$
$$\sigma_y^2 = 45{,}4127/17 - (1{,}5782)^2 = 0{,}1806, \quad \sigma_y = 0{,}4250;$$
$$C_{xy} = 17{,}3917/17 - 0{,}7029 \cdot 1{,}5782 = -0{,}0863;$$
$$r_{xy} = (-0{,}0863)/(0{,}2042 \cdot 0{,}4250) = -0{,}9943.$$

Вычисляем значение произведения $|r_{xy}|\sqrt{n-1}$; так как $|r_{xy}|\sqrt{n-1} = 0{,}9943 \cdot 4 = 3{,}9772 > 3$, то связь достаточно обоснована.

Уравнения линий регрессии:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}),$$

т. е.

$$\bar{y}_x - 1{,}5782 = -\frac{0{,}9943 \cdot 0{,}4250}{0{,}2042}(x - 0{,}7029); \quad \bar{y}_x = -2{,}0695x + 3{,}0329;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}),$$

т. е.

$$\bar{x}_y - 0{,}7029 = -\frac{0{,}9943 \cdot 0{,}2042}{0{,}4250} \cdot (y - 1{,}5782); \quad \bar{x}_y = 0{,}4776\,y + 1{,}4566.$$

Построив точки, определяемые таблицей, и линии регрессии, видим, что обе линии регрессии проходят через точку $M\,(0{,}7029;\ 1{,}5782)$. Первая линия отсекает на оси ординат отрезок 3,0329, а вторая — на оси абсцисс отрезок 1,4566. Точки $(x_i; y_i)$ расположены близко к линиям регрессии.

944. В результате 79 опытов получена коорреляционная таблица величин $X = \sigma_S/\sigma_B$ и Y:

X \ Y	0,5	0,6	0,7	0,8
0,5	0	2	0	8
0,6	0	4	2	9
0,7	2	12	3	1
0,8	21	14	0	0
0,9	1	0	0	0

Через σ_S обозначен предел текучести стали, а через σ_B — предел прочности стали; Y — процентное содержание углерода в стали. Целые числа, приведенные в таблице, являются кратностями значений соответствующих случайных точек. Так, например, точка, для которой $x = 0,8$, $y = 0,6$, имеет кратность 14, т. е. в результате 14 опытов значению $x = 0,8$ соответствовало значение $y = 0,6$.

Требуется определить коэффициент корреляции и уравнения линий регрессии.

△ Используя табличные данные, находим

$$\bar{x} = 0,703; \quad \bar{y} = 0,622; \quad \frac{\sum x^2}{79} = 0,505; \quad \frac{\sum y^2}{79} = 0,398; \quad \frac{\sum xy}{79} = 0,427.$$

Определим дисперсии и ковариацию:

$$\sigma_x^2 = 0,505 - (0,703)^2 = 0,505 - 0,493 = 0,012; \quad \sigma_x = 0,11;$$
$$\sigma_y^2 = 0,398 - (0,622)^2 = 0,398 - 0,387 = 0,011; \quad \sigma_y = 0,105;$$
$$C_{xy} = 0,427 - 0,703 \cdot 0,622 = 0,427 - 0,437 = -0,01.$$

Определим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = -\frac{0,01}{0,11 \cdot 0,105} = -0,867.$$

Вычисляем значение произведения $|r_{xy}|\sqrt{n-1}$; имеем

$$|r_{xy}|\sqrt{n-1} = 0,867\sqrt{78} = 0,867 \cdot 8,84 = 7,66.$$

Так как $|r_{xy}|\sqrt{n-1} > 3$, то связь достаточно вероятна.

Уравнения линий регрессии:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}),$$

т. е.

$$\bar{y}_x - 0{,}622 = -0{,}867 \cdot \frac{0{,}105}{0{,}11} \cdot (x - 0{,}703), \quad \bar{y}_x = -0{,}828x + 1{,}204;$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \bar{y}),$$

т. е.

$$\bar{x}_y - 0{,}703 = -0{,}867 \cdot \frac{0{,}11}{0{,}105}(y - 0{,}622), \quad \bar{x}_y = -0{,}908y + 1{,}268. \ \blacktriangle$$

945. Дана корреляционная таблица для величин X и Y, где X — срок службы колеса вагона в годах, а Y — усредненное значение износа по толщине обода колеса в миллиметрах:

$X \backslash Y$	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42
0	3	6								
1	25	108	44	8	2					
2	3	50	60	21	5	5				
3	1	11	33	32	13	2	3	1		
4		5	5	13	13	7	2			
5			1	2	12	6	3	2	1	
6		1		1			2	1		1
7			1	1				1		

Определить коэффициент корреляции и уравнения линий регрессии.

946. Дана корреляционная таблица для величин X и Y, где X — стрела кривизны рельса в сантиметрах, а Y — количество дефектов рельса (в сантиметрах на 25-метровый рельс):

X \ Y	0	5	10	15	20
7,0	2				
7,5	1	1		1	1
8,0		1			1
8,5	2				
9,0	2		1	1	3
9,5				2	
10,0	3	2	4	3	3
10,5	4	5	1	3	1
11,0	3		3	2	6
11,5	3	5	1		9
12,0	5	3	6	4	4
12,5	1	1	3	10	6
13,0	1		1	4	5
13,5	1	1		1	6
14,0	2		1		3
14,5			2		1
15,0					
15,5		1	1		
16,0					3

Определить коэффициент корреляции и уравнения линии регрессии.

§ 17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

1. Генеральная и выборочная совокупности. *Выборочной совокупностью* (или *выборкой*) называется совокупность случайно отобранных однородных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если она достаточно хорошо представляет количественные соотношения генеральной совокупности.

2. Частота и относительная частота. Пусть имеется выборка объема n. Расположим результаты выборки в таблице

i	1	2	3	...	n
ξ_i	ξ_1	ξ_2	ξ_3	...	ξ_n

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — значения случайной величины X соответственно в 1, 2, 3, ..., n-м испытаниях. Среди приведенных значений случайной величины X могут быть и равные. Объединив равные значения случайной величины, получим таблицу

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

где n_i — число появлений значения x_i ($i=1, 2, \ldots, l$). Величины $n_1, n_2, \ldots, n_l$ называются *частотами* соответствующих значений $x_1, x_2, \ldots, x_l$ случайной величины X. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{l} n_i = n$, т. е. сумма частот всех значений случайной величины равна объему выборки.

Отношение частоты n_i к объему выборки n называется *относительной частотой* значения x_i и обозначается через w_i ($i=1, 2, \ldots, l$). Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{l} w_i = \sum_{i=1}^{l} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

т. е. для случайной величины X сумма относительных частот всех ее значений равна единице.

Таблица, устанавливающая соответствие между значениями случайной величины и их относительными частотами, называется *статистическим распределением* случайной величины X:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Следует заметить, что довольно часто статистическим распределением называют также таблицу, определяющую соответствие между значениями случайной величины и их частотами.

Если X — непрерывная случайная величина, то ее статистическое распределение целесообразно представить в виде

I	(ξ_0, ξ_1)	(ξ_1, ξ_2)	(ξ_2, ξ_3)	...	(ξ_{l-1}, ξ_l)
W	w_1	w_2	w_3	...	w_l

Здесь w_i — относительная частота попадания случайной величины в интервал (ξ_{i-1}, ξ_i), $i=1, 2, \ldots, l$.

Если случайная величина примет λ значений, равных x_i, то в случае четного значения λ половину этих значений можно отнести к интервалу (ξ_{i-1}, ξ_i), а вторую половину — к интервалу (ξ_i, ξ_{i+1}), $1 \leqslant i \leqslant l-1$. При нечетном λ к

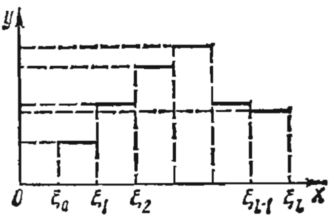

Рис. 51

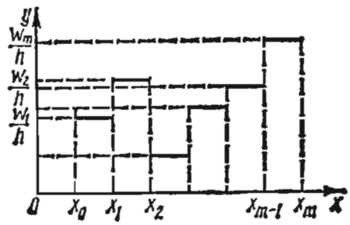

Рис. 52

одному из этих двух интервалов можно отнести $(\lambda+1)/2$ значений, а к другому $(\lambda-1)/2$ значений. При большом объеме n выборки не имеет существенного значения, к какому из интервалов отнесено большее число значений.

Для наглядности статистическое распределение дискретной случайной величины иллюстрируется *полигоном* распределения. Для этого последовательные точки $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, $\ldots$, $(x_l; w_l)$ изображают на координатной плоскости и соединяют их прямолинейными отрезками. Необходимо отметить, что точки, не являющиеся вершинами полигона, не представляют интереса с точки зрения математической статистики.

Для иллюстрации распределения непрерывной случайной величины пользуются диаграммами, которые называются *гистограммами*.

1. Гистограмма, устанавливающая зависимость частот от разрядов интервалов, в которые попадают значения случайной величины.

Пусть непрерывная случайная величина X определена таблицей:

I	(ξ_0, ξ_1)	(ξ_1, ξ_2)	(ξ_2, ξ_3)	...	(ξ_{l-1}, ξ_l)
n_x	n_1	n_2	n_3	...	n_l

Предполагая, что разности $\xi_i - \xi_{l-1}$ постоянны, положим $\xi_i - \xi_{i-1} = h$ для $i=1, 2, \ldots, l$ (h — шаг таблицы). На оси Ox отметим точки $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l$. Рассмотрим функцию, определенную равенствами $y=n_i/h$, если $x \in (\xi_{i-1}, \xi_i)$, $i=1, 2, \ldots, l$. Вычислим площади S_i прямоугольников, нижними основаниями которых являются отрезки $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ оси Ox, а верхними — соответствующие отрезки графика функции $y=n_i/h$ (рис. 51); имеем

$$S_i = (n_i/h) \cdot h = n_i \quad (i=1, 2, \ldots, l).$$

2. Гистограмма, характеризующая статистическое распределение случайной величины. Она устанавливает зависимость между разрядами и относительными частотами значений случайной величины, попавших в эти разряды.

В этом случае рассматривается функция вида $y=w_i/h$ ($i=1, 2, \ldots, l$). Аналогично предыдущему, площадь соответствующего i-го прямоугольника численно равна w_i. Таким образом, площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=x_0$, $x=x_l$, $y=0$, $y=w_i/h$ ($i=1, 2, \ldots, l$), равна 1 (рис. 52).

947. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения:

$$\begin{array}{lllll}
\xi_1=2, & \xi_2=5, & \xi_3=7, & \xi_4=1, & \xi_5=10, \\
\xi_6=5, & \xi_7=9, & \xi_8=6, & \xi_9=8, & \xi_{10}=6, \\
\xi_{11}=2, & \xi_{12}=3, & \xi_{13}=7, & \xi_{14}=6, & \xi_{15}=8, \\
\xi_{16}=3, & \xi_{17}=8, & \xi_{18}=10, & \xi_{19}=6, & \xi_{20}=7, \\
\xi_{21}=3, & \xi_{22}=9, & \xi_{23}=4, & \xi_{24}=5, & \xi_{25}=6.
\end{array}$$

Требуется: 1) составить таблицу, устанавливающую зависимость между значениями случайной величины и ее частотами; 2) построить статистическое распределение; 3) изобразить полигон распределения.

△ 1) Найдем объем выборки: $n=25$. Составим таблицу

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

2) Статистическое распределение имеет вид

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	1/25	2/25	3/25	1/25	3/25	5/25	3/25	3/25	2/25	2/25

Контроль: $\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=1.$

Последнюю таблицу можно переписать в виде

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,04	0,08	0,12	0,04	0,12	0,2	0,12	0,12	0,08	0,08

3) Возьмем на плоскости xOw точки (1; 0,04), (2; 0,08), (3; 0,12) и т. д. Последовательно соединив эти точки прямолинейными отрезками, получим полигон распределения случайной величины X (рис. 53). ▲

948. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения:

$$\xi_1=16,\quad \xi_2=17,\quad \xi_3=9,\quad \xi_4=13,\quad \xi_5=21,$$
$$\xi_6=11,\quad \xi_7=7,\quad \xi_8=7,\quad \xi_9=19,\quad \xi_{10}=5,$$
$$\xi_{11}=17,\quad \xi_{12}=5,\quad \xi_{13}=20,\quad \xi_{14}=18,\quad \xi_{15}=11,$$
$$\xi_{16}=4,\quad \xi_{17}=6,\quad \xi_{18}=22,\quad \xi_{19}=21,\quad \xi_{20}=15,$$
$$\xi_{21}=15,\quad \xi_{22}=23,\quad \xi_{23}=19,\quad \xi_{24}=25,\quad \xi_{25}=1.$$

Требуется: составить таблицу статистического распределения, разбив промежуток $(0,25)$ на пять участков, имеющих одинаковые длины; построить гистограмму относительных частот.

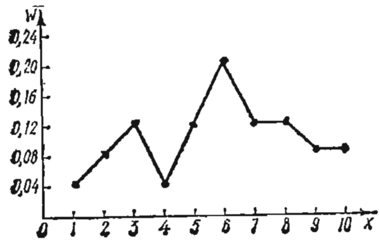

Рис. 53

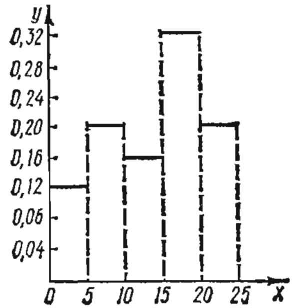

Рис. 54

△ Предварительно составим таблицу

I	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)
n_x	3	5	4	8	5

Статистическое распределение имеет вид

I	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)
W	0,12	0,2	0,16	0,32	0,2

Гистрограмма относительных частот изображена на рис. 54.

3. Статистическая функция. Пусть $F^*(x)$ — относительная частота появления значений случайной величины X, удовлетворяющих неравенству $X < x$. Функция $F^*(x)$ называется *статистической функцией распределения*. Таким образом,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < x_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \omega_j & \text{при} \quad x_k \leqslant x < x_{k+1} \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1), \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant x_s. \end{cases}$$

Так как согласно теореме Бернулли относительные частоты при неограниченном возрастании n стремятся по вероятности к соответствующим вероятностям события, то при большом объеме выборки статистическая функция распределения $F^*(x)$ близка к интегральной функции распределения $F(x) = P(X < x)$.

Точки $x_1, x_2, \ldots, x_l$ являются точками разрыва I рода функции $F^*(x)$.

949. Дано статистическое распределение:

X	11	12	13	14
W_x	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти статистическую функцию распределения и построить ее график.

△ Имеем

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 11, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 11 < x \leqslant 12, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 12 < x \leqslant 13, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 13 < x \leqslant 14, \\ 1 & \text{при} \quad x > 14. \end{cases}$$

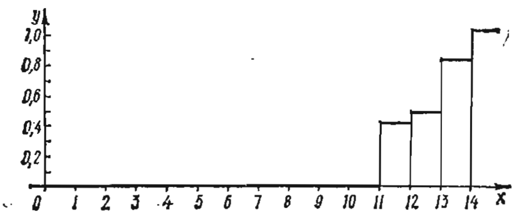

Рис. 55

График функции $F^*(x)$ изображен на рис. 55. ▲

4. Определение среднего значения случайной величины. *Средним значением* случайной величины X, заданной статистическим распределением, называется выражение

$$\bar{x} = w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_lx_l = \sum_{i=1}^{l} w_ix_i,$$

или

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_lx_l}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_ix_i. \tag{1}$$

Равенство (1) определяет среднее значение X для выборки.

Аналогично определяется среднее значение случайной величины X для генеральной совокупности:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_Nx_N}{N}, \tag{2}$$

где N — объем генеральной совокупности. Так как $n_i/N=p_i$ — вероятность, с которой X принимает значение x_i ($1 \leqslant i \leqslant N$), то равенство (2) можно записать в виде

$$\bar{x}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_Np_N=M(X).$$

В соответствии с законом больших чисел Бернулли можно считать, что для выборочной совокупности $\bar{x}\approx M(X)$. В дальнейшем, предполагая n достаточно большим, будем писать $\bar{x}=M(X)$.

Если все значения случайной величины X близки к постоянному числу a, то вычисление $\bar{x}$ упрощается:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{l} w_ix_i=\sum_{i=1}^{l} w_i(x_i-a+a)=\sum_{i=1}^{l} w_i(x_i-a)+a\sum_{i=1}^{l} w_i=\overline{x-a}+a\sum_{i=1}^{l} w_i,$$

т. е.

$$\bar{x}=a+\overline{x-a}, \tag{3}$$

где $\overline{x-a}$ — среднее значение случайной величины $X-a$. Таким образом, при достаточно большом n выполняется равенство

$$M(X)=a+M(X-a). \tag{4}$$

950. Найти среднее значение случайной величины, заданной распределением

X	13,8	13,9	14	14,1	14,2
n_x	4	3	7	6	5

△ Все значения X близки к $a=14$. Вычислим относительные частоты и составим таблицу:

$X-14$	—0,2	—0,1	0	0,1	0,2
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Теперь находим

$$\overline{x-14}=\sum_{i=1}^{5} w_i(x_i-14)=-0{,}16\cdot 0{,}2-0{,}12\cdot 0{,}1+0{,}28\cdot 0+0{,}24\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2=$$
$$=-0{,}032-0{,}012+0{,}024+0{,}04=0{,}02.$$

Следовательно, $\bar{x}=14+0{,}02=14{,}02$. ▲

5. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение. *Статистической дисперсией* случайной величины, заданной статистическим распределением, называется выражение

$$D^*(X)=w_1(x_1-\bar{x})^2+w_2(x_2-\bar{x})^2+\ldots+w_l(x_l-\bar{x})^2. \tag{1}$$

Из равенства (1) следует, что статистическая дисперсия является средним значением случайной величины $(X-\bar{x})^2$. С возрастанием n среднее значение $\bar{x}$ стремится по вероятности к $M(X)$, а относительные частоты $w_1, w_2, \ldots, w_l$ —

к соответствующим вероятностям. Таким образом, при большом объеме выборки имеет место приближенное равенство $D^*(X) \approx D(X)$. Величина $\sigma^*(X) = \sqrt{D^*(X)}$ называется *средним квадратичным отклонением*. Она имеет ту же размерность, что и случайная величина X.

В дальнейшем, считая объем выборки n достаточно большим, вместо $D^*(X)$ и $\sigma^*(X)$ будем писать соответственно $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Если значения случайной величины X близки к постоянной величине a, то вычисление статистической дисперсии упрощается:

$$D^*(X) = \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{l} w_i [(x_i - a) - (\overline{x} - a)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - a)^2 - 2(\overline{x} - a) \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - a) + (\overline{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{l} w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - a)^2 - 2(\overline{x} - a)(\overline{x-a}) + (\overline{x} - a)^2.$$

Из равенства (3) п. 4 следует, что $\overline{x} - a = \overline{x - a}$, поэтому

$$D^*(X) = \overline{(x-a)^2} - (\overline{x-a})^2, \tag{2}$$

где $\overline{(x-a)^2}$ — среднее значение случайной величины $(X-a)^2$, а $(\overline{x-a})^2$ — квадрат среднего значения случайной величины $X - a$. Так как левая часть равенства (2) не зависит от a, то в правой части равенства после упрощений a должно исключиться. Если, в частности, $a = 0$, то получается формула

$$D(X) = \overline{x^2} - (\overline{x})^2.$$

Аналогичная формула часто используется в теории вероятностей.

Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y = kX + b$, то средние значения этих величин связаны той же линейной зависимостью:

$$\overline{y} = k\overline{x} + b \text{ или } M(Y) = kM(X) + b. \tag{3}$$

Если дисперсию величины Y выразить через дисперсию величины X, то

$$D(Y) = D(kX + b) = D(kX) + D(b) = k^2 D(X),$$

так как $D(b) = 0$. Следовательно,

$$D(Y) = k^2 [\overline{x^2} - (\overline{x})^2]. \tag{4}$$

951. Вычислить $D(X)$ и $\sigma(X)$ для статистического распределения, заданного в примере 950.

△ Составим таблицу

$(X-14)^2$	0,04	0,01	0	0,01	0,04
W	0,16	0,12	0,28	0,24	0,2

Далее, имеем $\overline{x} - 14 = 0{,}02$, $\overline{(x-14)^2} = 0{,}0064 + 0{,}0012 + 0{,}0024 + 0{,}008 = 0{,}018$.

Следовательно, $D(X) = 0{,}018 - 0{,}0004 = 0{,}0176$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}0176} \approx 0{,}133$. ▲

952. Определить $\overline{y}$ и $D(Y)$ для статистического распределения

Y	3	7	11	15	19	23
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

△ Значения Y образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Поэтому $Y=3+4(X-1)$, т. е. $Y=4x-1$, $k=4$, $b=-1$. Если X последовательно принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, то Y примет соответственно значения 3, 7, 11, 15, 19, 23. Таким образом, можно записать статистические распределения величин X и X^2:

X	1	2	3	4	5	6
W	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

X^2	1	4	9	16	25	36
W_x	0,02	0,18	0,35	0,3	0,1	0,05

Отсюда находим

$$\overline{x}=0,02+0,36+1,05+1,2+0,5+0,3=3,43;$$
$$\overline{x^2}=0,02+0,72+3,15+4,8+2,5+1,8=12,99$$

Используя формулу (3), получим

$$\overline{y}=4\cdot 3,43-1=12,72,$$

а по формуле (4) находим

$$D(Y)=4^2(12,99-11,76)=16\cdot 1,23=19,68. \blacktriangle$$

953. Найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины, заданной распределением

X	9,8	9,9	10	10,1	10,2
n_x	1	5	8	4	2

954. Определить $\overline{y}$ и $D(Y)$ для статистического распределения

Y	2	5	8	11	14	17	20	23
W	0,10	0,20	0,15	0,25	0,05	0,12	0,08	0,05

6. Определение моментов случайной величины по данным выборки. Асимметрия и эксцесс. *Начальным моментом* s-го порядка случайной величины X называется величина $\alpha_s(X)=M(X^s)$, а *центральным моментом* — величина $\mu_s(X)=M[(X-m_x)^s]$, где m_x — математическое ожидание случайной величины X.

Если считать выборку репрезентативной и имеющей достаточно большой объем, то для определения $\alpha_s(X)$ и $\mu_s(X)$ имеют место приближенные формулы

$$\alpha_s(X)\approx\sum_{i=1}^{l}\omega_i x_i^s,\quad \mu_s(X)\approx\sum_{i=1}^{l}\omega_i(x_i-\overline{x})^s.$$

Центральный момент первого порядка любой случайной величины тождественно равен нулю. Действительно, $\mu_1=M(X-m_x)=M(X)-m_x=0$.

В случае симметричного распределения случайной величины X относительно математического ожидания равны нулю и другие центральные моменты нечетного порядка.

Следует также иметь в виду, что $\alpha_1(X)=M(X)$, а $\mu_2(X)=D(X)$.

Если значения случайной величины близки к некоторому числу a, то для вычисления центральных моментов первых четырех порядков целесообразно пользоваться формулами

$$\mu_1(X)=0,$$
$$\mu_2(X)=\overline{(x-a)^2}-(\overline{x-a})^2,$$
$$\mu_3(X)=\overline{(x-a)^3}-3(\overline{x-a})\cdot\overline{(x-a)^2}+2(\overline{x-a})^3,$$
$$\mu_4(X)=\overline{(x-a)^4}-4(\overline{x-a})\,\overline{(x-a)^3}+6(\overline{x-a})^2\,\overline{(x-a)^2}-3(\overline{x-a})^4.$$

С помощью обозначения $\nu_s=\overline{(x-a)^s}$ эти формулы преобразуются к виду

$$\mu_1=0,\ \mu_2=\nu_2-\nu_1^2,\ \mu_3=\nu_3-3\nu_2\nu_1+2\nu_1^3,\ \mu_4=\nu_4-4\nu_3\nu_1+6\nu_2\nu_1^2-3\nu_1^4. \tag{1}$$

Если, в частности, $a=0$, то получаются равенства, устанавливающие зависимости между центральными μ_s и начальными α_s моментами первых четырех порядков:

$$\mu_1=0,\ \mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2,\ \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3,\ \mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4. \tag{2}$$

Начальный и центральный моменты s-го порядка имеют размерность, равную размерности s-й степени случайной величины.

Если случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y=kX+b$, то центральный момент s-го порядка случайной величины Y определяется следующим образом:

$$\mu_s(Y)=\mu_s(kX+b)=k^s\mu_s(X+b/k)=k^s\mu_s(X). \tag{3}$$

Легко доказывается, что $\mu_s(X+C)=\mu_s(X)$, где C — произвольная постоянная.

Среднее квадратичное отклонение определяется так:

$$\sigma(Y)=\sqrt{\mu_2(Y)}=\sqrt{k^2\mu_2(X)}=|k|\sqrt{\mu_2(X)}=|k|\,\sigma(X). \tag{4}$$

Пусть X — непрерывная случайная величина. Для определения ее числовых характеристик составим таблицу

X	x_1	x_2	...	x_l
W_x	ω_1	ω_2	...	ω_l

где x_i — какое-нибудь число из интервала (ξ_{i-1}, ξ_i), $i=1, 2, \ldots, l$. Обычно полагают $x_i=(\xi_{i-1}+\xi_i)/2$. Выразив асимметрию и эксцесс случайной величины $Y=kX+b$ через асимметрию и эксцесс случайной величины X, формулы для которых приведены на с. 206, 207, получим

$$S_k(Y)=\frac{\mu_3(Y)}{\sigma^3(Y)}=\frac{k^3\mu_3(X)}{|k|^3\sigma^3(X)}=\operatorname{sgn} k\cdot S_k(X); \tag{5}$$

$$E_x(Y)=\frac{\mu_4(Y)}{\sigma^4(Y)}-3=\frac{k^4\mu_4(X)}{|k|^4\sigma^4(X)}-3=E_x(X). \tag{6}$$

Очевидно, что если $k>0$, то $S_k(kX+b)=S_k(X)$; если же $k<0$, то $S_k(kX+b)=$ $=-S_k(X)$.

955. Вычислить центральные моменты первых четырех порядков случайной величины, имеющей следующее статистическое распределение:

X	11	12	13	14
W	0,35	0,25	0,15	0,25

△ Примем $a=10$. Для вычисления ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 составим расчетную таблицу:

$X-a$	W	$W(X-a)$	$W(X-a)^2$	$W(X-a)^3$	$W(X-a)^4$
1	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
2	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00
3	0,15	0,45	1,35	4,05	12,15
4	0,25	1,00	4,00	16,00	64,00
		2,30	6,70	22,40	80,50

Итак, $\nu_1=2,3$; $\nu_2=6,7$; $\nu_3=22,4$; $\nu_4=80,5$. По формулам (1) находим

$\mu_1(X)=0$; $\mu_2(X)=6,7-2,3^2=1,41$;
$\mu_3(X)=22,4-3\cdot 6,7\cdot 2,3+2\cdot 2,3^3=0,504$;
$\mu_4(X)=80,5-4\cdot 22,4\cdot 2,3+6\cdot 6,7\cdot 2,3^2-3\cdot 2,3^4=3,1257$. ▲

956. Вычислить центральные моменты первых четырех порядков случайной величины, имеющей следующее статистическое распределение:

Y	4	9	14	19
W	0,4	0,2	0,3	0,1

△ Числа 4, 9, 14, 19 образуют арифметическую прогрессию, поэтому $Y=4+5(X-1)$, т. е. $Y=5X-1$, $k=5$, $b=-1$. Составим таблицу

X	W	WX	WX^2	WX^3	WX^4
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
2	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2
3	0,3	0,9	2,7	8,1	24,3
4	0,1	0,4	1,6	6,4	25,6
		2,1	5,5	16,5	53,5

Следовательно, $\alpha_1=2,1$; $\alpha_2=5,5$; $\alpha_3=16,5$; $\alpha_4=53,5$. По формулам (2) находим

$$\mu_1(X)=0; \quad \mu_2(X)=5,5-4,41=1,09;$$
$$\mu_3(X)=16,5-6,3\cdot 5,5+2\cdot 2,1^3=0,372;$$
$$\mu_4(\bar{X})=53,5-8,4\cdot 16,5+6\cdot 4,41\cdot 5,5-3\cdot 4,41^2=2,0857.$$

Теперь, используя формулу (3), получим $\mu_s(Y)=5^s\mu_s(X)$, т. е.

$$\mu_1(Y)=0,\ \mu_2(Y)=25\cdot 1,09=27,25;\ \mu_3(Y)=125\cdot 0,372=46,5;$$
$$\mu_4(Y)=625\cdot 2,0857=1303,5625. \ \blacktriangle$$

957. Пользуясь данными выборки, определить начальные и центральные моменты первых четырех порядков, асимметрию и эксцесс, если случайная величина X определена таблицей

I	**(0, 2)**	**(2, 4)**	**(4, 6)**	**(6, 8)**	**(8, 10)**
n_x	3	4	10	5	3

△ Объем выборки $n=25$. Составим таблицу

X	W_x	W_xX	W_xX^2	W_xX^3	W_xX^4
1	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
3	0,16	0,48	1,44	4,32	12,96
5	0,40	2,00	10,00	50,00	250,00
7	0,20	1,40	9,80	68,60	480,20
9	0,12	1,08	9,72	87,48	787,32
		5,08	31,08	210,52	1530,60

Следовательно, $\alpha_1=5,08$; $\alpha_2=31,08$; $\alpha_3=210,52$; $\alpha_4=1530,60$, т. е. $M(X)=5,08$; $\mu_1=0$.

Используя формулы (2), находим

$$\mu_2 = 31{,}08 - 25{,}8064 = 5{,}1736, \text{ т. е. } D(X) = 5{,}1736;$$
$$\mu_3 = 210{,}52 - 3 \cdot 5{,}08 \cdot 31{,}08 + 2 \cdot 5{,}08^3 = -0{,}9462;$$
$$\mu_4 = 1530{,}60 - 4 \cdot 5{,}08 \cdot 210{,}52 + 6 \cdot 5{,}08^2 \cdot 31{,}08 - 3 \cdot 5{,}08^4 = 67{,}3004.$$

Отсюда получаем

$$\sigma(X) = \sqrt{5{,}1736} \approx 2{,}275;$$
$$S_k(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = -\frac{0{,}9462}{2{,}275^3} \approx -0{,}0804.$$
$$E_x(X) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} - 3 = \frac{67{,}3004}{2{,}275^4} - 3 \approx -0{,}488. \ \blacktriangle$$

958. Пользуясь данными выборки, определить начальные и центральные моменты первых четырех порядков, асимметрию и эксцесс для случайной величины, заданной таблицей

I	(1, 3)	(3, 5)	(5, 7)	(7, 9)	(9, 11)
n_x	2	4	10	6	3

§ 18. НАХОЖДЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВЕ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

1. Распределение с равномерной плотностью. Пусть задано статистическое распределение

I	(ξ_0, ξ_1)	(ξ_1, ξ_2)	...	(ξ_{l-1}, ξ_l)
W	w_1	w_2	...	w_l

Если числа $w_1, w_2, \ldots, w_l$ близки друг к другу, то для обработки наблюдений удобно воспользоваться законом распределения с равномерной плотностью. Как известно (см. с. 196), плотность распределения в этом случае определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ 1/(b-a) & \text{при } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение для распределения с равномерной плотностью находятся по формулам

$$M(X) = (a+b)/2, \quad D(X) = (b-a)^2/12, \quad \sigma(X) = (b-a)/(2\sqrt{3}).$$

Таким образом, решив систему уравнений

$$\begin{cases} (a+b)/2 = M(X), \\ (b-a)/(2\sqrt{3}) = \sigma(X), \end{cases}$$

можно найти a и b, а затем искомую плотность распределения.

959. Выравнять опытные данные, применив закон распределения с равномерной плотностью:

I	(0, 10)	(10, 20)	(20, 30)	(30, 40)	(40, 50)	(50, 60)
n_x	11	14	15	10	14	16

△ Здесь $n=80$. Составим таблицу

X	5	15	25	35	45	55
W	11/80	14/80	15/80	10/80	14/80	16/80

Полагая $X=5T$, получим следующую таблицу:

T	W	WT	WT^2
1	11/80	11/80	11/80
3	7/40	21/40	63/40
5	3/16	15/16	75/16
7	1/8	7/8	49/8
9	7/40	63/40	567/40
11	1/5	11/5	121/5
		25/4	509/10

Далее, имеем

$M(X)=5M(T)=5\cdot(25/4)=31{,}25$; $M(X^2)=5^2\,M(T^2)=25\cdot(509/10)=1272{,}5$;

$D(X)=1272{,}5-976{,}5625=295{,}9375$; $\begin{cases}(a+b)/2=31{,}25,\\ (b-a)/(2\sqrt{3})=\sqrt{295{,}9375}.\end{cases}$

Решив последнюю систему, найдем $a=1{,}46$, $b=61{,}04$, откуда $1/(b-a)=$ $=1/(61{,}04-1{,}46)=0{,}017$. Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1{,}46,\\ 0{,}017 & \text{при} \quad 1{,}46\leqslant x\leqslant 61{,}04,\\ 0 & \text{при} \quad x>61{,}04.\end{cases}$$

Для построения гистограммы составим таблицу (где $h=10$):

I	(0, 10)	(10, 20)	(20, 30)	(30, 40)	(40, 50)	(50, 60)
W/h	0,0138	0,0175	0,0188	0,0125	0,0175	0,02

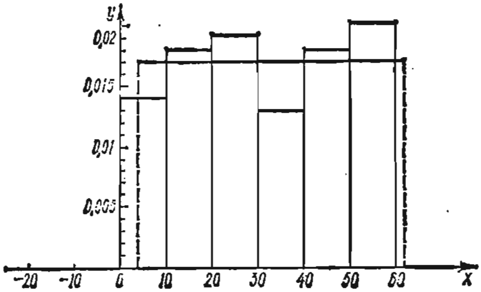

Рис. 56

На рис. 56 изображена гистограмма относительных частот данного статистического распределения и график плотности распределения.

Так как распределение с равномерной плотностью симметрично относительно математического ожидания, то $\mu_3(X)=0$, $S_k(X)=0$. Известно также, что при таком распределении эксцесс равен $-1,2$ независимо от значений a и b. ▲

960. Произвести выравнивание опытных данных с помощью закона распределения с равномерной плотностью:

I	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, 7)$	$(7, 9)$
n_x	6	7	4	5	8

2. Распределение Пуассона. Распределение Пуассона устанавливает соответствие между значениями случайной величины X и вероятностями этих значений с помощью равенства

$$P=\frac{e^{-\lambda}}{x!}\lambda^x, \tag{1}$$

где x принимает значения 0, 1, 2, 3, ...

Таким образом, ряд распределения случайной величины X имеет вид

X	0	1	2	3	...
P	$e^{-\lambda}$	$e^{-\lambda}\lambda$	$\frac{e^{-\lambda}}{2}\lambda^2$	$\frac{e^{-\lambda}}{3!}\lambda^3$	...

На практике случайная величина X принимает ограниченное число значений 0, 1, 2, ..., l, так как при достаточно большом λ величина $\frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$ является малой.

Напомним, что для распределения Пуассона $M(X)=D(X)=\lambda$.

Пусть дано статистическое распределение

X	0	1	2	...	l
n_x	n_0	n_1	n_2	...	n_l

Это распределение можно записать и в виде

X	0	1	2	...	l
W	w_0	w_1	w_2	...	w_l

Если для данного распределения величины $M(X)$ и $D(X)$ не близки друг к другу, то оно не является распределением Пуассона. Если же $M(X) \approx \lambda$ и $D(X) \approx \lambda$, то для решения вопроса о характере распределения следует подставить значение λ в выражение (I) и вычислить значения этого выражения при $x = 0, 1, 2, \ldots, l$. В том случае, когда значения P окажутся близкими к соответствующим значениям W, можно считать, что случайная величина распределена по закону Пуассона.

961. Дано статистическое распределение

X	0	1	2	3	4	5	6	7
n_x	7	21	26	21	13	7	3	2

Показать, что оно близко к распределению Пуассона и установить зависимость между значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

△ Найдем $n = \sum_{i=0}^{7} n_i = 7 + 21 + 26 + 13 + 7 + 3 + 2 = 100$. Составим таблицу

X	0	1	2	3	4	5	6	7
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Определим математическое ожидание случайной величины:

$$M(X) = 0{,}21 + 0{,}52 + 0{,}63 + 0{,}52 + 0{,}35 + 0{,}18 + 0{,}14 = 2{,}55.$$

Составим теперь таблицу

X^2	0	1	4	9	16	25	36	49
W	0,07	0,21	0,26	0,21	0,13	0,07	0,03	0,02

Следовательно,

$$M(X^2) = 0{,}21 + 1{,}04 + 1{,}89 + 2{,}08 + 1{,}75 + 1{,}08 + 0{,}98 = 9{,}03,$$

откуда

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=9{,}03-6{,}503=2{,}527.$$

Положим $\lambda=2{,}52$; тогда зависимость между значениями случайной величины и их вероятностями можно записать в виде

$$P=\frac{e^{-2,52}}{x!}\cdot 2{,}52^x.$$

Подсчитав по этой формуле значения P для $x=0, 1, 2, \ldots, 7$, получим таблицу

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,08	0,20	0,25	0,21	0,13	0,07	0,03	0,01 ▲

962. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для статистического распределения

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n_x	1	3	8	14	17	17	15	10	7	5	2	1

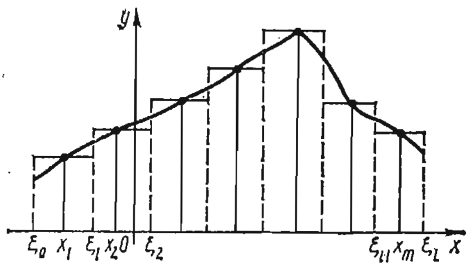

Рис. 57

3. Нормальное распределение. Пусть статистическое распределение

I	(ξ_0, ξ_1)	(ξ_1, ξ_2)	...	(ξ_{l-1}, ξ_l)
W	w_1	w_2	...	w_l

имеет гистограмму, изображенную на рис. 57. Составим таблицу

X	x_1	x_2	...	x_l
W	w_1	w_2	...	w_l

полагая $x_i=(\xi_{i-1}+\xi_i)/2$, $i=1, 2, \ldots, l$. На рисунке плавной линией соединены точки $(x_1; w_1/h)$, $(x_2, w_2/h)$, $\ldots$, $(x_l, w_l/h)$, где h — шаг таблицы.

Если полученная плавная кривая близка к кривой Гаусса, то можно обработать статистические данные с помощью нормального закона распределения. Определив математическое ожидание $m=M(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma=\sigma(X)$, рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}. \tag{1}$$

Найдем значения этой функции в точках $x_1, x_2, \ldots, x_l$. Нетрудно видеть, что произведения $hf(x_1)$, $hf(x_2)$, $\ldots$, $hf(x_l)$ равны вероятностям попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону (1), соответственно в интервалы (ξ_0, ξ_1), (ξ_1, ξ_2), $\ldots$, (ξ_{l-1}, ξ_l). Если заданное статистическое распределение близко к нормальному, то будут выполнены приближенные равенства $hf(x_i)\approx w_i$, $i=1, 2, \ldots, l$. В дальнейшем приведем более точные критерии согласования эмпирического и теоретического законов распределения.

963. Дано статистическое распределение:

I	(0, 3)	(3, 6)	(6, 9)	(9, 12)	(12, 15)	(15, 18)	(18, 21)	(21, 24)	(24, 27)	(27, 30)
n_x	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Показать, что оно близко к нормальному распределению, и построить гистограмму его относительных частот.

△ Здесь $n=50$. Составим таблицу

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Произведя замену переменной по формуле $X=3T-1,5$, запишем статистические распределения для T и T^2:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02
T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
W	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Далее, имеем

$$M(T)=0{,}02+0{,}12+0{,}24+0{,}48+1{,}1+1{,}2+0{,}98+0{,}8+0{,}36+0{,}2=5{,}5;$$
$$M(T^2)=0{,}02+0{,}24+0{,}72+1{,}92+5{,}5+7{,}2+6{,}86+6{,}4+3{,}24+2=34{,}1;$$
$$M(X)=3M(T)-1{,}5=3\cdot 5{,}5-1{,}5=15;$$
$$\sigma^2(X)=9\,(34{,}1-30{,}25)=34{,}65;\ \sigma(X)=\sqrt{9\cdot 3{,}85}=3\cdot 1{,}962\approx 5{,}9.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{5{,}9\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-15)^2/69{,}3}.$$

Положим $(x-15)/5{,}9=u$; тогда

$$f(x)=\frac{1}{5{,}9\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-u^2/2}\approx 0{,}17z_u, \text{ где } z_u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-u^2/2}.$$

Значения функции z_u приведены в табл. IV на с. 412.

Используя эти значения, составим теперь таблицу ($h=3$)

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$	X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1,5	—2,29	0,029	0,005	0,02	16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
4,5	—1,78	0,082	0,014	0,04	19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
7,5	—1,27	0,178	0,030	0,09	22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	—0,76	0,299	0,051	0,15	25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
13,5	—0,25	0,387	0,066	0,20	28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

Заметим, что полученные результаты могут быть сопоставлены с вероятностями попадания случайной величины на данный участок, вычисляемыми по формуле

$$p(a<X<b)=\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right],$$

где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$ — функция Лапласа, значения которой приведены в табл. III на с. 411, и $m=M(x)=15$. Пользуясь этой таблицей, находим

$P(0<X<3)=0{,}5\,[-\Phi(1{,}44)+\Phi(1{,}80)]=0{,}5\,(-0{,}9583+0{,}9891)=$
$=0{,}0154\approx 0{,}02;$

$P(3<X<6)=0{,}5\,[-\Phi(1{,}08)+\Phi(1{,}44)]=0{,}5\,(-0{,}8733+0{,}9583)=$
$=0{,}0425\approx 0{,}04;$

$P(6<X<9)=0{,}5\,[-\Phi(0{,}72)+\Phi(1{,}08)]=0{,}5\,(-0{,}6914+0{,}8733)=$
$=0{,}0905\approx 0{,}09;$

$P(9<X<12)=0{,}5\,[-\Phi(0{,}36)+\Phi(0{,}72)]=0{,}5\,(-0{,}3893+0{,}6914)=$
$=0{,}151\approx 0{,}15;$

$P(12<X<15)=0{,}5\,[-\Phi(0)+\Phi(0{,}36)]=0{,}5\cdot 0{,}3893=0{,}1946\approx 0{,}19;$

$P(15<X<18)=0{,}5\,[\Phi(0{,}36)-\Phi(0)]=0{,}5\cdot 0{,}3893=0{,}1946\approx 0{,}19;$

$P(18<X<21)=0{,}5\,[\Phi(0{,}72)-\Phi(0{,}36)]=0{,}5\,(0{,}6914-0{,}3893)=$
$=0{,}151\approx 0{,}15;$

$P(21<X<24)=0{,}5\,[\Phi(1{,}08)-\Phi(0{,}72)=0{,}5\,(0{,}8733-0{,}6914)=$
$=0{,}091\approx 0{,}09;$

$P(24 < X < 27) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}44) - \Phi(1{,}08)] = 0{,}5\,(0{,}9583 - 0{,}8733) = 0{,}0425 \approx 0{,}04;$

$P(27 < X < 30) = 0{,}5\,[\Phi(1{,}80) - \Phi(1{,}44)] = 0{,}5\,(0{,}9891 - 0{,}9583) = 0{,}0154 \approx 0{,}02.$

В результате получаем таблицу

I	(0, 3)	(3, 6)	(6, 9)	(9, 12)	(12, 15)	(15, 18)	(18, 21)	(21, 24)	(24, 27)	(27, 30)
P	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Сравнивая значения w и $hf(x)$ (или w и P), убеждаемся в том, что заданное статистическое распределение можно считать подчиненным нормальному закону (рис. 58). ▲

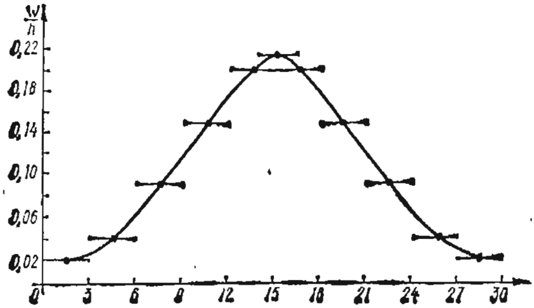

Рис. 58

964. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для статистического распределения

I	(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 7)	(7, 8)
n_x	4	4	8	16	18	20	30
I	(8, 9)	(9, 10)	(10, 11)	(11, 12)	(12, 13)	(13, 14)	(14, 15)
n_x	28	22	18	14	10	4	4

4. Распределение Шарлье. Нормальное распределение является симметричным, т. е. кривая $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$ симметрична относительно прямой $x = m$. Однако на практике часто встречаются и асимметричные распределения. В том случае, когда асимметрия по абсолютной величине не очень велика, распределение может быть выравнено с помощью так называемого *закона Шарлье*. Плотность закона Шарлье определяется равенством

$$f_{\text{ш}}(x) = f(x) + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{S_k(X)}{6} z_u (u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24} z_u (u^4 - 6u^2 + 3)\right], \qquad (1)$$

где $f(x)$ — плотность нормального закона распределения, $u = (x - m)/\sigma$; $z_u = (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-u^2/2}$, $S_k(X)$ — асимметрия, $E_x(X)$ — эксцесс. Таким образом, второе слагаемое в правой части равенства (1) является поправкой к нормальному закону распределения. Нетрудно видеть, что если $S_k(X) = 0$ и $E_x(X) = 0$, то распределение Шарлье совпадает с нормальным. Распределение Шарлье можно записать в виде

$$P = \frac{h}{\sigma} z_u \left[1 + \frac{S_k(X)}{6}(u^3 - 3u) + \frac{E_x(X)}{24}(u^4 - 6u^2 + 3)\right]. \qquad (2)$$

965. Воспользоваться распределением Шарлье применительно к данным статистической таблицы

I	(0, 3)	(3, 6)	(6, 9)	(9, 12)	(12, 15)	(15, 18)	(18, 21)	(21, 24)	(24, 27)	(27, 30)
n_x	1	5	8	15	28	21	10	6	3	3

△ Здесь $n = 100$. Составим таблицу

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
W_x	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Перейдем к новой переменной T, связанной с X зависимостью $X = 3T - 1,5$. Статистическое распределение случайной величины T имеет вид

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	0,01	0,05	0,08	0,15	0,28	0,21	0,1	0,06	0,03	0,03

Приведем расчетную таблицу:

T	W	WT	WT^2	WT^3	WT^4
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0,05	0,10	0,20	0,40	0,80
3	0,08	0,24	0,72	2,16	6,48
4	0,15	0,60	2,40	9,60	38,40
5	0,28	1,40	7,00	35,00	175,00
6	0,21	1,26	7,56	45,36	272,16
7	0,1	0,70	4,90	34,30	240,10
8	0,06	0,48	3,84	30,72	245,76
9	0,03	0,27	2,43	21,97	197,73
10	0,03	0,30	3,00	30,00	300,00
		5,36	32,06	209,52	1476,44

Далее, имеем

$$M(T)=5{,}36;\ M(X)=3\cdot 5{,}36-1{,}5=14{,}58;\ M(T^2)=32{,}06;$$

$$D(T)=32{,}06-28{,}73=3{,}33;\ \sigma(T)=\sqrt{3{,}33}=1{,}83;\ \sigma(X)=3\sigma(T)=5{,}49;$$

$$\mu_3(T)=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3=209{,}52-3\cdot 5{,}36\cdot 32{,}06+2\cdot 5{,}36^3=1{,}98;$$

$$S_k(T)=\mu_3(T)/\sigma^3(T)=1{,}98/1{,}83^3=0{,}32;$$

$$\mu_4(T)=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4=$$

$$=1476{,}44-4\cdot 5{,}36\cdot 209{,}52+6\cdot 5{,}36^2\cdot 32{,}06-3\cdot 5{,}36^4=34{,}59;$$

$$\sigma^4(T)=3{,}33^2=11{,}0889;\ E_x(T)=34{,}59/11{,}09-3=0{,}12;\ E_x(X)=0{,}12.$$

Так как $h=3$, $M(X)=14{,}58=m$, $\sigma(X)=5{,}49$, $u=(x-14{,}58)/5{,}49$, $S_k(X)=0{,}32$, $E_x(X)=0{,}12$, то относительная частота распределения Шарлье выражается равенством

$$w=\frac{3}{5{,}49}z_u\left[1+\frac{0{,}32}{6}(u^3-3u)+\frac{0{,}12}{24}(u^4-6u^2+3)\right],\quad \text{или}\quad w=0{,}55z_uS,$$

где $S=1+0{,}05(u^3-3u)+0{,}005(u^4-6u^2+3)$.

Составим таблицу для определения выравненных по закону Шарлье частот:

X	U	z_u	U^2	U^3	U^4	$3U$	$6U^2$	$0{,}05\times(U^3-3U)$	$0{,}005\times(U^4-6U^2+3)$	S	P
1,5	−2,38	0,02	5,66	−13,48	32,08	−7,14	33,96	−0,32	0,005	0,69	0,01
4,5	−1,84	0,07	3,39	−6,23	11,46	−5,52	20,34	−0,04	−0,03	0,9	0,04
7,5	−1,29	0,17	1,66	−2,15	2,77	−3,87	9,96	0,09	−0,02	1,05	0,09
10,5	−0,74	0,30	0,55	−0,41	0,30	−2,22	3,30	0,09	0,00	1,09	0,18
13,5	−0,19	0,39	0,04	−0,01	0,00	−0,57	0,24	0,03	0,015	1,06	0,23
16,5	0,35	0,38	0,12	0,04	0,01	1,05	0,72	−0,05	0,01	0,97	0,20
19,5	0,90	0,27	0,81	0,73	0,66	2,7	4,86	−0,10	−0,005	0,89	0,13
22,5	1,44	0,14	2,07	2,99	4,30	4,32	12,42	−0,07	−0,025	0,88	0,07
25,5	1,99	0,06	3,96	7,88	15,68	5,97	23,76	0,10	−0,025	1,05	0,03
28,5	2,54	0,02	6,45	16,39	41,62	7,62	38,70	0,44	0,03	1,5	0,02

Сравнивая частоты, полученные после выравнивания по закону Шарлье, с частотами, заданными статистической таблицей, приходим к заключению, что соответствующие частоты достаточно близки друг к другу. Однако об окончательном решении вопроса о согласованности статистического и теоретического распределений мы сможем судить лишь после того, как будут рассмотрены критерии согласия (Пирсона, Романовского, Колмогорова). ▲

5. Критерии согласия Пирсона и Романовского. Рассмотрим вопрос о согласованности статистического и теоретического распределений. Пусть статистическое распределение выравнено с помощью некоторого известного закона распределения (с равномерной плотностью, нормального закона, закона Шарлье и т. д.).

Пирсоном предложен следующий критерий согласованности статистического и теоретического распределений. Сначала вводят величину

$$\chi^2=n\sum_{i=1}^{l}\frac{(w_i-p_i)^2}{p_i},$$

где w_i — относительные частоты, заданные статистической таблицей, а p_i — вероятности, полученные по некоторому теоретическому закону распределения. Затем рассматривают разность $r=l-t$, где l — число разрядов статистической таблицы, а t — число условий, налагаемых на частоты $w_1, w_2, \ldots, w_l$; число r называется числом *степеней свободы*.

Например, для нормального закона распределения $t=3$, так как используются следующие условия:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} \omega_i = 1; \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} \omega_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 \omega_i = D_x,$$

где m_x и D_x — математическое ожидание и дисперсия в теоретическом законе распределения.

Для закона Шарлье $t=5$, так как имеются пять линейных уравнений, связывающих значения $p_1, p_2, \ldots, p_l$:

$$1)\ \sum_{i=1}^{l} p_i = 1, \quad 2)\ \sum_{i=1}^{l} p_i x_i = m_x; \quad 3)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^2 p_i = D_x;$$

$$4)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^3 p_i = \mu_3(X); \quad 5)\ \sum_{i=1}^{l} (x_i - m_x)^4 p_i = \mu_4(X).$$

Используя табл. V (см. с. 413, 414), по значениям χ^2 и r определяют величину p, характеризующую вероятность согласованности теоретического и статистического распределений. Если $p < 0{,}1$, то можно сделать вывод, что теория плохо воспроизводит эксперимент. Если же $p > 0{,}1$, то это означает, что гипотеза о принятом теоретическом распределении не противоречит опытным данным.

В. И. Романовским предложен следующий критерий согласия: если величина $|\chi^2 - r|/\sqrt{2r}$ больше или равна 3, то расхождение теоретических и опытных частот надо считать неслучайным; если же она меньше 3, то это расхождение можно считать случайным.

966. Проверить, согласуется ли статистическое распределение задачи 959 с теоретическим, имеющим равномерную плотность.

△ По данным статистической таблицы в задаче 959 была определена плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 1{,}46, \\ 0{,}017 & \text{при} \quad 1{,}46 \leqslant x \leqslant 61{,}04, \\ 0 & \text{при} \quad x > 61{,}04. \end{cases}$$

Найдем значения вероятности попадания случайной величины, распределенной по указанному закону с равномерной плотностью, в интервалы $(-10, 0)$, $(0, 10)$, $(10, 20)$, ..., $(60, 70)$, $(70, 80)$:

I	$(-10, 0)$	$(0, 10)$	$(10, 20)$	$(20, 30)$	$(30, 40)$	$(40, 50)$	$(50, 60)$	$(60, 70)$	$(70, 80)$
P	0	0,14	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,01	0

Следует отметить, что $P(0 < X < 10) = P(1{,}46 < X < 10) = (10 - 1{,}46) \cdot 0{,}017 = 0{,}14$; $P(60 < X < 70) = P(60 < X < 61{,}04) = 0{,}01$. Приведем расчетную таблицу для вычисления χ^2:

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,14	0,14	0	0	0
0,17	0,17	0	0	0
0,19	0,17	0,02	0,0004	0,0023
0,13	0,17	—0,04	0,0016	0,0094
0,17	0,17	0	0	0
0,2	0,17	0,03	0,0009	0,0052
0	0,01	—0,01	0,0001	0,01
				0,0269

Следовательно, $\chi^2=80\cdot 0{,}0269=2{,}152$; $l=7$, $t=3$, $r=4$. При $r=4$ из табл. V находим: если $\chi^2=2$, то $p=0{,}7358$; если $\chi^2=3$, то $p=0{,}5578$; если $\chi^2=2{,}152$, то $p=0{,}7358-0{,}152\cdot 0{,}178=0{,}7358-0{,}0271=0{,}7087$.

Итак, можно считать, что заданное статистическое распределение полностью согласуется с законом распределения, имеющим равномерную плотность. ▲

967. Дано статистическое распределение

I	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)	(25, 30)	(30, 35)	(35, 40)	(40, 45)	(45, 50)
n_x	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

Выяснить, согласуется ли это распределение с теоретическим, имеющим равномерную плотность.

△ Здесь $n=70$. Составим таблицу

X	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
W	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

Далее, находим

$$M(X)=\sum_{i=1}^{10} w_i x_i=2{,}5\,(0{,}029+3\cdot 0{,}171+5\cdot 0{,}114+7\cdot 0{,}057+9\cdot 0{,}2+11\times$$
$$\times 0{,}086+13\cdot 0{,}14+15\cdot 0{,}029+17\cdot 0{,}014+19\cdot 0{,}157)=24{,}4285;$$

$$M(X^2)=2{,}5^2\,(0{,}029+9\cdot 0{,}171+25\cdot 0{,}114+49\cdot 0{,}057+81\cdot 0{,}2+121\cdot 0{,}086+$$
$$+169\cdot 0{,}143+225\cdot 0{,}029+289\cdot 0{,}014+361\cdot 0{,}157)=782{,}67;$$

$$D(X)=782{,}67-596{,}75=185{,}92;\ \sigma(X)=\sqrt{185{,}92}=13{,}63.$$

Составим и решим систему для определения a и b:

$$\begin{cases}(a+b)/2=24{,}43,\\ (b-a)/(2\sqrt{3})=13{,}63\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=48{,}86,\\ b-a=47{,}16\end{cases} \Leftrightarrow (b=48{,}01;\ a=0{,}85);$$

$1/(b-a)=1/47{,}16=0{,}0212.$

Итак,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0{,}85, \\ 0{,}0212 & \text{при} \quad 0{,}85 \leqslant x \leqslant 48{,}01, \\ 0 & \text{при} \quad x>48{,}01. \end{cases}$$

Теперь найдем вероятности попадания случайной величины, распределенной по указанному закону, в интервалы **(0, 5), (5, 10), (10, 15), ..., (45, 50)**:

I	(−5, 0)	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)
P	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106
I	(25, 30)	(30, 35)	(35, 40)	(40, 45)	(45, 50)	(50, 55)
P	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

Отметим, что

$$P(0<X<5)=P(0{,}85<X<5)=4{,}15\cdot 0{,}0212=0{,}088;$$
$$P(45<X<50)=P(45<X<48{,}01)=3{,}01\cdot 0{,}0212=0{,}064.$$

Расчетная таблица для вычисления χ^2 имеет вид

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,029	0,088	−0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	−0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	−0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	−0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	−0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	0,093	0,009	0,141
				0,515

Итак, $\chi^2=70\cdot 0{,}515=36{,}05$; $l=10$, $t=3$, $r=7$. При значении $r=7$ для $\chi^2=30$ из табл. V находим $p=0{,}0001$. Так как при постоянном значении r с увеличением χ^2 вероятность P уменьшается, то для $\chi^2=36{,}05$ вероятность $P<0{,}0001$. Значит, в данном случае теория плохо воспроизводит опыт.

Тот же вывод можно сделать, используя критерий Романовского. Действительно, находим

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|36{,}05-7|}{\sqrt{14}}=\frac{29{,}05}{3{,}742}\approx 7{,}763>3.$$

Итак, гипотезу о том, что заданное статистическое распределение является распределением с равномерной плотностью, следует считать неправдоподобной. ▲

968. Применить критерии Пирсона и Романовского для установления правдоподобности гипотезы о нормальном распределении случайной величины в задаче 963.

△ Расчетная таблица имеет вид

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	—0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,02
0,2	0,20	0,00	0,0000	0,00
0,14	0,15	—0,01	0,0001	0,0007
0,1	0,09	0,01	0,0001	0,001
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
				0,0387

Далее, имеем $n\sum_{i=1}^{10}\frac{(w_i-p_i)^2}{p_i}=50\cdot 0{,}0387=1{,}935$; $l=10$, $t=3$, $r=10-3=7$. Из табл. V для $r=7$ находим: если $\chi^2=1$, то $P=0{,}9948$; если $\chi^2=2$, то $P=0{,}9598$. Следовательно, при $\chi^2=1{,}935$ получим промежуточное значение P. Это значение можно найти, применив способ интерполирования. При $\chi^2=1$ и $\chi^2=2$ значения P отличаются на величину $0{,}9948-0{,}9598=0{,}035$. С увеличением χ^2 вероятность P уменьшается, поэтому при $\chi^2=1{,}935$ имеем

$$P=0{,}9598+0{,}065\cdot 0{,}035=0{,}9621, \quad \text{или иначе} \quad P=0{,}9948-0{,}935\cdot 0{,}035=0{,}9621.$$

Полученная вероятность больше, чем 0,1. Согласно критерию Пирсона, это дает основание считать, что нормальный закон достаточно удовлетворительно воспроизводит заданное статистическое распределение.

Согласно критерию Романовского, имеем

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|1{,}935-7|}{\sqrt{14}}=\frac{5{,}065}{3{,}742}\approx 1{,}354<3.$$

Таким образом, расхождение между данным статистическим распределением и выравнивающим его теоретическим распределением можно считать случайным. ▲

969. Произвести выравнивание с помощью нормального закона распределения данных статистической таблицы:

I	(4,1; 4,2)	(4,2; 4,3)	(4,3; 4,4)	(4,4; 4,5)	(4,5; 4,6)	(4,6; 4,7)	(4,7; 4,8)	(4,8; 4,9)	(4,9; 5)
n_x	1	2	3	4	5	8	8	9	10

Продолжение табл.

I	(5,0; 5,1)	(5,1; 5,2)	(5,2; 5,3)	(5,3; 5,4)	(5,4; 5,5)	(5,5; 5,6)	(5,6; (5,7;	5,7) 5,8)	(5,8; 5,9)
n_x	10	9	9	7	5	4	3	2	1

Проверить согласованность статистического и теоретического распределений по критериям Пирсона и Романовского.

△ Здесь $n=100$. В дальнейшем будем предполагать, что значения случайной величины совпадают со средними арифметическими значениями границ интервалов:

X	4,15	4,25	4,35	4,45	4,55	4,65	4,75	4,85	4,95
W	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,08	0,08	0,09	0,1

X	5,05	5,15	5,25	5,35	5,45	5,55	5,65	5,75	5,85
W	0,1	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01

Так как значения случайной величины близки к 5, то составим таблицу:

$x-5$	W	$(X-5)W$	$(X-5)^2W$
—0,85	0,01	—0,0085	0,0072
—0,75	0,02	—0,0150	0,0113
—0,65	0,03	—0,0195	0,0127
—0,55	0,04	—0,0220	0,0121
—0,45	0,05	—0,0225	0,0101
—0,35	0,08	—0,0280	0,0098
—0,25	0,08	—0,0200	0,0050
—0,15	0,09	—0,0135	0,0020
—0,05	0,1	—0,0500	0,0003
0,05	0,1	0,0500	0,0003
0,15	0,09	0,0135	0,0020
0,25	0,09	0,0225	0,0056
0,35	0,07	0,0245	0,0086
0,45	0,05	0,0225	0,0101
0,55	0,04	0,0220	0,0121
0,65	0,03	0,0195	0,0127
0,75	0,02	0,0150	0,0113
0,85	0,01	0,0085	0,0072
		—0,001	0,1404

Следовательно,

$$M(X-5)=-0{,}001;\quad M[(X-5)^2]=0{,}1404;\quad M(X)=5+M(X-5)=4{,}999;$$

$$D(X)=M[(X-5)^2]-[M(X-5)]^2=0{,}1404;\quad \sigma(X)=\sqrt{0{,}1404}=0{,}3747\approx 0{,}375.$$

Плотность распределения случайной величины X определяются равенством

$$f(x)=\frac{1}{0{,}375\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-(x-5)^2/(2\cdot 0{,}375^2)}, \qquad (*)$$

или

$$f(x)=2{,}67\cdot z_u, \text{ где } u=(x-5)/0{,}375\approx 2{,}67\,(x-5).$$

Определим вероятности попадания случайной величины, распределенной по указанному нормальному закону, в интервалы]4,1; 4,2[,]4,2; 4,3[, ...,]5,8, 5,9[и проверим согласованность статистического и теоретического распределений по критериям Пирсона и Романовского. Составим следующие таблицы:

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
4,15	−2,27	0,03	0,08	0,01
4,25	−2,00	0,05	0,13	0,02
4,35	−1,74	0,09	0,24	0,02
4,45	−1,47	0,13	0,35	0,04
4,55	−1,20	0,19	0,51	0,05
4,65	−0,93	0,25	0,67	0,07
4,75	−0,66	0,32	0,85	0,09
4,85	−0,40	0,37	0,99	0,10
4,95	−0,13	0,39	1,04	0,10
5,05	0,13	0,39	1,04	0,10
5,15	0,40	0,37	0,99	0,10
5,25	0,66	0,32	0,85	0,09
5,35	0,93	0,25	0,67	0,07
5,45	1,20	0,19	0,51	0,05
5,55	1,47	0,13	0,35	0,04
5,65	1,74	0,09	0,24	0,02
5,75	2,00	0,05	0,13	0,02
5,85	2,27	0,03	0,08	0,01

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-p)^2}{P}$
0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000
0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
0,08	0,07	0,01	0,0001	0,001
0,08	0,09	−0,01	0,0001	0,001
0,09	0,10	−0,01	0,0001	0,001
0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
0,10	0,10	0,00	0,0000	0,000
0,09	0,10	−0,01	0,0001	0,001
0,09	0,09	0,00	0,0000	0,000
0,07	0,07	0,00	0,0000	0,000
0,05	0,05	0,00	0,0000	0,000
0,04	0,04	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
0,02	0,02	0,00	0,0000	0,000
0,01	0,01	0,00	0,0000	0,000
				0,014

Значит, $\chi^2=100\cdot 0{,}014=1{,}4$, $l=18$, $t=3$, $r=18-3=15$. Из табл. V для $r=15$ находим: если $\chi^2=1$, то $P=1{,}000$, если $\chi^2=2$, то $P=1{,}000$. Поэтому при $\chi^2=1{,}4$ искомая вероятность* $P=1{,}000$. Таким образом, согласно критерию Пирсона, гипотеза о том, что статистическое распределение является нормальным распределением с математическим ожиданием, равным 5, и дисперсией, равной 0,14, правдоподобна.

Используем теперь критерий Романовского:

$$\frac{|\chi^2-r|}{\sqrt{2r}}=\frac{|1{,}4-15|}{\sqrt{30}}=\frac{13{,}6}{5{,}477}\approx 2{,}483<3.$$

Это еще раз подтверждает, что заданное статистическое распределение согласуется с нормальным, имеющим плотность, определяемую равенством (*).

970. Проверить гипотезу о том, что статистическое распределение, рассмотренное в задаче 965, согласуется с распределением Шарлье.

---

* Так как в таблице значения приведены с точностью до 0,001, то искомое значение P немного меньше единицы.

△ Расчетная таблица имеет вид

W	P	$W-P$	$(W-P)^2$	$\frac{(W-P)^2}{P}$
0,01	0,01	0	0,0000	0
0,05	0,04	0,01	0,0001	0,003
0,08	0,09	—0,01	0,0001	0,001
0,15	0,18	—0,03	0,0009	0,005
0,28	0,23	0,05	0,0025	0,011
0,21	0,20	0,01	0,0001	0,001
0,10	0,13	—0,03	0,0009	0,007
0,06	0,07	—0,01	0,0001	0,001
0,03	0,03	0,00	0,0000	0,000
0,03	0,02	0,01	0,0001	0,005
				0,034

Следовательно, $\chi^2 = 100 \cdot 0{,}034 = 3{,}4$; $l = 10$, $t = 5$, т. е. $r = 10 - 5 = 5$. Из табл. V для $r = 5$ находим: если $\chi^2 = 3$, то $P = 0{,}7000$; если $\chi^2 = 4$, то $P = 0{,}5494$. Поэтому при $\chi^2 = 3{,}4$ имеем

$$P = 0{,}7000 - 0{,}4 \cdot 0{,}1506 = 0{,}63976 > 0{,}1.$$

Используя критерий Романовского, находим

$$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|3{,}4 - 5|}{\sqrt{10}} = \frac{1{,}6}{3{,}162} \approx 0{,}506 < 3.$$

Таким образом, согласно критериям Пирсона и Романовского, гипотезу о том, что рассмотренное статистическое распределение согласуется с распределением Шарлье, можно считать правдоподобной.

6. Критерий согласия Колмогорова. Пусть дано статистическое распределение

X	x_1	x_2	x_3	...	x_l
W_x	w_1	w_2	w_3	...	w_l

где $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — средние значения соответствующих интервалов случайной величины. В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями в критерии Колмогорова рассматривается максимум значений модуля разности между статистической функцией распределения $F^*(x)$ и соответствующей теоретической (интегральной) функцией распределения $F(x)$.

Интегральная функция распределения, как известно, определяется соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ \sum_{j=1}^{k} p_j & \text{при } x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l-1); \\ 1 & \text{при } x \geqslant x_l, \end{cases}$$

где $p_j = hf(x_j)$ $(j=1, 2, \ldots, l)$, а $f(x)$ — плотность распределения случайной величины X.

Сначала находят величину

$$\lambda = D\sqrt{n}, \tag{1}$$

где $D=\max|F^*(x)-F(x)|$, а n — объем выборки. Затем из равенства

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2} \tag{2}$$

определяют вероятность того, что за счет чисто случайных причин максимальное расхождение между $F^*(x)$ и $F(x)$ окажется не меньше, чем фактически наблюдаемое.

Если вероятность $P(\lambda)$ мала (меньше 0,05), то гипотезу следует отвергнуть, как неправдоподобную; при сравнительно больших значениях $P(\lambda)$ гипотезу можно считать совместимой с опытными данными. ▲

Для нахождения значений $P(\lambda)$ удобно пользоваться таблицей (см. табл. VI на с. 415).

971. Оценить степень согласованности статистического распределения, рассмотренного в задаче 961, с распределением Пуассона.

△ Составим таблицу

X	W	P	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x)-F(x)$
0	0,07	0,08	0,07	0,08	—0,01
1	0,21	0,20	0,28	0,28	0
2	0,26	0,25	0,54	0,53	0,01
3	0,21	0,21	0,75	0,74	0,01
4	0,13	0,13	0,88	0,87	0,01
5	0,07	0,07	0,95	0,94	0,01
6	0,03	0,03	0,98	0,97	0,01
7	0,02	0,01	1	0,98	0,02

Очевидно, что $D=\max|F^*(x)-F(x)|=0{,}02$. Так как $n=100$, то, пользуясь формулой (1), находим $\lambda=0{,}02\cdot\sqrt{100}=0{,}2$. Из табл. VI получим $P(0{,}2)=1{,}00$. Таким образом, рассмотренное статистическое распределение не противоречит теоретическому распределению по закону Пуассона. ▲

972. Пользуясь критерием Колмогорова, установить, согласуется ли с нормальным распределением статистическое распределение

I	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)	(10, 12)	(12, 14)	(14, 16)	(16, 18)	(18, 20)
n_x	10	29	51	58	102	90	81	39	30	10

△ Запишем заданное распределение в виде

X	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
W	0,02	0,06	0,10	0,12	0,20	0,18	0,16	0,08	0,06	0,02

Перейдем к новой переменной T по формуле $X=2T-1$. Составим расчетную таблицу

T	W	WT	WT^2
1	0,02	0,02	0,02
2	0,06	0,12	0,24
3	0,10	0,30	0,90
4	0,12	0,48	1,92
5	0,20	1,00	5,00
6	0,18	1,08	6,48
7	0,16	1,12	7,84
8	0,08	0,64	5,12
9	0,06	0,54	4,86
10	0,02	0,20	2,00
		5,50	34,38

Далее, имеем

$$M(T)=5{,}50,\ M(T^2)=34{,}38,\ D(T)=34{,}38-30{,}25=4{,}13;\ \sigma(T)=\sqrt{4{,}13}=2{,}032;$$
$$M(X)=2M(T)-1=2\cdot 5{,}5-1=10;\ \sigma(X)=2\sigma(T)=2\cdot 2{,}032=4{,}064.$$

Тогда плотность распределения запишется в виде

$$f(x)=\frac{1}{4{,}064\sqrt{2\pi}}e^{-(x-10)^2/(2\cdot 4{,}064^2)}, \tag{*}$$

или, $f(x)=0{,}246\cdot z_u$, где $u=(x-10)/4{,}064$.

Составим две таблицы:

X	U	z_u	$f(x)$	$hf(x)$
1	−2,214	0,035	0,009	0,02
3	−1,722	0,091	0,022	0,04
5	−1,230	0,187	0,046	0,09
7	−0,738	0,303	0,075	0,15
9	−0,246	0,387	0,095	0,19
11	0,246	0,387	0,095	0,19
13	0,738	0,303	0,075	0,15
15	1,230	0,187	0,046	0,09
17	1,722	0,091	0,022	0,04
19	2,214	0,035	0,009	0,02

X	W	$hf(x)$	$F^*(x)$	$F(x)$	$F^*(x)-F(x)$
1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,00
3	0,06	0,04	0,08	0,06	0,02
5	0,10	0,09	0,18	0,15	0,03
7	0,12	0,15	0,30	0,30	0,00
9	0,20	0,19	0,50	0,49	0,01
11	0,18	0,19	0,68	0,68	0,00
13	0,16	0,15	0,84	0,83	0,01
15	0,08	0,09	0,92	0,92	0,00
17	0,06	0,04	0,98	0,96	0,02
19	0,02	0,02	1	0,98	0,02

Из второй таблицы видно, что почти все значения относительных частот близки к соответствующим значениям вероятностей, найденных с помощью плотности распределения, определенной равенством (*). Отсюда сразу следует, что данное статистическое распределение является нормальным. Однако для окончательного решения вопроса о согласованности статистического распределения с нормальным применим критерий Колмогорова.

Как видно из второй таблицы, $D = \max |F^*(x) - F(x)| = 0{,}03$. Поскольку $n = 500$, имеем $\lambda = 0{,}03 \cdot \sqrt{500} \approx 0{,}67$. Из табл. VI находим $P(0{,}65) = 0{,}7920$, $P(0{,}70) = 0{,}7112$. Так как с увеличением λ вероятность $P(\lambda)$ уменьшается, то $0{,}7112 < P(0{,}67) < 0{,}7920$.

Итак, можно утверждать, что верхняя граница абсолютной ошибки приближенного равенства $F^*(x) \approx F(x)$ будет не менее 0,03 для любого значения x. ▲

ГЛАВА VI

ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим некоторые примеры уравнений в частных производных.

973. Найти функцию $z=z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x}=1$.

△ Интегрируя, получим $z=x+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — произвольная функция. Это — общее решение данного дифференциального уравнения. ▲

974. Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$, где $z=z(x, y)$.

△ Дважды интегрируя по y, получаем $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+\varphi(x)$, $z=y^3+y\cdot\varphi(x)+$ $+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функций. ▲

975. Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$.

△ Интегрируя уравнение по x, имеем $\frac{\partial z}{\partial y}=f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y, находим $z=\varphi(x)+\psi(y)$, где $\psi(y)=\int f(y)\,dy$. ▲

976. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$.

977. Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}=0$.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z, \tag{1}$$

где X, Y и Z — функции x, y и z.

Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Пусть решение этой системы определяется равенствами

$$\omega_1(x, y, z)=C_1, \quad \omega_2=(x, y, z)=C_2.$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)]=0.$$

где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

978. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

△ Рассмотрим систему уравнений $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$. Решая уравнение $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, получим $\frac{y}{x}=C_1$; решение уравнения $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ есть $\frac{z}{x}=C_2$. Теперь можно найти общий интеграл заданного уравнения:

$$\Phi(y/x,\ z/x)=0,\ \text{или}\ z/x=\psi(y/x),$$

т. е. $z=x\psi(y/x)$, где ψ — произвольная функция. ▲

979. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

△ Запишем систему уравнений $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{0}$. Воспользовавшись свойством пропорции, представим уравнение $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$ в виде

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy},\ \text{или}\ \frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C,\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C,\ \frac{2y}{x^2-y^2}=C.$$

Последнее равенство можно переписать в виде $\frac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

Второе уравнение системы $dz=0$. Отсюда $z=C_2$.
Общий интеграл имеет вид

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2-y^2},\ z\right)=0,\ \text{или}\ z=\psi\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right).\ ▲$$

980. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$ и проходящую через окружность $x^2+y^2=16$, $z=3$.

△ Решим систему уравнений $\frac{dx}{yz}=\frac{dy}{xz}=-\frac{dz}{2xy}$. Освободившись от знаменателя, имеем

$$x\,dx=y\,dy,\ 2x\,dx=-z\,dz.$$

Интегрируя оба уравнения, получим

$$x^2-y^2=C_1,\ x^2+\frac{z^2}{2}=C_2.$$

Общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\psi(x^2-y^2). \qquad (*)$$

Из семейства поверхностей, определяемых этим уравнением, нужно выделить поверхность, проходящую через окружность $x^2+y^2=16$, $z=3$. Для того чтобы найти функцию ψ, в равенстве (*) положим $x^2=16-y^2$, $z=3$. Тогда получим $16-y^2+9/2=\psi(16-2y^2)$. Пусть $16-2y^2=t$, откуда $y^2=8-t/2$. Следовательно, $\psi(t)=(t+25)/2$, т. е. $\psi(x^2-y^2)=(x^2-y^2+25)/2$. Подставляя найденное выражение в соотношение (*), имеем

$$x^2+\frac{z^2}{2}=\frac{x^2-y^2+25}{2}, \text{ или } x^2+y^2+z^2=25.$$

Итак, искомой поверхностью является сфера. ▲

981. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin x+\frac{\partial z}{\partial y}\sin y=\sin z.$$

982. Найти общий интеграл уравнения $yz\,\frac{\partial z}{\partial x}+xz\,\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

983. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$ и проходящую через параболу $y^2=z$, $x=0$.

§ 2. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \tag{1}$$

где a, b, c — функции x и y.

Говорят, что указанное уравнение в области D принадлежит *гиперболическому типу*, если в этой области $b^2-ac>0$. Если же $b^2-ac=0$, то уравнение принадлежит *параболическому типу*, а если $b^2-ac<0$ — *эллиптическому типу*.

Уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

называется *каноническим уравнением гиперболического типа*; уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

— *каноническим уравнением параболического типа*; уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

— *каноническим уравнением эллиптического типа.*

Дифференциальное уравнение

$$a\,(dy)^2-2b\,dx\,dy+c\,(dx)^2=0$$

называется *уравнением характеристик* уравнения (1).

Для уравнения гиперболического типа уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x, y)=C_1$, $\psi(x, y)=C_2$, т. е. существуют два семейства действительных характеристик. С помощью замены переменных $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ дифференциальное уравнение (1) приводится к каноническому виду.

Для уравнения параболического типа оба семейства характеристик совпадают, т. е. уравнение характеристик дает лишь один интеграл $\varphi(x, y)=C$. В этом случае нужно произвести замену переменных $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — какая-нибудь функция, для которой $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0$. После такой замены уравнение приводится к каноническому виду.

Для уравнения эллиптического типа интегралы уравнения характеристик имеют вид $\varphi(x, y)\pm i\psi(x, y)=C_{1,2}$, где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — действительные функции. С помощью подстановки $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$ уравнение (1) приводится к каноническому виду

984. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

△ Здесь $a=x^2$, $b=0$, $c=-y^2$, $b^2-ac=x^2y^2>0$; следовательно, это — уравнение гиперболического типа.

Составляем уравнение характеристик:

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0, \text{ или } (x\,dy+y\,dx)(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Получаем два дифференциальных уравнения

$$x\,dy+y\,dx=0 \text{ и } x\,dy-y\,dx=0;$$

разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0, \text{ т. е. } \ln y+\ln x=\ln C_1,$$
$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0, \text{ т. е. } \ln y-\ln x=\ln C_2.$$

После потенцирования находим $xy=C_1$ и $y/x=C_2$ — уравнения двух семейств характеристик. Введем новые переменные $\xi=xy$, $\eta=y/x$. Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot y-\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^2};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot x+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{x};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot y\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)y-$$
$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^2}\right)y-$$
$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot y-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{y}{x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{2y}{x^3}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^3};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\,\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=$$
$$=x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot x+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{1}{x}\right)=$$
$$=x^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Подставив в данное дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x^3}\right)-$$
$$-y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0;$$
$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\cdot y^2+2\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{y}{x}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{1}{xy}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

т. е. уравнение приведено к каноническому виду. ▲

985. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\sin^2 x-2y\sin x\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

△ Здесь $a=\sin^2 x$, $b=-y\sin x$, $c=y^2$. Так как $b^2-ac=y^2\sin^2 x-$ $-y^2\sin^2 x=0$, то данное уравнение — параболического типа.

Уравнение характеристик имеет вид

$$\sin^2 x\,(dy)^2+2y\sin x\,dx\,dy+y^2(dx)^2=0,\ \text{или}\ (\sin x\,dy+y\,dx)^2=0.$$

Разделяя в уравнении $\sin x\,dy+y\,dx=0$ переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{\sin x}=0;\quad \ln y+\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\ln C;\quad y\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=C.$$

Произведем замену переменных: $\xi=y\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $\eta=y$ (произвольная функция). Тогда получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}y\sec^2\frac{x}{2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial\xi}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial z}{\partial\eta};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}y^2\sec^4\frac{x}{2}+\frac{1}{2}y\frac{\partial z}{\partial\xi}\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\,\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$
$$=\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}\sec^2\frac{x}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)y\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}\sec^2\frac{x}{2}.$$

Подставляя в данное дифференциальное уравнение выражения для вторых производных, имеем

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}y^2\sec^4\frac{x}{2}\sin^2 x+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial\xi}y\sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x-$$
$$-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)y^2\sec^2\frac{x}{2}\sin x-\frac{\partial z}{\partial\xi}y\sec^2\frac{x}{2}\sin x+$$
$$+y^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\right)=0.$$

Можно легко показать, что члены, содержащие $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$, взаимно уничтожаются, и уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial \xi} y \sec^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\sin^2 x + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - \frac{\partial z}{\partial \xi} y \sec^2\frac{x}{2}\sin x = 0,$$

или

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\sin x.$$

Так как $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\xi}{\eta}$, то $\sin x = \frac{2\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$. Окончательно получаем $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial z}{\partial \xi}$. ▲

986. Привести к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

△ Здесь $a=1$, $b=-1$, $c=2$, $b^2-ac=1<0$, т. е. уравнение эллиптического типа.

Уравнение характеристик имеет вид

$$(dy)^2 + 2dx\,dy + 2(dx)^2 = 0, \text{ или } y'^2 + 2y' + 2 = 0.$$

Отсюда $y' = -1 \pm i$; получаем два семейства мнимых характеристик: $y+x-ix=C_1$ и $y+x+ix=C_2$. Произведя замену переменных $\xi=y+x$, $\eta=x$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Подставив найденные выражения в дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0. \quad ▲$$

Привести к каноническому виду уравнения:

987. $x^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

988. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + 6\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

989. $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

§ 3. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

1. Решение уравнения колебания струны методом характеристик (методом Даламбера). *Струной* называется тонкая нить, которая может свободно изгибаться. Пусть струна находится под действием сильного начального натяжения T_0. Если вывести струну из положения равновесия и подвергнуть действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться (рис. 59).

Ограничимся рассмотрением малых, поперечных и плоских колебаний струны, т. е. таких колебаний, при которых отклонения точек струны от положения покоя малы, в любой момент времени все точки струны находятся в одной и той же плоскости и каждая точка струны колеблется, оставаясь на одном и том же перпендикуляре к прямой, соответствующей состоянию покоя струны.

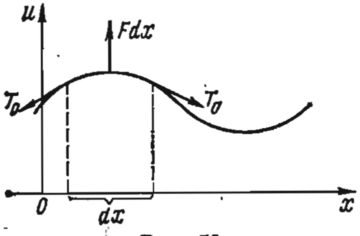

Рис. 59

Принимая эту прямую за ось Ox, обозначим через $u=u(x, t)$ отклонение точек струны от положения равновесия в момент времени t. При каждом фиксированном значении t график функции $u=u(x, t)$ на плоскости xOu дает форму струны в момент времени t.

Функция $u=u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f,$$

где $a^2=T_0/\rho$, $f=F/\rho$, ρ — масса единицы длины (линейная плотность струны), F — сила, действующая на струну перпендикулярно оси абсцисс и рассчитанная на единицу длины.

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $f=0$, то получится *уравнение свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Для полного определения движения струны нужно задать в начальный момент форму и скорость струны, т. е. положение ее точек и их скорость в виде функций абсцисс x этих точек. Пусть $u\,|_{t=0}=\varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$. Эти условия называются *начальными условиями* задачи.

Приведя уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ к каноническому виду, получим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}=0$, где $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. Общее решение последнего уравнения запишется так: $u=\Theta_1(\xi)+\Theta_2(\eta)$, где $\xi=x-at$, $\eta=x+at$, Θ_1, Θ_2 — произвольные функции.

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения свободных колебаний имеет вид

$$y=\Theta_1(x-at)+\Theta_2(x+at).$$

Подобрав функции Θ_1 и Θ_2 так, чтобы функция $u=u(x, t)$ удовлетворяла приведенным начальным условиям, приходим к решению исходного дифференциального уравнения в виде

$$u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz.$$

890. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u\,|_{t=0}=x^2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

△ Так как $a=1$, а $\psi(x)=0$, то $u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}$, где $\varphi(x)=x^2$.

Таким образом,

$$u=\frac{(x-t)^2+(x+t)^2}{2}, \quad \text{или} \quad u=x^2+t^2. \ \blacktriangle$$

991. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ если } u\big|_{t=0}=0, \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=x.$$

$\triangle$ Здесь $a=2$, $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=x$. Отсюда

$$u=\frac{1}{4}\int\limits_{x-2t}^{x+2t} z\,dz=\frac{1}{8}z^2\bigg|_{x-2t}^{x+2t}=\frac{1}{8}[(x+2t)^2-(x-2t)^2], \text{ т. е. } u=xt. \ \blacktriangle$$

992. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t=\frac{\pi}{2a}$, если $u\big|_{t=0}=\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=1$.

$\triangle$ Имеем

$$u=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} dz,$$

т. е.

$$u=\sin x\cos at+\frac{1}{2a}z\bigg|_{x-at}^{x+at}, \text{ или } u=\sin x\cos at+t.$$

Если $t=\pi/(2a)$, то $u=\pi/(2a)$, т. е. струна параллельна оси абсцисс. $\blacktriangle$

993. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0}=x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=-x$.

994. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0}=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\cos x$.

995. Найти форму струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t=\pi$, если $u\big|_{t=0}=\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\cos x$.

2. Решение уравнения колебания струны, закрепленной на концах, методом разделения переменных (методом Фурье). Пусть требуется найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным и граничным (краевым) условиям

$$u(x, 0)=\varphi(x), \ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\psi(x), \ u(0, t)=0, \ u(l, t)=0.$$

Будем искать (не равное тождественно нулю) решение уравнения в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от t, т. е.

$$u(x, t)=X(x)\,T(t).$$

Подставляя это выражение в данное уравнение, имеем

$$X(x)\,T''(t)=a^2X''(x)\,T(t),$$

откуда, разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Это равенство двух отношений, зависящих только от x и только от t, возможно только в случае, если оба отношения равны постоянному числу $-\lambda$ (где $\lambda>0$):

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda, \text{ т. е. } X''(x)+\lambda X(x)=0 \text{ и } T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x,\quad T(t)=C\cos a\sqrt{\lambda}\,t+D\sin a\sqrt{\lambda}\,t,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные, а функция

$$u(x,\ t)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\,x+B\sin\sqrt{\lambda}\,x\right)\left(C\cos a\sqrt{\lambda}\,t+D\sin a\sqrt{\lambda}\,t\right).$$

Постоянные A и B можно найти, используя краевые условия. Так как $T(t)\not\equiv 0$, то $X(0)=0$ и $X(l)=0$. Следовательно,

$$X(0)=A=0,\ X(l)=A\cos\sqrt{\lambda}\,l+B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0,$$

т. е. $A=0$ и $B\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$ и в силу того, что $B\neq 0$, имеем $\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$, откуда $\sqrt{\lambda}=k\pi/l$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. Итак, $X=B\sin\frac{k\pi}{l}x$.

Найденные значения λ называются *собственными значениями* для данной краевой задачи, а функции $X=B\sin\frac{k\pi}{l}x$ — *собственными функциями*.

При найденных значениях λ получаем

$$T(t)=C\cos\frac{ak\pi}{l}t+D\sin\frac{ak\pi}{l}t,$$

$$u_k(x,\ t)=\sin\frac{k\pi}{l}x\left(a_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+b_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\ (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Каждому значению k отвечают свои постоянные C и D, поэтому пишем a_k, b_k, а постоянную B включаем в a_k и b_k. Так как уравнение $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\times\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ линейное и однородное, то сумма решений также является решением, которое можно представить в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+b_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Этот ряд служит решением уравнения, если коэффициенты a_k и b_k таковы, что сходится сам ряд, а также ряды, получающиеся после двукратного дифференцирования по x и по t. При этом решение должно удовлетворять начальным условиям:

$$u(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x).$$

Если функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье в промежутке $(0, l)$ по синусам, то

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx. \quad (1)$$

Из условия $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\psi(x)$ имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ak\pi}{l}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\psi(x).$$

Определяем коэффициенты Фурье этого ряда:

$$\frac{ak\pi}{l}b_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx,$$

откуда

$$b_k=\frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx. \quad (2)$$

Таким образом, решение уравнения колебания струны может быть представлено как сумма бесконечного ряда:

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{ak\pi}{l}t+b_k\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

где a_k и b_k определяются по формулам (1) и (2).

Примечание. Если положить $\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda>0$, то уравнения для определения $X(x)$ и $T(t)$ имели бы вид $X''(x)-\lambda X(x)=0$ и $T''(t)-a^2\lambda T(t)=0$. Общее решение первого из них $X=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ не может удовлетворять граничным условиям.

996. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент форму параболы $u=(4h/l^2)\cdot x(l-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 60).

△ Здесь $\varphi(x)=(4h/l^2)\cdot x(l-x)$, $\psi(x)=0$. Находим коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебания струны:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{8h}{l^3}\int_0^l (lx-x^2)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}dx;\quad b_k=0.$$

Для нахождения коэффициента a_k дважды интегрируем по частям:

$$u_1=lx-x^2,\ dv_1=\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ du_1=(l-2x)\,dx,\ v_1=-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k=-\frac{8h}{l^3}(lx-x^2)\frac{l}{k\pi}\cos\left.\frac{k\pi x}{l}\right|_0^l+\frac{8h}{k\pi l^2}\int_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

т. е.

$$a_k=\frac{8h}{k\pi l^2}\int\limits_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

$$u_2=l-2x,\quad dv_2=\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad du_2=-2dx,\quad v_2=\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l};$$

$$a_k=\frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int\limits_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=$$

$$=-\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l=-\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi-1)=\frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

Подставляя выражения для a_k и b_k в равенство (1), получим

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Если $k=2n$, то $1-(-1)^k=0$, а если $k=2n+1$, то $1-(-1)^k=2$; поэтому окончательно имеем

$$u(x,\ t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}. \ ▲$$

997. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB,

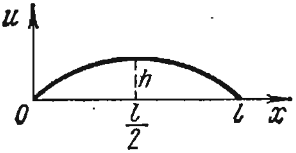

Рис. 60

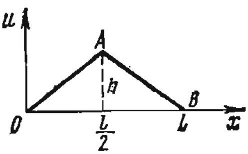

Рис. 61

изображенной на рис. 61. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

△ Угловой коэффициент прямой OA равен $h/(l/2)$, т. е. $2h/l$. Следовательно, уравнение этой прямой есть $u=(2h/l)\,x$. Прямая AB отсекает на осях координат отрезки l и $2h$; значит, уравнение этой прямой имеет вид $x/l+u/(2h)=1$, или $u=(2h/l)(l-x)$. Итак,

$$\varphi(x)=\begin{cases}(2h/l)\,x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant l/2,\\ (2h/l)(l-x) & \text{при } l/2\leqslant x\leqslant l,\end{cases}\quad \psi(x)=0.$$

Находим

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{4h}{l^2}\int\limits_0^{l/2} x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+\frac{4h}{l^2}\int\limits_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$b_k=0.$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_k = -\frac{4h}{k\pi l}\cdot x\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2} + \frac{4h}{k\pi l}\int\limits_0^{l/2}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx -$$

$$-\frac{4h}{k\pi l}(l-x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l} - \frac{4h}{k\pi l}\int\limits_{l/2}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^{l/2} + \frac{2h}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{l/2}^{l} =$$

$$= \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{4h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8h}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x,\ t) = \frac{8h}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\cos\frac{k\pi at}{l}.$$

Выпишем несколько членов ряда:

$$u(x,\ t) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\cos\frac{\pi at}{l} - \frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{3\pi x}{l}\cdot\cos\frac{3\pi at}{l} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5^2}\cdot\sin\frac{5\pi x}{l}\cdot\cos\frac{5\pi at}{l} - \frac{1}{7^2}\cdot\sin\frac{7\pi x}{l}\cdot\cos\frac{7\pi at}{l} + \ldots\right). \ ▲$$

998. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} v_0\ (\text{const}) & \text{при } |x-l/2| < h/2, \\ 0 & \text{при } |x-l/2| > h/2. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

△ Здесь $\varphi(x)=0$, а $\psi(x)=v_0$ в интервале $](l-h)/2,\ (l+h)/2[$ и $\psi(x)=0$ вне этого интервала.

Следовательно, $a_k=0$;

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int\limits_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} v_0\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2v_0}{k\pi a}\cdot\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2} =$$

$$= \frac{2v_0 l}{k^2\pi^2 a}\left[\cos\frac{k\pi(l-h)}{2l} - \cos\frac{k\pi(l+h)}{2l}\right] = \frac{4v_0 l}{k^2\pi^2 a}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2l}.$$

Отсюда

$$u(x,\ t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi h}{2l}\cdot\sin\frac{k\pi at}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

или

$$u(x,\ t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\left(\sin\frac{\pi h}{2l}\cdot\sin\frac{\pi at}{l}\cdot\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2}\cdot\sin\frac{3\pi h}{2l}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\frac{3\pi at}{l}\sin\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cdot\sin\frac{5\pi h}{2l}\cdot\sin\frac{5\pi at}{l}\cdot\sin\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right). \ ▲$$

999. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=3$. В начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, где $O(0;\ 0)$; $A(2;\ -0{,}1)$, $B(3;\ 0)$ (рис. 62). Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

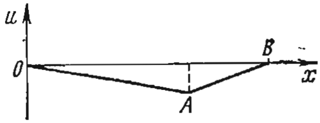

Рис. 62

1000. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=1$, в начальный момент имеет форму $u=h(x^4-2x^3+x)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

1001. Струна закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi(x-l/2)}{h} & \text{при } \left|x-\dfrac{l}{2}\right|<\dfrac{h}{2},\\ 0 & \text{при } \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2}.\end{cases}$$

Найти форму струны для любого момента времени t.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Уравнение теплопроводности для нестационарного случая. Обозначим через $u=u(M,\ t)$ температуру в точке M однородного тела, ограниченного поверхностью S, в момент времени t. Известно, что количество теплоты dQ, поглощаемой телом за время dt, выражается равенством

$$dQ=k\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS\,dt, \tag{1}$$

где dS — элемент поверхности, k — так называемый коэффициент внутренней теплопроводности, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции u по направлению внешней нормали к поверхности S. Так как теплота распространяется в направлении понижения температуры, то $dQ>0$, если $\frac{\partial u}{\partial n}>0$, и $dQ<0$, если $\frac{\partial u}{\partial n}<0$. Из равенства (1) следует, что

$$Q=dt\cdot\iint\limits_S k\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

Вычислим Q другим способом. Выделим элемент dV объема V, ограниченного поверхностью S. Количество теплоты dQ, получаемой элементом dV за время dt, пропорционально повышению температуры в этом элементе и массе самого элемента, т. е.

$$dQ=\gamma\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\,dt\cdot\rho\,dV, \tag{2}$$

где ρ — плотность вещества, γ — коэффициент пропорциональности, называемый теплоемкостью вещества. Из равенства (2) следует, что

$$Q=dt\cdot\iiint\limits_V \gamma\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dV.$$

Таким образом, получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

где $a^2 = \frac{k}{\rho\gamma}$. Учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial n} = |\operatorname{grad} u|$ и $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$, преобразуем полученное равенство к виду

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \iint\limits_S \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,\ x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,\ y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,\ z)\right] dS.$$

Заменив правую часть равенства с помощью формулы Остроградского — Гаусса, имеем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial u}{\partial t}\, dV = a^2 \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dV,$$

или

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right] dV = 0$$

для любого объема V. Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

называемое *уравнением теплопроводности для нестационарного случая.*

Если тело является стержнем, направленным по оси Ox, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Рассмотрим задачу Коши для следующих трех случаев.

1. Случай неограниченного стержня. Ставится задача о нахождении решения $u(x,\ t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t > 0,\quad -\infty < x < +\infty,$$

удовлетворяющего начальному условию $u(x,\ 0) = f(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Применив метод Фурье, получаем решение уравнения в виде

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi - x)^2/(4a^2 t)}\, d\xi$$

— интеграл Пуассона.

2. Случай стержня, ограниченного с одной стороны. Решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,\ 0) = f(x)$ и краевому условию $u(0,\ t) = \varphi(t)$, выражается формулой

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int\limits_0^{\infty} f(\xi)\cdot\left[e^{-(\xi - x)^2/(4a^2 t)}\, e^{-(\xi + x)^2/(4a^2 t)}\right] d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{t} \varphi(\eta)\cdot e^{-x^2/(4a^2(t-\eta))}\,(t-\eta)^{-3/2}\, d\eta.$$

3. Случай стержня, ограниченного с обоих концов $x=0$ и $x=l$. Здесь задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,\ t)|_{t=0}=f(x)$ и двум краевым условиям, например $u_{x=0}=u|_{x=l}=0$ или $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$. В этом случае частное решение ищется в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot e^{-(k\pi a/l)^2\cdot t}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$$

(для краевых условий $u|_{x=0}=u|_{x=l}\equiv 0$), и в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot e^{-(k\pi a/l)^2\cdot t}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+a_0,$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad a_0=\frac{1}{l}\int_1^l f(x)\,dx$$

$\left(\text{для краевых условий } \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}\equiv 0\right)$.

1002. Решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для следующего начального распределения температуры стержня:

$$u(x,\ t)|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} u_0 & \text{при } x_1<x<x_2, \\ 0 & \text{при } x<x_1 \text{ или } x>x_2. \end{cases}$$

△ Стержень является бесконечным, поэтому решение запишется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Так как $f(x)$ в интервале $(x_1,\ x_2)$ равна постоянной температуре u_0, а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{x_1}^{x_2} e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей (см. с. 203):

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Действительно, полагая $x-\xi/(2a\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2a\sqrt{t}\cdot d\mu$, получим

$$u(x, t)=-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu=$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Графиком функции $\Phi(z)$ является кривая, изображенная на рис. 63. ▲

1003. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0}=f(x)=u_0$ и краевому условию $u|_{x=0}=0$.

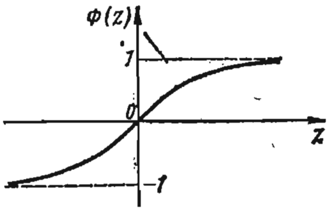

Рис. 63

△ Здесь мы имеем дифференциальное уравнение теплопроводности для полубесконечного стержня. Решение, удовлетворяющее указанным условиям, имеет вид

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} u_0\left[e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}\right]d\xi,$$

или

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty}\left[e^{-(\xi-x)^2/(4t)}-e^{-(\xi+x)^2/(4t)}\right]d\xi.$$

Полагая $x-\xi/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2\sqrt{t}\,d\mu$, преобразуем первый интеграл, пользуясь интегралом вероятностей, т. е.

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} e^{-(\xi-x)^2/(4t)}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\mu^2}d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Полагая $x+\xi/(2\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=2\sqrt{t}\,d\mu$, получим

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{\infty} e^{-(x+\xi)^2/(4t)}d\xi=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x/(2\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-\mu^2}d\mu=\frac{u_0}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

Таким образом, решение принимает вид $u(x, t)=u_0\cdot\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$. ▲

1004. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l)$, $t>0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0<x\leqslant l/2, \\ l-x & \text{при } l/2\leqslant x<l \end{cases}$$

и краевым условиям $u|_{x=0}=u|_{x=l}\equiv 0$.

△ Решение задачи Коши, удовлетворяющее указанным краевым условиям, будем искать в виде

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(k\pi/l)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx+\frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

Проинтегрируем по частям, полагая $u=x$, $dv=\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, $du=dx$ и $v=-\frac{l}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}$; получим

$$b_k=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^{l/2}+$$

$$+\frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}+\frac{lx}{k\pi}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}-\frac{l^2}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\Bigg|_{l/2}^{l}=\frac{4l}{k^2\pi^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}\cdot e^{-k^2\pi^2 t/l^2}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l},$$

или

$$u(x,\ t)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t/l^2}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.\ ▲$$

1005. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,t)|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} 1-x/l & \text{при } 0\leqslant x\leqslant l, \\ 1+x/l & \text{при } -l\leqslant x\leqslant 0, \\ 0 & \text{при } x\geqslant l \text{ и } x\leqslant -l. \end{cases}$$

● Решение выразится формулой

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-l}^{0}\left(1+\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^l\left(1-\frac{\xi}{l}\right)e^{-(x-\xi)^2/(4t)}\,d\xi.$$

Заменой $x-\xi/(2\sqrt{t})=\mu$ упростить ответ.

1006. Найти решение уравнения теплопроводности, если левый конец $x=0$ полубесконечного стержня теплоизолирован, а начальное распределение температуры

$$u|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ u_0 & \text{при } 0<x<l,\\ 0 & \text{при } l<x.\end{cases}$$

1007. Дан тонкий однородный стержень длины l, изолированный от внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x)=cx(l-x)/l^2$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

● Закон распределения температуры стержня описывается уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, начальным условием $u|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$ и краевыми условиями $u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$.

2. Уравнение теплопроводности для стационарного случая. Уравнение теплопроводности для стационарного случая обращается в *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1}$$

так как $\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$. Уравнение Лапласа можно записать в виде $\Delta u=0$. Здесь u есть функция только точки и не зависит от времени.

Для задач, относящихся к плоским фигурам, уравнение Лапласа записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2}$$

Такой же вид имеет уравнение Лапласа и для пространства, если u не зависит от координаты z, т. е. $u(M)$ сохраняет постоянное значение при перемещении точки M по прямой, параллельной оси z. Заменой $x=r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$ уравнение (2) можно преобразовать к полярным координатам:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\Theta+2\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}\sin\Theta\cos\Theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\Theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial\Theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\Theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}r^2\sin^2\Theta-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}r^2\sin\Theta\cos\Theta+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r^2\cos^2\Theta-\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\Theta-\frac{\partial u}{\partial y}r\sin\Theta.$$

Отсюда

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad \text{или}\quad r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}=0.$$

С уравнением Лапласа связано понятие гармонической функции. Функцию называют *гармонической* в области D, если в этой области она непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа. Так, для уравнения (1) функция $u=1/r$, где

$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, является гармонической в любой области исключая точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Для любой плоской области такой функцией служит $u=\ln(1/r)$ (или $u=\ln r$), т. е. эта функция удовлетворяет уравнению (2).

Задача отыскания функции u, гармонической в области D, непрерывной в D, включая и поверхность S, ограничивающую эту область и удовлетворяющей краевому условию $u|_{\text{на } S}=f(M)$, где $f(M)=f(x, y, z)$ — заданная непрерывная на S функция, называется *задачей Дирихле*.

1008. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $u|_{x=0}=u_0$, $u|_{x=l}=u_l$.

△ Задача Дирихле для одномерного случая состоит в нахождении из уравнения Лапласа $\frac{d^2u}{\partial x^2}=0$ функции u, удовлетворяющей краевым условиям $u|_{x=0}=u_0$, $u|_{x=l}=u_l$. Общее решение указанного уравнения есть $u=Ax+B$, а учитывая краевые условия, получим $u=\frac{u_l-u_0}{l}x+u_0$, т. е. стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью линейно. ▲

1009. Найти стационарное распределение теплоты в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью Oz при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура.

● Перейти к цилиндрическим координатам, считая, что u не зависит от Θ и z.

§ 5. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Пусть дан круг радиуса R с центром в полюсе O полярной системы координат. Будем искать функцию $u(r, \Theta)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию $u|_{r=R}=f(\Theta)$, где $f(\Theta)$ — заданная функция, непрерывная на окружности. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа

$$r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\Theta^2}=0. \tag{1}$$

Ограничимся применением метода Фурье при решении этой задачи. Допустим, что частное решение ищется в виде

$$u=Q(r)\cdot T(\Theta).$$

Тогда получим

$$r^2\cdot Q''(r)\cdot T(\Theta)+r\cdot Q'(r)\cdot T(\Theta)+Q(r)\cdot T''(\Theta)=0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{T''(\Theta)}{T(\Theta)}=-\frac{r^2\cdot Q''(r)+r\cdot Q'(r)}{Q(r)}.$$

Приравнивая каждую часть полученного равенства постоянной $-k^2$, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(\Theta)+k^2\cdot T(\Theta)=0,\quad r^2\cdot Q''(r)+r\cdot Q'(r)-k^2\cdot Q(r)=0.$$

Отсюда при $k=0$ имеем

$$T(\Theta)=A+B\Theta, \tag{2}$$
$$Q(r)=C+D\ln r. \tag{3}$$

Если же $k > 0$, то

$$T(\Theta) = A \cos k\Theta + B \sin k\Theta, \tag{4}$$

а решение второго уравнения будем искать в виде $Q(r) = r^m$, что дает $r^2 m(m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$, или $r^m(m^2 - k^2) = 0$, т. е. $m = \pm k$.

Следовательно,

$$Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{5}$$

Заметим, что $u(r, \Theta)$ как функция от Θ есть периодическая функция с периодом 2π, так как для однозначной функции величины $u(r, \Theta)$ и $u(r, \Theta + 2\pi)$ совпадают. Поэтому из равенства (1) следует, что $B = 0$, а в равенстве (4) k может принимать одно из значений 1, 2, 3, ... ($k > 0$). Далее, в равенствах (3) и (5) должно быть $D = 0$, так как в противном случае функция имела бы разрыв в точке $r = 0$ и не была бы гармонической в круге. Итак, мы получили бесчисленное множество частных решений уравнения (1), непрерывных в круге, которые (несколько изменив обозначения) можно записать в виде

$$u_0(r, \Theta) = A_0/2; \quad u_n(r, \Theta) = (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta) r^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Составим теперь функцию

$$u(r, \Theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta) r^n,$$

которая вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа также служит его решением. Остается определить величины A_0, A_n, B_n так, чтобы эта функция удовлетворяла условию $u|_{r=R} = f(\Theta)$, т. е.

$$f(\Theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\Theta + B_n \sin n\Theta) R^n.$$

Здесь мы имеем разложение функции $f(\Theta)$ в ряд Фурье в промежутке $[-\pi, \pi]$. В силу известных формул находим

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\, d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau\, d\tau.$$

Таким образом,

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cdot \cos n(\tau - \Theta) \right] d\tau.$$

Упростим полученный результат. Полагая $r/R = \rho$, $\tau - \Theta = t$, представим выражение в квадратных скобках в виде

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos nt = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\rho e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt + i \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sin nt.$$

Этот ряд сходится при $\rho < 1$ и его сумма равна

$$\frac{1}{1 - \rho e^{it}} = \frac{1}{1 - \rho \cos t - i\rho \sin t} = \frac{1 - \rho \cos t + i\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho\cos t}{1-2\rho\cos t+\rho^2} - \frac{1}{2} = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos t+\rho^2)},$$

или, возвратившись к прежним обозначениям, получим

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Мы получили решение задачи Дирихле для круга. Интеграл, стоящий в правой части, называется *интегралом Пуассона.*

1010. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиуса R, верхняя половина которой поддерживается при температуре 1°, а нижняя — при температуре 0°.

△ Если $-\pi < \tau < 0$, то $f(\tau)=0$, а если $0<\tau<\pi$, то $f(\tau)=1$. Распределение температуры выражается интегралом:

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\tau-\Theta)+r^2}\,d\tau.$$

Пусть точка $(r;\ \Theta)$ расположена в верхнем полукруге, т. е. $0<\Theta<\pi$; тогда $\tau-\Theta$ изменяется от $-\Theta$ до $\pi-\Theta$, и этот интервал длины π не содержит точек $\pm\pi$. Поэтому введем подстановку $\operatorname{tg}\dfrac{\tau-\Theta}{2}=t$, откуда $\cos(\tau-\Theta)=$ $=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\tau=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда получим

$$u(r, \Theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)} \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2+(R+r)^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\cdot t\right)\Bigg|_{-\operatorname{tg}(\Theta/2)}^{\operatorname{ctg}(\Theta/2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{R+r}{R-r}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\Theta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\Theta}{2}\right)}{1-\left(\dfrac{R+r}{R-r}\right)^2} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta},$$

или

$$\operatorname{tg}(u\pi) = -\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}.$$

Так как правая часть отрицательна, то u при $0<\Theta<\pi$ удовлетворяет неравенствам $1/2<u<1$. Для этого случая получаем решение

$$\operatorname{tg}(\pi-u\pi) = \frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}, \text{ или } u = 1-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta} \quad (0<\Theta<\pi).$$

Если же точка расположена в нижнем полукруге, т. е. $\pi < \Theta < 2\pi$, то интервал $(-\Theta, \pi-\Theta)$ изменения $\tau-\Theta$ содержит точку $-\pi$, но не содержит 0, и мы можем сделать подстановку $\operatorname{ctg}\frac{\tau-\Theta}{2}=t$, откуда $\cos(\tau-\Theta)=\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $d\tau=-\frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда для этих значений Θ имеем

$$u(r, \Theta)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\operatorname{ctg}(\Theta/2)}^{\operatorname{tg}(\Theta/2)}\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2+(R-r)^2t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{R-r}{R+r}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}\right)\right].$$

Производя аналогичные преобразования, найдем

$$u=-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R^2-r^2}{2Rr\sin\Theta}\quad(\pi<\Theta<2\pi).$$

Так как правая часть теперь положительна ($\sin\Theta<0$), то $0<u<1/2$. ▲

1011. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $1\leqslant r\leqslant 2$, удовлетворяющее краевым условиям $u|_{r=1}=0$, $u|_{r=2}=y$.

● Ввести полярные координаты.

ГЛАВА VII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть комплексное переменное $z=x+yi$ принимает всевозможные значения из некоторого множества Z. Если каждому значению z из Z можно поставить в соответствие одно или несколько значений другого комплексного переменного $w=u+vi$, то комплексное переменное w называют *функцией z* в области Z и пишут $w=f(z)$.

Функция $w=f(z)$ называется *однозначной*, если каждому значению z из множества Z можно поставить в соответствие только одно значение w. Если

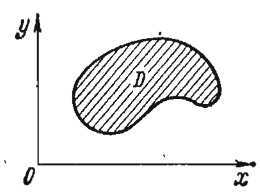

Рис. 64

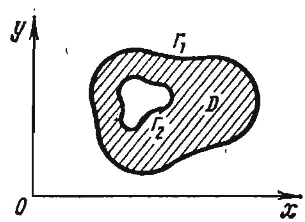

Рис. 65

же существуют значения z, каждому из которых можно поставить в соответствие несколько значений w, то функция $w=f(z)$ называется *многозначной*.

Если $w=u+vi$ есть функция от $z=x+yi$, то каждое из переменных u и v является функцией x и y, т. е. $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$. Обратно, если $w=u(x, y)+v(x, y)i$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — действительные функции x и y, то w можно рассматривать как функцию комплексного переменного $z=x+yi$. Действительно, каждому комплексному числу $z=x+yi$ соответствует определенная пара действительных чисел $(x; y)$, а этой паре чисел соответствует одно или несколько значений w.

Говорят, что однозначная функция $w=f(z)$ при $z \longrightarrow c$ имеет конечный *предел* C (c и C — комплексные числа), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из неравенства $|z-c| < \delta$ следует неравенство $|f(z)-C| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to c} f(z)=C$.

Функция $w=f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется *непрерывной в этой области*.

Рассмотрим область D, ограниченную замкнутой не самопересекающейся линией Γ. Эта область называется *односвязной* (рис. 64).

Если область D ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями Γ_1 и Γ_2, то область D называется *двусвязной* (рис. 65).

Пусть Γ_1 — внешняя линия, а Γ_2 — внутренняя. Область является двусвязной и в том случае, если линия Γ_2 вырождается в точку или в дугу непрерывной линии. Аналогично могут быть определены трехсвязные, четырехсвязные и т. д. области. На рис. 66 изображена четырехсвязная область.

Функции комплексного переменного e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ определяются как суммы следующих рядов, сходящихся во всей плоскости комплексного переменного:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots;$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

Для функций комплексного переменного справедлива *формула Эйлера:*

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Из этой формулы следует, что

$$\operatorname{sh} zi = i \sin z, \ \operatorname{ch} zi = \cos z.$$

Известные из элементарной математики формулы

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \ e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1 - z_2},$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

справедливы и для комплексных значений аргументов z_1 и z_2.

Функции $z^{1/n}$ $(n \in N)$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ определяются как обратные по отношению соответственно к функциям z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z$. При этом функции $z^{1/n}$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$ являются многозначными.

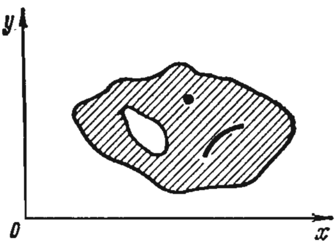

Рис. 66

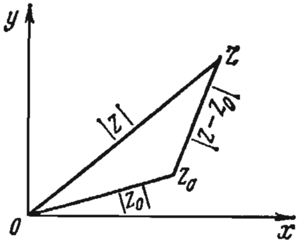

Рис. 67

Можно показать, что

$$\ln z = \ln \rho + (\varphi + 2k\pi) i \quad (k \in Z),$$

где $\rho = |z|$ и $\varphi = \arg z$.

1012. Дана функция $w = z^2 + z$. Найти значения функции при: 1) $z = 1 + i$; 2) $z = 2 - i$; 3) $z = i$; 4) $z = -1$.

△ 1) $w = (1+i)^2 + 1 + i = 1 + 2i - 1 + 1 + i = 1 + 3i$;
2) $w = (2-i)^2 + 2 - i = 4 - 4i - 1 + 2 - i = 5(1-i)$;
3) $w = i^2 + i = -1 + i$;
4) $w = 1 - 1 = 0$. ▲

1013. Дана функция $f(z)=x^2+y^2i$, где $z=x+yi$. Найти: 1) $f(1+2i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(0)$; 4) $f(-i)$.

△ 1) $x=1,\ y=2,\ f(1+2i)=1+4i$;
2) $x=2,\ y=-3,\ f(2-3i)=4+9i$;
3) $x=0,\ y=0,\ f(0)=0+0\cdot i=0$;
4) $x=0,\ y=-1,\ f(-i)=i$. ▲

1014. Показать, что функция $w=|z|$ непрерывна при любом значении z.

△ Так как разность двух сторон треугольника не больше третьей стороны, то $||z|-|z_0||\leqslant|z-z_0|$ (рис. 67). Пусть $0<\delta<\varepsilon$. Тогда из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует неравенство $||z|-|z_0||<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{z\to z_0}|z|=|z_0|$. Таким образом, $|z|$ — непрерывная функция. ▲

1015. Показать, что $w=z^2$ — непрерывная функция при любом значении z.

△ Имеем $z^2-z_0^2=(z-z_0)(z+z_0)$. Если $z\longrightarrow z_0$, то существует такое положительное число M, при котором выполняются неравенства $|z|<M$, $|z_0|<M$. Но

$$|z^2-z_0^2|=|z-z_0|\cdot|z+z_0|<|z-z_0|\cdot(|z|+|z_0|)<2M|z-z_0|.$$

Возьмем $\delta<\varepsilon/(2M)$. Из неравенства $|z-z_0|<\delta$ следует, что

$$|z^2-z_0^2|<2M\delta<2M\cdot\varepsilon/(2M),\ \text{т. е.}\ |z^2-z_0^2|<\varepsilon.$$

Итак, $\lim\limits_{z\to z_0}z^2=z_0^2$, т. е. $w=z^2$ — непрерывная функция. ▲

1016. Найти $\ln(\sqrt{3}+i)$.

△ Имеем $z=\sqrt{3}+i$, $\rho=|z|=2$, $\varphi=\arg z=\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3})=\pi/6$, т. е. $\ln(\sqrt{3}+i)=\ln 2+(\pi/6+2k\pi)i$, $k\in\mathbf{Z}$. ▲

1017. Вычислить $\cos(i/2)$ с точностью до 0,0001.

△ Поскольку

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots,$$

находим

$$\cos\frac{i}{2}=1+\frac{1}{2!\,2^2}+\frac{1}{4!\,2^4}+\frac{1}{6!\,2^6}+\ldots=1{,}1276.\ ▲$$

1018. Дана функция $w=e^z$. Найти ее значение при: 1) $z=\pi i/2$; 2) $z=\pi(1-i)$; 3) $z=1+(\pi/2+2\pi k)i$, где $k\in\mathbf{Z}$.

1019. Дана функция $f(z)=1/(x-yi)$, где $z=x+yi$. Найти $f(1+i)$, $f(i)$, $f(3-2i)$.

1020. Показать, что $w=2z^3$ — непрерывная функция.

1021. Найти $\ln(1-i)$.

1022. Доказать справедливость равенства $\sin i\cdot\operatorname{ch}1=i\cos i\cdot\operatorname{sh}1$.

1023. Решить уравнение $\cos z=2$.

1024. Найти $\arcsin i$.

1025. Вычислить $\sin i$, подсчитав действительную и мнимую части с точностью до 0,0001.

1026. Чему равен $\sin(\pi/6+i)$? Вычислить действительную и мнимую части с точностью до 0,001.

1027. Дана функция $f(z)=e^{e^z}$. Найти ее значения в точках: 1) $z=i$; 2) $z=1+\pi i/2$.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Производной однозначной функции комплексного переменного $w=f(z)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, если Δz любым способом стремится к нулю.

Таким образом,

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную при данном значении z, называется *дифференцируемой* (или *моногенной*) при этом значении z. Если функция $w=f(z)$ однозначна и имеет конечную производную в каждой точке области D, то эта функция называется *аналитической* в области D.

Если функция $w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z=x+yi$, то в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, причем эти производные связаны условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

которые называются *условиями Коши—Римана*.

Условия Коши—Римана являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $w=f(z)$ в точке $z=x+yi$.

Обратно, если частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ непрерывны в точке $z=x+yi$ и условия Коши—Римана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ выполнены, то функция $w=f(z)$ дифференцируема в точке $z=x+yi$.

Производная функции $f(z)$ выражается через частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по формулам

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производные элементарных функций z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ находятся по тем же формулам, что и для действительного аргумента:

$$\begin{aligned}
&(z^n)'=n\cdot z^{n-1}, && (\arcsin z)'=1/\sqrt{1-z^2},\\
&(e^z)'=e^z, && (\arccos z)'=-1/\sqrt{1-z^2},\\
&(\cos z)'=-\sin z, && (\operatorname{arctg} z)'=1/(1+z^2),\\
&(\sin z)'=\cos z, && (\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,\\
&(\ln z)'=1/z, && (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z.
\end{aligned}$$

1028. Дифференцируема ли функция $f(z)=y+xi$?

△ Находим $u=y$, $v=x$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$. Одно из условий Коши — Римана не выполняется. Таким образом, данная функция не является дифференцируемой. ▲

1029. Дифференцируема ли функция $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$?

△ Имеем $u=x^2-y^2$; $v=2xy$; $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2x$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Условия Коши—Римана выполняются. Следовательно, функция дифференцируема. Так как $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, то

$$f'(z)=2x+2yi=2(x+yi)=2z.$$

Производную $f'(z)$ можно найти и иначе:

$$f(z)=(x+yi)^2=z^2,\ f'(z)=2z. ▲$$

1030. Является ли дифференцируемой функция $f(z)=e^x\cos y+$ $+i\cdot e^x\sin y$?

△ Находим $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$; $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$; $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Условия Коши—Римана выполнены. Далее, имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{yi}=e^{x+yi}=e^z,$$

или иначе

$$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{yi}=e^{x+yi}=e^z,\ f'(z)=e^z. ▲$$

1031. Дана действительная часть $u(x,\ y)=x^2-y^2-x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z=x+yi$. Найти функцию $f(z)$.

△ Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1$. Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (в силу одного из условий Коши—Римана), то $\frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$. Интегрируя, находим

$$v(x,\ y)=2xy-y+\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Используем другое условие Коши—Римана: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial v}{\partial x}=$ $=2y+\varphi'(x)$, то $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y-\varphi'(x)$. Но из условия задачи находим, что $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$. Следовательно,

$$-2y-\varphi'(x)=-2y,\ \varphi'(x)=0,\ \varphi(x)=C,$$

откуда

$$f(z)=x^2-y^2-x+i(2xy-y+C)=x^2-y^2+2xyi-(x+yi)+Ci,$$

или

$$f(z)=(x+yi)^2-(x+yi)+Ci,\ \text{т. е. } f(z)=z^2-z+C_1. ▲$$

1032. Дана мнимая часть $v(x,\ y)=x+y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

△ Имеем $\frac{\partial v}{\partial y}=1$; следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}=1$ (согласно условию Коши—Римана). Отсюда

$$u=x+\varphi(y),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y),\ \frac{\partial v}{\partial x}=1.$$

Но $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Следовательно, $\varphi'(y)=-1$. Интегрированием находим, что $\varphi(y)=-y+C$. Отсюда $u=x-y+C$. Итак,

$$f(z)=x-y+C+i(x+y)=(1+i)(x+yi)+C, \text{ т. е. } f(z)=(1+i)z+C. \blacktriangle$$

1033. Является ли дифференцируемой функция $f(z)=(x^2+y^2)-2xyi$?

1034. Показать, что функция $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ дифференцируема и найти ее производную.

1035. Дифференцируема ли функция $f(z)=\sin x \operatorname{ch} y+i\cos x \operatorname{sh} y$? Если это так, то найти ее производную.

1036. Определить действительные функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ так, чтобы функция $f(z)=\varphi(y)+i\psi(x)$ была дифференцируемой.

1037. При каком значении λ функция $f(z)=y+\lambda xi$ дифференцируема?

1038. При каком значении a функция $f(z)=a\bar{z}$ (где $\bar{z}=x-yi$) дифференцируема?

1039. Дана действительная часть $u=2^x\cos(y\ln 2)$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

1040. Дана мнимая часть $v=\sin x \operatorname{sh} y$ дифференцируемой функции $f(z)$. Найти эту функцию.

§ 3. ПОНЯТИЕ О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Пусть дана функция $w=f(z)$, аналитическая в области D. Зададим определенное значение $z=x+yi$. Этому значению z соответствует определенное значение $w=u+vi$. Итак, каждой точке $(x; y)$ на плоскости xOy соответствует определенная точка $(u; v)$ на плоскости uOv.

Если точка $(x; y)$ на плоскости xOy описывает некоторую линию Γ, расположенную в области D, то точка $(u; v)$ на плоскости uOv опишет линию Γ'. Линию Γ' будем называть *отображением* линии Γ на плоскость uOv с помощью аналитической функции $w=f(z)$.

Возьмем на линии Γ точку $z_0=x_0+y_0i$. Этой точке на линии Γ' соответствует точка $w_0=u_0+v_0i$. Проведем к линии Γ касательную L в точке $(x_0; y_0)$, а к линии Γ' — касательную L' в точке $(u_0; v_0)$. Пусть α — угол, на который нужно повернуть прямую L, чтобы ее направление совпало с направлением прямой L' (угол между первоначальным и отображенным направлениями). В теории аналитических функций доказывается, что $\alpha=\arg f'(z_0)$, если $f'(z_0)\neq 0$.

Рассмотрим другую линию γ, которая также проходит через точку $(x_0; y_0)$, и ее отображение — линию γ', проходящую через точку $(u_0; v_0)$. Пусть l — касательная к линии γ в точке $(x_0; y_0)$, а l' — касательная к линии γ' в точке $(u_0; v_0)$.

Для того чтобы направление прямой l совпало с направлением прямой l', нужно и в этом случае прямую l повернуть на угол α, так как угол иоворота равен $f'(z_0)$ [значение производной не зависит от выбора кривой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$; рис. 68].

Если φ и ψ — углы, составленные касательными L и l с осью Ox, а φ' и ψ' — касательными L' и l' с осью Ou, то $\varphi'-\varphi=\alpha$, $\psi'-\psi=\alpha$ и $\varphi'-\varphi=\psi'-\psi$. Следовательно, $\psi-\varphi=\psi'-\varphi'$. Но $\psi-\varphi$ — угол между касательными L и l, а $\psi'-\varphi'$ — между касательными L' и l'. Таким образом, две произвольные линии, пересекающиеся в точке $(x_0; y_0)$, отображаются в две соответствующие линии, пересекающиеся в точке $(u_0; v_0)$, так что угол β между касательными к данным и отображенным линиям один и тот же.

Легко доказывается, что модуль производной в точке $(x_0; y_0)$, т. е. $|f'(z_0)|$, выражает предел отношения расстояний между отображенными точками $w_0+\Delta w_0$ и w_0 и первоначальными точками $z_0+\Delta z_0$ и z_0 (рис. 69).

Рассмотрев другую кривую и ее отображение, приходим к выводу, что $|f'(z_0)|$ выражает предел отношения расстояний между отображенными точками $w_0+\Delta' w_0$ и w_0 и первоначальными точками $z_0+\Delta' z_0$ и z_0.

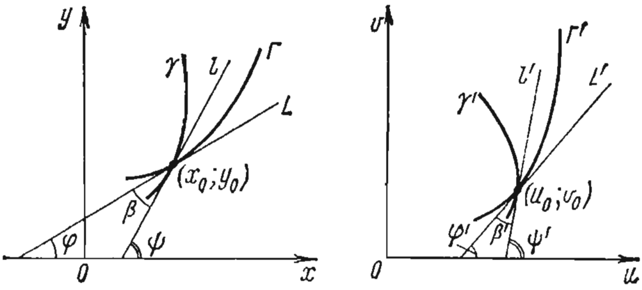

Рис. 68

Таким образом, $|f'(z_0)|$ является величиной искажения масштаба в точке z_0 при отображении с помощью функции $w=f(z)$.

Итак, если бесконечно малый треугольник в плоскости xOy отобразить с помощью функции $w=f(z)$ на плоскость uOv, то получится бесконечно малый криволинейный треугольник, подобный первоначальному вследствие равенства соответствующих углов и пропорциональности сходственных сторон (в пределе).

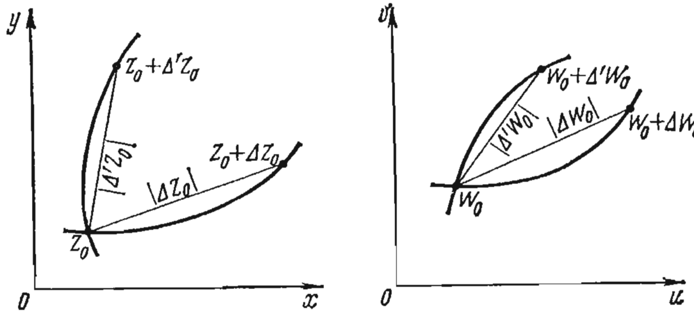

Рис. 69

Отображение с помощью аналитической функции $w=f(z)$ называется *конформным отображением*.

1041. С помощью функции $w=1/z$ отобразить на плоскость uOv точки: 1) (1; 1); 2) (0; —2); 3) (2; 0).

△ 1) Точке (1; 1) соответствует значение $z=1+i$; следовательно,

$$w=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

На плоскости uOv получим точку (1/2; —1/2);
2) $z=-2i$, $w=1/(-2i)=(1/2)i$; получим точку (0; 1/2);
3) $z=2$, $w=1/2$; получим точку (1/2; 0). ▲

1042. С помощью функции $w=z^3$ отобразить на плоскость uOv линию $y=x$.

△ Находим

$$w=(x+yi)^3=x^3+3x^2yi-3xy^2-y^3i=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\,i.$$

Таким образом,

$$u=x^3-3xy^2,\ v=3x^2y-y^3.$$

Из полученных уравнений и уравнения $y=x$ исключим x и y:

$$u=-2x^3,\ v=2x^3,\ \text{т. е. } v=-u.$$

Итак, отображением биссектрисы I и III координатных углов системы xOy является биссектриса II и IV координатных углов системы uOv. ▲

1043. Пусть $w=z^2$ и z описывает квадрат, определяемый неравенствами $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. Какую область описывает w?

△ Имеем

$$w=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi,\quad u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

Найдем отображения вершин квадрата (рис. 70). Если $x=0$, $y=0$, то $u=0$, $v=0$; если $x=0$, $y=1$, то $u=-1$, $v=0$; если $x=1$, $y=0$, то $u=1$, $v=0$; если $x=1$, $y=1$, то $u=0$, $v=2$.

Найдем отображения сторон квадрата.

OB: $y=0$, $u=x^3$, $v=0$, т. е. $v=0$, $u\geqslant 0$ — отрезок OB_1 оси абсцисс Ou.

OA: $x=0$, $u=-y^2$, $v=0$, т. е. $v=0$, $u\leqslant 0$ — отрезок OA_1 оси абсцисс Ou.

AC: $y=1$, $u=x^2-1$, $v=2x$; исключая x, получим $u=v^2/4-1$ — дугу параболы, соединяющую точки $A_1(-1;\ 0)$ и $C_1(0;\ 2)$.

BC: $x=1$, $u=1-y^2$, $v=2y$; исключая y, получим $u=1-v^2/4$ — дугу параболы, соединяющую точки $B_1(1;\ 0)$ и $C_1(0;\ 2)$.

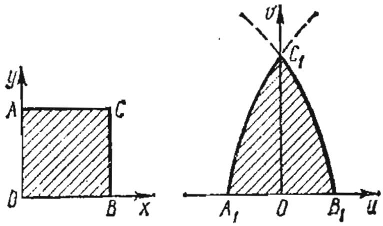

Рис. 70

Итак, отображением квадрата является криволинейный треугольник, ограниченный линиями $v=0$, $u=v^2/4-1$, $u=1-v^2/4$ и расположенный в верхней полуплоскости. ▲

1044. С помощью функции $w=2z+1$ найти отображение окружности $x^2+y^2=1$ на плоскость uOv.

△ Имеем $w=2(x+yi)+1=(2x+1)+2yi$, откуда $u=2x+1$, $v=2y$. Из этих равенств находим $x=(u-1)/2$, $y=v/2$ и, подставляя эти выражения в уравнение окружности, получим $(u-1)^2+v^2=4$. Итак, искомым отображением является окружность, радиус которой равен 2, а центр — точка $O(1;\ 0)$. ▲

1045. Найти угол поворота и коэффициент искажения масштаба в точке $z_0=-2i$ при отображении $w=\dfrac{(z+i)^2}{z-i}$.

△ При отображении с помощью функции $w=f(z)$ угол поворота есть $\alpha=\arg w'(z)$, а коэффициент искажения масштаба в точке z_0 равен $k=|w'(z_0)|$. Находим

$$w'=\frac{2(z+i)(z-i)-(z+i)^2}{(z-i)^2}=\frac{4+(z-i)^2}{(z-i)^2}.$$

В точке $z_0 = -2i$ имеем

$$\alpha = \arg\left[\frac{4+(z_0-i)^2}{(z_0-i)^2}\right] = \arg\left(\frac{5}{9}\right) = 0;\quad k = \left|\frac{4+(z_0-i)^2}{(z_0-i)^2}\right| = \frac{5}{9} < 1 \quad \text{(сжатие).} \ \blacktriangle$$

1046. В каких точках плоскости угол поворота при отображении $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ равен нулю? В каких точках коэффициент искажения масштаба равен 1?

$\triangle$ Прежде всего отметим, что предполагается отыскание таких точек, где заданное отображение конформно, так как только при этом условии можно говорить об угле поворота и коэффициенте искажения масштаба. Находим

$$w' = \frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{-2i}{(z+i)^2}.$$

Так как $w'(z) \neq 0$ ни при одном значении z, кроме $z = -i$, то заданное отображение конформно во всей плоскости с выколотой точкой $z = -i$. При этом отображении угол поворота α в точке z есть

$$\alpha = \arg w'(z) = \arg\left[\frac{-2i}{(z+i)^2}\right] = \arg\frac{-4x(y+1)-2i[x^2-(y+1)^2]}{[x^2+(y+1)^2]^2}.$$

Число $w'(z)$ является действительным, если $\operatorname{Im} w'(z) = 0$, и положительным, если, кроме того, $\operatorname{Re} w'(z) > 0$:

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{Im} w'(z) = 0 & \text{при} & (y+1)^2 = x^2, \\ \operatorname{Re} w'(z) > 0 & \text{при} & x(y+1) < 0. \end{array}\right\}$$

Отсюда $y = -x-1$ $(x \neq 0)$. Итак, угол поворота данного отображения равен нулю в точках прямой $y = -x-1$ (с выколотой точкой $z = -i$).

Коэффициент искажения масштаба в точке z равен $k = |w'(z)|$; по условию он должен быть равен 1. Следовательно, $|w'(z)| = 1$, т. е. $\left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1$, или $|(z+i)^2| = 2$, откуда $|z+i| = \sqrt{2}$. Это — уравнение окружности с центром в точке $z = -i$ и радиусом $\sqrt{2}$. $\blacktriangle$

1047. С помощью функции $w = z^2$ отобразить на плоскость uOv прямые $x = 2$ и $y = 1$.

1048. С помощью функции $w = -z^2$ отобразить на плоскость uOv прямую $x + y = 1$.

1049. С помощью функции $w = iz + 1$ найти отображения осей координат на плоскость uOv.

1050. Разъяснить смысл отображения на плоскость uOv с помощью функции $w = e^{\varphi i} z$, где φ — постоянная величина.

1051. Дана парабола $y = x^2$. Отобразить эту параболу на плоскость uOv с помощью функции $w = z^2$.

1052. Показать, что угол между прямыми $y = 1$ и $y = x - 1$ не изменится при отображении $w = (1+i)z + (1-i)$.

Найти угол поворота и коэффициент искажения масштаба в точке z_0 при отображении $w = f(z)$:

1053. $w = z^3$, $z_0 = 1 - i$. **1054.** $w = 1/z$, $z_0 = 2i$.

1055. $w = u + iv$, где $u = e^y \cos x$, $v = -e^y \sin x$, $z_0 = i$.

Найти точки плоскости, в которых равен 1 коэффициент искажения масштаба при отображении:

1056. $w=z^2$. **1057.** $w=z^2-2z$.

Найти точки плоскости, в которых равен нулю угол поворота при отображении:

1058. $w=z^3$. **1059.** $w=iz^2$.

§ 4. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Кривая Г, как известно, называется *гладкой*, если она имеет непрерывно изменяющуюся касательную.

Кривая называется *кусочно-гладкой*, если она состоит из конечного числа гладких дуг.

Дана функция комплексного переменного $w=f(z)$, непрерывная в некоторой области D. Пусть Г — произвольная гладкая кривая, лежащая в области D. Рассмотрим дугу кривой с началом в точке z_0 и концом в точке z. Разделим эту дугу на n частей произвольными точками $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n=z$, расположенными последовательно на линии Г.

Составим сумму

$$S_n=f(z_0)\,\Delta z_0+f(z_1)\,\Delta z_1+\ldots+f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1},$$

где $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$. Пусть λ — наибольшая из величин $|\Delta z_k|$. Если $\lambda \longrightarrow 0$, то $n \longrightarrow \infty$ и сумма S_n стремится к определенному пределу. Этот предел называется *интегралом* функции $f(z)$ по дуге кривой Г, заключенной между точками z_0 и z, т. е.

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\lim_{\lambda\to 0}\,[f(z_0)\,\Delta z_0+f(z_1)\,\Delta z_1+\ldots+f(z_{n-1})\,\Delta z_{n-1}].$$

Если $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, то интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$ сводится к двум криволинейным интегралам от действительных функций по формуле

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_\Gamma u(x, y)\,dx-v(x, y)\,dy+i\int\limits_\Gamma v(x, y)\,dx+u(x, y)\,dy.$$

Пусть Г — кусочно-гладкая линия, состоящая из гладких частей $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ $\ldots, \Gamma_m$; тогда интеграл по этой линии можно определить с помощью равенства

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz=\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz+\ldots+\int\limits_{\Gamma_m} f(z)\,dz.$$

Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то значение интеграла $\int\limits_\Gamma f(z)\,dz$, взятого вдоль произвольной кусочно-гладкой линии Г, принадлежащей области D, не зависит от линии Г, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек этой линии.

Для всякой аналитической функции $f(z)$ в некоторой односвязной области D интеграл $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$, взятый по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру γ, лежащему в области D, равен нулю (теорема Коши).

Рассмотрим выражение $F(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$. Здесь за путь интегрирования принимается произвольная кусочно-гладкая линия Г, лежащая в области D

и соединяющая точки z_0 и z. Функция $f(t)$ предполагается аналитической в области D. Можно легко показать, что $F'(z)=f(z)$. Функция $F(z)$, производная которой равна $f(z)$, называется *первообразной* функцией по отношению к функции $f(z)$. Если известна одна из первообразных $F(z)$, то все другие первообразные содержатся в выражении $F(z)+C$, где C — произвольная постоянная. Это выражение $F(z)+C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(z)$. Так же как и для действительных функций, здесь выполняется равенство

$$\int_{z_0}^{z} f(t)\,dt=\Phi(z)-\Phi(z_0)$$

(формула Ньютона — Лейбница), где $\Phi(z)$ — какая-нибудь первообразная функция по отношению к $f(z)$.

Для нахождения первообразной функции по отношению к аналитической функции $f(z)$ применяются обычные формулы интегрирования.

Рассмотрим $n+1$ замкнутых кусочно-гладких линий $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ таких, что каждая из линий $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ лежит вне остальных и все они расположены внутри γ_0. Множество точек, лежащих одновременно внутри γ_0 и вне $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, представляет собой $(n+1)$-связную область D.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D (включая значения на контурах $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$). В этом случае выполняется равенство

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz+\ldots+\int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

1060. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, где $f(z)=(y+1)-xi$, AB — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A=1$ и $z_B=-i$.

△ Имеем $u=y+1$, $v=-x$. Отсюда

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{AB}(y+1)\,dx+x\,dy-i\int_{AB}x\,dx-(y+1)\,dy=$$

$$=(y+1)\cdot x\Big|_{x=1,\ y=0}^{x=0,\ y=-1}-i\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^0+i\cdot\frac{(y+1)^2}{2}\Big|_0^{-1}=$$

$$=-1+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=-1.$$

Можно поступить и иначе. Легко видеть, что $f(z)=1-iz$ и

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_1^{-i}(1-iz)\,dz=\frac{(1-iz)^2}{-2i}\Big|_1^{-i}=\frac{(1+i^2)^2}{-2i}+\frac{(1-i)^2}{2i}=$$

$$=\frac{1-2i+i^2}{2i}=-1. \ ▲$$

1061. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$, где $f(z)=x^2+y^2i$, AB — отрезок прямой, соединяющий точки $A=1+i$ и $B=2+3i$.

△ Имеем $u=x^2$, $v=y^2$; значит,

$$\int_{AB} f(z)\,dz=\int_{AB} x^2\,dx-y^2\,dy+i\int_{AB} y^2\,dx+x^2\,dy.$$

Первый из интегралов в правой части равенства вычисляется как определенный интеграл:

$$\int_{AB} x^2\,dx - y^2\,dy = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^3 y^2\,dy = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - \frac{y^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{7}{3} - \frac{26}{3} = -\frac{19}{3}.$$

Для вычисления второго интеграла составим уравнение прямой AB:

$$(y-1)/(3-1) = (x-1)/(2-1), \quad \text{т. е. } y = 2x-1.$$

Отсюда $dy = 2dx$ и

$$\int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy = \int_1^2 [(2x-1)^2 + 2x^2]\,dx = \int_1^2 (6x^2 - 4x + 1)\,dx =$$

$$= (2x^3 - 2x^2 + x)\big|_1^2 = 10 - 1 = 9.$$

Итак, $\int\limits_{AB} f(z)\,dz = -19/3 + 9i$. ▲

1062. Вычислить интеграл $\int\limits_i^{1+i} z\,dz$.

△ Подынтегральная функция является аналитической. Используя формулу Ньютона—Лейбница, находим

$$\int_i^{1+i} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_i^{1+i} = \frac{1}{2}[(1+i)^2 - i^2] = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1 + 1) = \frac{1}{2} + i. \ ▲$$

1063. Вычислить $\int\limits_\gamma \bar{z}\,dz$, где γ—замкнутый контур $x = \cos t$, $y = \sin t$.

△ Так как $\bar{z} = x - yi$, $dz = dx + i\,dy$, то

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_\gamma x\,dx + y\,dy + i\int_\gamma x\,dy - y\,dx.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю, как интеграл от полного дифференциала по замкнутому контуру.

При вычислении второго интеграла следует учесть, что $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$. Отсюда $x\,dy - y\,dx = \cos^2 t\,dt + \sin^2 t\,dt = dt$ и окончательно получаем

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \ ▲$$

1064. Вычислить $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-4}$, где γ—эллипс $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$.

△ Подынтегральная функция является аналитической в области, ограниченной этим эллипсом, поэтому $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-4} = 0$. ▲

1065. Вычислить $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)}$, где γ—окружность $|z-(i+1)| = 1$.

△ Уравнение окружности можно записать в виде

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1, \text{ или } x=1+\cos t,\ y=1+\sin t, \text{ или } z=1+i+e^{it}.$$

В области, ограниченной окружностью γ, подынтегральная функция не является аналитической, поскольку в точке $z=1+i$, служащей центром этой окружности, функция обращается в бесконечность.

Так как $dz=i\cdot e^{it}\,dt$, то

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-(1+i)}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}\,dt}{e^{it}}=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i. \ ▲$$

1066. Вычислить $\int_\gamma \frac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}\,dz$, где γ — окружность $|z|=2$.

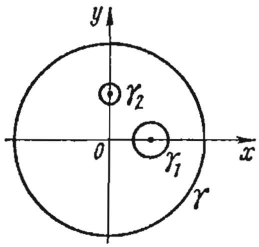

Рис. 71

△ Подынтегральная функция имеет разрывы только в точках $z=1$ и $z=i$. Функция $f(z)$ является аналитической в трехсвязной области, представляющей собой круг с граничной окружностью γ, из которого вырезаны два круга $|z-1|<r$, $|z-i|<r$, где $r>0$ — достаточно малая величина (рис. 71). Следовательно,

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

где γ_1 — окружность $|z-1|=r$, γ_2 — окружность $|z-i|=r$.

Так как

$$f(z)=\frac{z-1+z-i}{(z-1)(z-i)}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-1},$$

то

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-i}+\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-1}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-i}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-1}.$$

Первое и четвертое слагаемые в правой части равны нулю, поскольку подынтегральные функции являются аналитическими в соответствующих областях. Следовательно,

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z-1}+\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z-i}.$$

Окружность γ_1 имеет уравнение $z=1+re^{i\varphi}$, а γ_2 — уравнение $z=i+re^{i\varphi}$. Отсюда

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}}+\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi}}=4\pi i. \ ▲$$

1067. Вычислить интеграл $\int_\Gamma f(z)\,dz$, если $f(z)=y+xi$, Γ — ломаная OAB с вершинами в точках $z_O=0$, $z_A=i$, $z_B=1+i$.

1068. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} z^2\,dz$, где AB — отрезок прямой, соединяющий точки $z_A=1$, $z_B=i$.

1069. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} z^{10}\,dz$, где γ — эллипс $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

1070. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^2}$, где γ — окружность $(x-4)^2+$ $+(y-3)^2=1$.

1071. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z}$, где γ — окружность $z=e^{ti}$.

1072. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{(a+b)\,z-az_1-az_2}{(z-z_1)\,(z-z_2)}\,dz$, где γ — круг $|z|\leqslant R$, а z_1 и z_2 — внутренние точки этого круга, причем $z_1\neq z_2$.

§ 5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Пусть дана функция $f(z)$, аналитическая в некоторой окрестности точки a. Рассмотрим ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\ldots\,.$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$ и внутри своего круга сходимости выражает функцию $f(z)$, т. е. в круге сходимости выполняется равенство

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots\,.$$

Если $a=0$, то последнее равенство записывается в виде

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\ldots\,.$$

В этом случае говорят, что функция $f(z)$ разложена в *ряд Маклорена*.

Рассмотрим теперь два ряда:

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\ldots \qquad (1)$$

и

$$A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots\,. \qquad (2)$$

Область сходимости первого ряда (если она существует) определяется неравенством $|z-a|>r$. Если существует область сходимости второго ряда, то она определяется неравенством $|z-a|<R$. Тогда при условии $r<R$ для ряда

$$\ldots+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+$$
$$+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\ldots,$$

полученного сложением рядов (1) и (2), областью сходимости служит кольцо $r<|z-a|<R$, ограниченное концентрическими окружностями с центром в точке a и радиусами r и R (рис. 72).

Пусть $f(z)$ — однозначная и аналитическая функция в кольце $r < |z-a| < R$. Эта функция в указанном кольце может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \ldots + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} +$$
$$+ A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots .$$

Ряд в правой части равенства называется *рядом Лорана* функции $f(z)$. Коэффициенты этого ряда можно вычислить по формуле

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Ряд (1) называется *главной частью* ряда Лорана, а ряд (2) — *правильной частью* ряда Лорана.

Если ряд Лорана содержит главную часть, то a называется *изолированной особой точкой*. Коэффициент A_{-1} называется *вычетом* функции $f(z)$ относительно изолированной особой точки $z=a$.

Особая точка называется *устранимой*, если функция $f(z)$ — аналитическая в окрестности $z=a$ и ограничена по модулю в этой окрестности, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$. Особая точка называется *полюсом* функции $f(z)$, если $f(z)$ — аналитическая функция вблизи $z=a$ и стремится к бесконечности при $z \to a$.

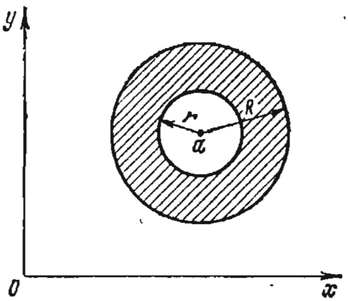

Рис. 72

Особая точка $z=a$ называется *существенно особой*, если при z, близких к a, модуль $|f(z)|$ не остается ограниченным, но функция не стремится к ∞ при $z \to a$, предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не существует.

Изолированная особая точка является:

устранимой, если главная часть разложения в ряд Лорана отсутствует. Например, для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ служит устранимой особой точкой, так как

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots;$$

полюсом n-го порядка, если главная часть содержит конечное число членов, т. е. имеет вид

$$\frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (A_{-n} \neq 0).$$

Например, для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ точка $z=0$ есть полюс первого порядка, так как

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \ldots;$$

существенно особой, если главная часть содержит бесконечное число членов. Например, функция $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z=0$ имеет существенно особую точку, так как

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots .$$

Между нулем и полюсом функции существует следующая связь. Если $z=a$ — нуль кратности k функции $f(z)$, то $z=a$ — полюс того же порядка функции $1/f(z)$; обратно, если $z=b$ — полюс порядка k функции $f(z)$, то $z=b$ — нуль той же кратности функции $1/f(z)$.

Следует заметить, что если $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c\neq 0$, то $z=a$ — полюс k-го порядка функции $f(z)$.

1073. Разложить в ряд Тейлора по степеням бинома $z-i$ функцию $f(z)=z^5$.

△ Находим производные функции $f(z)=z^5$: $f'(z)=5z^4$, $f''(z)=20z^3$, $f'''(z)=60z^2$, $f^{IV}(z)=120z$, $f^{V}(z)=120$, $f^{VI}(z)=f^{VII}(z)=\ldots=0$.

Определяем значения производных в точке $a=i$: $f(i)=i$, $f'(i)=5$, $f''(i)=-20i$, $f'''(i)=-60$, $f^{IV}(i)=120i$, $f^{V}(i)=120$.

Отсюда

$$f(z)=i+5(z-i)-10i(z-i)^2-10(z-i)^3+5i(z-i)^4+(z-i)^5.$$

Рядом Тейлора функции $f(z)=z^5$ является многочлен пятой степени. ▲

1074. Разложить в ряд Тейлора по степеням двучлена $z-(1-\pi i/2)$ функцию $f(z)=\operatorname{ch}(1-z)$.

△ Находим

$$\begin{aligned}
&f(z)=\operatorname{ch}(1-z), && f(a)=\operatorname{ch}(\pi i/2)=\cos(\pi/2)=0,\\
&f'(z)=-\operatorname{sh}(1-z), && f'(a)=-\operatorname{sh}(\pi i/2)=-i\sin(\pi/2)=-i,\\
&f''(z)=\operatorname{ch}(1-z), && f''(a)=0,\\
&f'''(z)=-\operatorname{sh}(1-z), && f'''(a)=-i.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(z)=-i\left[\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)+\frac{1}{3!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^3+\frac{1}{5!}\left(z-1+\frac{\pi}{2}i\right)^5+\ldots\right]. \ ▲$$

1075. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{1}{2^3(z-1)^3}+\frac{1}{2^2(z-1)^2}+\frac{1}{2(z-1)}+$$
$$+1+\frac{z-1}{5}+\frac{(z-1)^2}{5^2}+\frac{(z-1)^3}{5^3}+\ldots.$$

△ Рассмотрим два ряда

$$\frac{1}{2(z-1)}+\frac{1}{2^2(z-1)^2}+\frac{1}{2^3(z-1)^3}+\ldots, \qquad \text{(а)}$$

$$1+\frac{z-1}{5}+\frac{(z-1)^2}{5^2}+\frac{(z-1)^3}{5^3}+\ldots. \qquad \text{(б)}$$

Если в ряде (а) положить $z-1=1/z'$, то получаем степенной ряд

$$\frac{z'}{2}+\frac{z'^2}{2^2}+\frac{z'^3}{2^3}+\ldots. \qquad \text{(в)}$$

Радиус сходимости последнего ряда найдем по признаку Даламбера:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1/2^{n-1}}{1/2^n}=2.$$

Итак, степенной ряд (в) сходится, если $|z'|<2$. Следовательно, ряд (а) сходится, если $|1/(z-1)|<2$. Отсюда получаем $|z-1|>1/2$. Значит, ряд (а) сходится вне круга радиуса $r=1/2$ с центром в точке $z=1$. Находим радиус сходимости ряда (б):

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1/5^{n-1}}{1/5^n}=5.$$

Таким образом, область сходимости ряда (б) определяется неравенством $|z-1|<5$.

Из сказанного заключаем, что областью сходимости заданного ряда является кольцо $1/2<|z-1|<5$.

Решение этой задачи можно упростить. Ряды (а) и (б) являются геометрическими прогрессиями соответственно со знаменателями $\dfrac{1}{2(z-1)}$ и $\dfrac{z-1}{5}$. Они сходятся, если $\left|\dfrac{1}{2(z-1)}\right|<1$ и $\left|\dfrac{z-1}{5}\right|<1$. Следовательно, $|z-1|>1/2$ и $|z-1|<5$. Итак, область сходимости — кольцо, определяемое двойным неравенством $1/2<|z-1|<5$. ▲

1076. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{(3+4i)^3}{z^3}+\frac{(3+4i)^2}{z^2}+\frac{3+4i}{z}+1+\frac{z}{i}+\frac{z^2}{i^2}+\frac{z^3}{i^3}+\ldots.$$

△ Рассмотрим два ряда

$$\frac{3+4i}{z}+\frac{(3+4i)^2}{z^2}+\frac{(3+4i)^3}{z^3}+\ldots, \tag{а}$$

$$1+\frac{z}{i}+\frac{z^2}{i^2}+\frac{z^3}{i^3}+\ldots. \tag{б}$$

Ряды (а) и (б) — геометрические прогрессии со знаменателями $(3+4i)/z$ и z/i. Они сходятся, если $|(3+4i)/z|<1$ и $|z/i|<1$. Так как $|3+4i|=\sqrt{9+16}=5$, $|i|=1$, то $5/|z|<1$ и $|z|<1$, или $|z|>5$ и $|z|<1$. Но эти неравенства несовместны, следовательно, данный ряд не сходится ни в одной точке плоскости. ▲

1077. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=1/(2z-5)$ в окрестности точки $z=0$.

△ Представим данную функцию в виде

$$f(z)=\frac{-1/5}{1-2z/5}.$$

В окрестности точки $z=0$ выполняется неравенство $|2z/5|<1$, поэтому дробь $\dfrac{-1/5}{1-2z/5}$ можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a=-1/5$ и знаменателем $q=2z/5$. Отсюда получаем

$$f(z)=-\frac{1}{5}-\frac{2z}{5^2}-\frac{2^2z^2}{5^3}-\frac{2^3z^3}{5^4}-\ldots,\text{ или } f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}.$$

Это разложение содержит только правильную часть. Из неравенства $|2z/5|<1$ заключаем, что областью сходимости ряда является круг $|z|<5/2$. ▲

1078. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=1/(2z-5)$ в окрестности точки $z=\infty$.

△ Имеем

$$f(z)=\frac{1}{2z-5}=\frac{1/(2z)}{1-5/2z}.$$

В окрестности точки $z=\infty$ выполняется неравенство $|5/(2z)|<1$, поэтому $f(z)$ можно представить в виде суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a=1/(2z)$ и знаменателем $q=5/(2z)$. Следовательно,

$$f(z)=\frac{1}{2z}+\frac{5^2}{2^2z^2}+\frac{5^3}{2^3z^3}+\frac{5^3}{2^4z^4}+\ldots,\ \text{или}\ f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{2^nz^n}.$$

В разложении нет правильной части. Ряд сходится в области $|z|>5/2$ (вне круга). ▲

1079. Разложить по степеням z в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ в кольце $1<|z|<3$.

△ Разложим данную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-3},\ \text{или}\ 1=A(z-3)+B(z-1).$$

Полагая $z=1$, получаем $1=-2A$, т. е. $A=-1/2$; полагая $z=3$, имеем $1=2B$, т. е. $B=1/2$. Таким образом,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}.$$

Учитывая, что $1<|z|<3$, можем записать

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/z}{1-1/z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1-z/3}.$$

Следовательно,

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{3^n}\right).\ ▲$$

1080. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}$ по степеням $z-2$.

△ Положим $z-2=z'$. Тогда

$$f(z)=\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(z'+2)^4}{z'^2}=\frac{z'^4+8z'^3+24z'^2+32z'+16}{z'^2}=$$

$$=\frac{16}{z'^2}+\frac{32}{z'}+24+8z'+z'^2,$$

т. е.

$$f(z)=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+(z-2)^2.$$

Здесь главная часть содержит два члена, а правильная — три члена. Так как разложение содержит конечное число членов, то оно справедливо для любой точки плоскости, кроме $z=2$. Эта точка является полюсом второго порядка функции $f(z)$. Вычетом этой функции относительно полюса $z=2$ является коэффициент при $(z-2)^{-1}$, т. е. 32. ▲

1081. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots.$$

1082. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots+\frac{4}{z^4}+\frac{3}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}+1+2z+(2z)^2+(2z)^3+\ldots.$$

1083. Разложить в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z)=\frac{z^2}{z-1}$ в окрестности точки: 1) $z=0$; 2) $z=\infty$.

1084. Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} z-z}{z^5} & \text{при } z\neq 0;\\ \infty & \text{при } z=0.\end{cases}$$

1085. Найти полюсы функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}$.

1086. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z-1$ функцию $f(z)=1/z$. Найти область сходимости ряда.

1087. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos z}{z^2} & \text{при } z\neq 0,\\ 1/2 & \text{при } z=0.\end{cases}$$

1088. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=2^z+2^{1/z}-2$, определенную во всей плоскости, кроме точки $z=0$.

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ ФУНКЦИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть a — полюс n-го порядка функции $f(z)$. Вычет функции $f(z)$ относительно ее полюса n-го порядка вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n\cdot f(z)]}{dz^{n-1}}$$

(residue — вычет).

Если a — полюс первого порядка (простой полюс) функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ регулярны в окрестности точки $z=a$, $\varphi(a)\neq 0$ и $\psi(z)$ в точке $z=a$ имеет нуль первого порядка. Тогда при вычислении вычета функции $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$ в простом полюсе $z=a$ удобно пользоваться формулой

$$\operatorname*{res}_a f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в замкнутой области D, кроме конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (полюсов или существенно особых точек). Тогда интеграл от функции по контуру γ, содержащему внутри себя эти точки и целиком лежащему в области D, равен произведению

$2\pi i$ на сумму вычетов в указанных особых точках, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{a_j} f(z)$$

(основная теорема о вычетах).

Рассмотрим частный случай. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области D, число a принадлежит области D и $f(a)\neq 0$. В этом случае функция $F(z)=\frac{f(z)}{z-a}$ имеет в области D полюс a первого порядка. Найдем вычет функции $F(z)$ относительно полюса a:

$$\operatorname*{res}_{a} F(z) = \lim_{z\to a}(z-a)\cdot F(z) = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Отсюда, применив основную теорему о вычетах, получаем

$$\int\limits_{\gamma} F(z)\,dz = 2\pi i f(a),$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a).$$

Мы получили весьма важную формулу в теории функций комплексного переменного — *формулу Коши.*

Необходимо, однако, отметить, что вывод формулы Коши должен предшествовать доказательству основной теоремы о вычетах. Здесь мы воспользовались случаем для того, чтобы познакомиться с этой важной формулой.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости, включая действительную ось, за исключением конечного числа полюсов a_k ($k=1, 2, \ldots, m$), расположенных над действительной осью. Кроме того, предполагается, что произведение $z^2 f(z)$ при $|z|\to+\infty$ имеет конечный предел. В этом случае для вычисления определенного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ функции действительного переменного применяется формула

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\,(r_1 + r_2 + \ldots + r_m),$$

где r_k ($k=1, 2, \ldots, m$) — вычет функции $f(z)$ относительно полюса a_k.

1089. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$.

△ Простыми полюсами функции являются точки $z=1$ и $z=3$:

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{z-3} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{2}. \ ▲$$

1090. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$.

△ Имеем $f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z+2i)}$. Простыми полюсами функции являются точки $2i$ и $-2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z+2i}=\frac{4}{4i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}(z+2i)\cdot\frac{1}{(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to -2i}\frac{1}{z-2i}=-\frac{1}{4i}=\frac{i}{4}.\ ▲$$

1091. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+5}$.

△ Простыми полюсами функции являются корни знаменателя: $z=1\pm 2i$. Следовательно, $f(z)=\dfrac{1}{(z-1-2i)(z-1+2i)}$. Находим

$$\operatorname*{res}_{1+2i} f(z)=\lim_{z\to 1+2i}\frac{z-1-2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1+2i}\frac{1}{z-1+2i}=-\frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{1-2i} f(z)=\lim_{z\to 1-2i}\frac{z-1+2i}{(z-1-2i)(z-1+2i)}=\lim_{z\to 1-2i}\frac{1}{z-1-2i}=\frac{i}{4}.\ ▲$$

1092. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

△ Так как $z=2$ — полюс третьего порядка, то

$$\operatorname*{res}_{2} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2\left[\dfrac{z^2}{(z-2)^3}\cdot(z-2)^3\right]}{dz^2}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2(z^2)}{dz^2}=\frac{1}{2!}\cdot 2=1.\ ▲$$

1093. Найти вычет функции $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos z}$ относительно полюса $z=0$.

△ Точка $z=0$ является полюсом второго порядка. Действительно,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{\sin z}=2$$

является конечной величиной. Тогда

$$\operatorname*{res}_{0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{2z(1-\cos z)-z^2\sin z}{(1-\cos z)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{2z\left(\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+\ldots\right)-z^2\left(\dfrac{z}{1!}-\dfrac{z^3}{3!}+\ldots\right)}{\left(\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+\ldots\right)^2}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\dfrac{z^5}{12}}{\left(\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^4}{4!}+\ldots\right)^2}=0.\ ▲$$

1094. Найти $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\,dz$, где γ — замкнутый контур, нутри которого находятся полюсы $z=1$, $z=2$, $z=3$.

$\triangle$ Определим вычеты подынтегральной функции:

$$\operatorname*{res}_{1} f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{(z-2)(z-3)} = 1, \quad \operatorname*{res}_{2} f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z+1}{(z-1)(z-3)} = -3,$$

$$\operatorname*{res}_{3} f(z) = \lim_{z \to 3} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} = 2.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz = 2\pi i(1-3+2) = 0.$ ▲

1095. Найти $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z^2+1)(z-2)}$, где γ — окружность $|z| = 3$.

$\triangle$ Имеем $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}$. Полюсы i, $-i$, 2 находятся внутри замкнутого контура γ. Отсюда

$$\operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z^2}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{2i(2-i)},$$

$$\operatorname*{res}_{-i} f(z) = \lim_{z \to -i} (z+i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z^2}{(z-i)(z-2)} = -\frac{1}{2i(2+i)},$$

$$\operatorname*{res}_{2} f(z) = \lim_{z \to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z \to 2} \frac{z^2}{z^2+1} = \frac{4}{5};$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i(2-i)} - \frac{1}{2i(2+i)} + \frac{4}{5} \right] =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i} + \frac{8}{5} i \right) = \pi \left(\frac{2}{5} i + \frac{8}{5} i \right) = 2\pi i. \ ▲$$

1096. Вычислить определенный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

$\triangle$ Функция $\dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ является аналитической в верхней полуплоскости, за исключением полюса $2i$. Кроме того, $\displaystyle\lim_{|z| \to +\infty} z^2 f(z) = \lim_{|z| \to +\infty} \frac{z^2}{(z^2+4)^2} = 0$, т. е. является конечной величиной.

Найдем вычет функции $f(z) = 1/(z^2+4)^2$ относительно полюса второго порядка $2i$:

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-2i)^2}{(z+4)^2} \right] = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+2i)^2} \right] =$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{2}{64i} = -\frac{1}{32} i.$$

Следовательно, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{32} i \right) = \frac{\pi}{16}$. ▲

1097. Найти $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$, если γ — окружность: 1) $z =$ 2) $|z| = 3$; 3) $|z| = 5$.

△ Найдем вычеты подынтегральной функции относительно полюсов $z=0$, $z=-2$, $z=-4$:

$$\operatorname*{res}_{0} f(z)=\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+2)(z+4)}=\frac{1}{8},$$

$$\operatorname*{res}_{-2} f(z)=\lim_{z\to -2}(z+2)f(z)=\lim_{z\to -2}\frac{1}{z(z+4)}=-\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{res}_{-4} f(z)=\lim_{z\to -4}(z+4)f(z)=\lim_{z\to -4}\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{8}.$$

1) Внутри контура γ — окружности $|z|=1$ — находится только полюс $z=0$; тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi i}{4}$.

2) Внутри контура γ — окружности $|z|=3$ — находятся полюсы $z=0$ и $z=-2$; тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{4}$.

3) Внутри контура γ — окружности $|z|=5$ — находятся полюсы $z=0$, $z=-2$, $z=-4$; тогда $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=0$. ▲

1098. Найти вычет функции $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$.

1099. Найти вычеты функции $f(z)=\frac{z^2+1}{z^2-1}$.

1100. Найти вычет функции $f(z)=1/\sin z$ относительно полюса $z=\pi$.

1101. Найти вычет функции $f(z)=(z+1)/z^2$.

1102. Найти интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z^2}{z-a}\,dz$, γ — окружность $|z|=R>|a|$.

1103. Найти интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z}{(z-a)(z-b)}\,dz$, γ — окружность $|z|=R$, $R>|a|$, $R>|b|$, $a\neq b$.

1104. Найти интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2-2z+2}$, γ — окружность, внутри которой содержатся полюсы знаменателя.

1105. Найти интеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{z}{(z-i)(z-3)}\,dz$, γ — окружность $|z|=2$.

1106. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

ГЛАВА VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ

1. Основные определения. Пусть функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1°. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

2°. $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ при $t > 0$, где $M > 0$ и s_0 — некоторые действительные постоянные.

3°. На любом конечном отрезке $[a, b]$ положительной полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е.: а) *ограничена*; б) *либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва* I *рода*; в) *имеет конечное число экстремумов.*

Такие функции в операционном исчислении называются *изображаемыми по Лапласу*, или *оригиналами*.

Пусть $p = \alpha + \beta i$ — комплексный параметр, причем $\operatorname{Re} p = \alpha \geqslant s_1 > s_0$.

При сформулированных условиях интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ сходится и является функцией от p:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \overline{f}(p).$$

Этот интеграл называется *интегралом Лапласа*, а определяемая им функция комплексного аргумента p называется *преобразованием Лапласа* от функции $f(t)$, или *лапласовым изображением* $f(t)$, или просто *изображением* $f(t)$.

Тот факт, что функция $\overline{f}(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают следующими символами:

$$\overline{f}(p) = L\{f(t)\}, \text{ или } \overline{f}(p) \doteq f(t).$$

Уславливаются за значение оригинала $f(t)$ во всякой его точке разрыва I рода t_0 принимать полусумму его предельных значений слева и справа от этой точки:

$$f(t_0) = (1/2)\,[f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)] \text{ при } t_0 \neq 0;$$
$$f(0) = f(+0) \text{ при } t_0 = 0.$$

При соблюдении этого условия соответствие между оригиналами и изображениями обладает следующими свойствами:

это соответствие взаимно однозначно (т. е. всякому оригиналу соответствует единственное изображение и обратно),

любой линейной комбинации конечного множества оригиналов в качестве изображения отвечает соответствующая линейная комбинация их изображений.

Таким образом, если $\overline{f}_k(p) \doteq f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_k \overline{f}_k(p) \doteq \sum_{k=1}^{k=n} c_k f_k(t).$$

2. Нахождение изображений функций. В таблице и в каждом из приведенных ниже примеров указывается только значение $f(t)$ при $t > 0$ (всегда имеется в виду, что $f(t) = 0$, если $t < 0$).

№	$f(t)$ при $t>0$	$\overline{f}(p)$	№	$f(t)$ при $t>0$	$\overline{f}(p)$
I	1	$\frac{1}{p}$	VI	$e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
II	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	VII	$e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
III	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	VIII	$\frac{t^n}{n!}\cdot e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$
IV	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	IX	$t\cdot\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
V	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	X	$t\cdot\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

1107. Найти изображение функции $f(t)=a^t$.

△ Так как $a=e^{\ln a}$, то $f(t)=e^{t\ln a}$. Применив формулу III, получаем

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{p-\ln a}. \ ▲$$

1108. Найти изображение функции $f(t)=\cos^3 t$.

△ Воспользуемся формулой Эйлера $\cos t=(e^{ti}+e^{-ti})/2$. Тогда

$$\cos^3 t=\left(\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3ti}+3e^{ti}+3e^{-ti}+e^{-3ti})=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{3ti}+e^{-3ti}}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ti}+e^{-ti}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3t+\frac{3}{4}\cos t.$$

Применив формулу IV, получаем

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{p(p^2+7)}{(p^2+1)(p^2+9)}. \ ▲$$

1109. Найти изображение функции $f(t)=\operatorname{sh} bt$.

△ По определению гиперболического синуса имеем $f(t)=(1/2)e^{bt}-(1/2)e^{-bt}$. Следовательно,

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{2(p-b)}-\frac{1}{2(p+b)}=\frac{b}{p^2-b^2}. \ ▲$$

1110. Найти изображение функции $f(t)=\operatorname{sh} at\sin bt$.

△ Так как $\operatorname{sh} at=(e^{at}-e^{-at})/2$, то

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{at}\sin bt-\frac{1}{2}e^{-at}\sin bt.$$

Применим формулу VII:

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{2}\frac{b}{(p-a)^2+b^2}-\frac{1}{2}\frac{b}{(p+a)^2+b^2}=\frac{2pab}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}. \ ▲$$

1111. Найти изображение функции $f(t)=t\operatorname{ch} bt$.

△ Так как

$$f(t)=t\cdot\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}=\frac{1}{2}\,te^{bt}+\frac{1}{2}\,te^{-bt},$$

то, применив формулу VIII при $n=1$, $\alpha=\pm b$, получаем

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{2(p-b)^2}+\frac{1}{2(p+b)^2}=\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}. \ \blacktriangle$$

Найти изображения функций:

1112. $f(t)=\sin^2 t$. **1113.** $f(t)=e^t\cos^2 t$. **1114.** $f(t)=\operatorname{ch} bt$.
1115. $f(t)=\operatorname{sh} at\cos bt$. **1116.** $f(t)=\operatorname{ch} at\sin bt$.
1117. $f(t)=\operatorname{ch} at\cos bt$. **1118.** $f(t)=t\operatorname{sh} bt$.

§ 2. ОТЫСКАНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения (первую и вторую).

Вторая теорема разложения позволяет найти оригинал для изображения, являющегося дробно-рациональной функцией от p, т. е. $\overline{f}(p)=u(p)/v(p)$, где $u(p)$ и $v(p)$ — многочлены от p соответственно степени m и n, причем $m<n$.

Если разложение $v(p)$ на простейшие множители имеет вид

$$v(p)=(p-p_1)^{k_1}/(p-p_2)^{k_2}\ \ldots\ (p-p_r)^{k_r}\qquad (k_1+k_2+\ldots+k_r=n),$$

то, как известно, функцию $\overline{f}(p)$ можно разложить на сумму элементарных дробей вида $\dfrac{A_{j,\,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$, где j принимает все значения от 1 до r, а s — все значения от 1 до k_j. Таким образом,

$$\overline{f}(p)=\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{s=1}^{s=k_j}\frac{A_{j,\,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \tag{1}$$

Все коэффициенты этого разложения можно определить по формуле

$$A_{j,\,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left\{\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[(p-p_j)^{k_j}\cdot\overline{f}(p)\right]\right\}. \tag{2}$$

Вместо этой формулы для определения коэффициентов $A_{j,\,s}$ могут быть использованы элементарные приемы, применяемые в интегральном исчислении при интегрировании рациональных дробей. В частности, это целесообразно делать в тех случаях, когда все комплексные корни знаменателя $v(p)$ простые и попарно сопряженные.

Если все корни $v(p)$ простые, т. е.

$$v(p)=(p-p_1)(p-p_2)\ \ldots\ (p-p_n)\quad (p_j\neq p_k \text{ при } j\neq k),$$

то разложение упрощается:

$$\overline{f}(p)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{A_j}{p-p_j},\quad \text{где } A_j=\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}. \tag{3}$$

При отыскании тем или иным способом разложения $\overline{f}(p)$ на простейшие дроби оригинал $f(t)$ находится по следующим формулам:

а) в случае кратных корней знаменателя $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{s=1}^{s=k_j} A_{j,\,s}\,\frac{t^{k_j-s}}{(k_j-s)!}\cdot e^{p_j t}; \tag{4}$$

б) в случае простых корней знаменателя $v(p)$:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{u(p_j)}{v'(p_j)}\cdot e^{p_j t}. \tag{5}$$

Если изображение искомой функции может быть разложено в степенной ряд по степеням $1/p$, т. е.

$$\overline{f}(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots$$

(причем этот ряд сходится к $\overline{f}(p)$ при $|p|>R$, где $R=\lim\limits_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|\neq\infty$), то оригинал $f(t)$ находится по формуле

$$f(t)=a_0+a_1\cdot\frac{t}{1!}+a_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\cdot\frac{t^n}{n!}+\ldots,$$

причем этот ряд сходится для всех значений t (первая теорема разложения).

1119. Найти оригинал функции $\overline{f}(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.

△ Используем элементарные приемы для разложения этой дроби на сумму таких дробей, оригиналы которых известны:

$$\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{p-1+1}{(p-1)^2+4}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}+\frac{1}{(p-1)^2+4}.$$

По формулам VI и VII таблицы имеем

$$\frac{p-1}{(p-1)^2+4}\doteqdot e^t\cdot\cos 2t;\quad \frac{1}{(p-1)^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}\,e^t\cdot\sin 2t.$$

Поэтому

$$\frac{p}{(p-1)^2+4}\doteqdot e^t\cdot\left\{\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right\}. \ ▲$$

1120. Найти оригинал функции $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$.

△ И в этом примере используем элементарные приемы разложения, известные из интегрального исчисления. Разложим данную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{A}{p-2}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Для определения коэффициентов имеем тождество

$$1\equiv A(p^2+2p+4)+(Bp+C)(p-2).$$

Полагая $p=2$, находим $1=12A$; $A=1/12$. Приравнивая коэффициент при p^2 нулю и свободный член — единице, получим $A+B=0$, $4A-2C=1$. Отсюда $B=-A=-1/12$; $C=2A-1/2=-1/3$. Следовательно,

$$\frac{1}{p^3-8}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{(p+1)+(\sqrt{3})^2}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Таким образом,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Отсюда, используя формулы III, VI, VII таблицы изображений, находим

$$f(t)=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}\left\{\cos t\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sin t\sqrt{3}\right\}. \ \blacktriangle$$

1121. Найти оригинал функции $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$.

△ Разложение $\bar{f}(p)$ на простейшие дроби имеет вид

$$\bar{f}(p)=\frac{A_{1,1}}{(p-1)^3}+\frac{A_{1,2}}{(p-1)^2}+\frac{A_{1,3}}{p-1}+\frac{A_{2,1}}{(p+2)^2}+\frac{A_{2,2}}{p+2}.$$

Находим коэффициенты этого разложения, используя формулу (2):

$$A_{1,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{p}{(p+2)^2}=\frac{1}{9};$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\{(p-1)^3\cdot\bar{f}(p)\}=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left\{\frac{p}{(p+2)^2}\right\}=$$
$$=\lim_{p\to 1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{2p}{(p+2)^3}\right\}=\frac{1}{27};$$

$$A_{1,3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\{(p-1)^3\cdot f(p)\}=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[\frac{p}{(p+2)^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to 1}\left\{-\frac{4}{(p+2)^3}+\frac{6p}{(p+2)^3}\right\}=-\frac{1}{27};$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to -2}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{p}{(p-1)^3}=\frac{2}{27};$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}[(p+2)^2\cdot\bar{f}(p)]=\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p}{(p-1)^3}\right]=$$
$$=\lim_{p\to -2}\left[\frac{1}{(p-1)^3}-\frac{3p}{(p-1)^4}\right]=\frac{1}{27}.$$

Таким образом,

$$\bar{f}(p)=\frac{1}{27}\left\{\frac{3}{(p-1)^3}+\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}+\frac{2}{(p+2)^2}+\frac{1}{p+2}\right\}.$$

Отсюда, используя формулы III и VIII, находим

$$f(t)=\frac{1}{27}\left\{\frac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right\}=$$
$$=\frac{3t^2+2t-2}{54}\cdot e^t+\frac{2t+1}{27}\cdot e^{-2t}. \ \blacktriangle$$

1122. Найти оригинал функции $\bar{f}(p)=\dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$.

△ Поскольку в данном случае все корни знаменателя действительные и простые, лучше всего воспользоваться формулой (5). Имеем

$$u(p)=p+1,\ v(p)=p(p-1)(p-2)(p-3)=p^4-6p^3+11p^2-6p;$$
$$v'(p)=4p^3-18p^2+22p-6.$$

Находим корни $v(p)$: $p_1=0$, $p_2=1$, $p_3=2$, $p_4=3$. Далее, получим

$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)}=\frac{1}{-6}=-\frac{1}{6};\quad \frac{u(p_2)}{v'(p_2)}=\frac{2}{2}=1;$$
$$\frac{u(p_3)}{v'(p_3)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2};\quad \frac{u(p_4)}{v'(p_4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Отсюда по формуле (5) находим

$$f(t)=-\frac{1}{6}+e^t-\frac{3}{2}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{3t}. \blacktriangle$$

1123. Найти оригинал $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p(1+p^4)}$, используя первую теорему разложения.

$\triangle$ Имеем

$$\overline{f}(p)=\frac{1}{p(1+p^4)}=\frac{1}{p^5}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{p^4}}=\frac{1}{p^5}-\frac{1}{p^9}+\frac{1}{p^{13}}-\ldots.$$

Этот ряд сходится при $|p|>1$. Отсюда находим

$$f(t)=\frac{t^4}{4!}-\frac{t^8}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-\frac{t^{16}}{16!}+\ldots. \blacktriangle$$

1124. Найти $f(t)$, если $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)(p^2+4)}$.

● Разложить $\overline{f}(p)$ на простейшие дроби.

Найти оригиналы по данным изображениям:

1125. $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$. **1126.** $\overline{f}(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$.

1127. $\overline{f}(p)=\dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

1128. С помощью первой теоремы разложения найти оригинал для функции $\overline{f}(p)=1/(p^k+a^k)$, где k — целое положительное число.

§ 3. СВЕРТКА ФУНКЦИЙ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ И ИНТЕГРАЛА ОТ ОРИГИНАЛА

Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$F(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau.$$

Интеграл, определяющий свертку, не меняет своего значения от перестановки функций f_1 и f_2, поэтому свертка двух функций симметрична относительно свертываемых функций.

Изображение свертки двух оригиналов равно произведению их изображений (теорема свертывания оригиналов): если $\overline{f_1}(p)\risingdotseq f_1(t)$, $\overline{f_2}(p)\risingdotseq f_2(t)$, то

$$\int_0^t f_1(t-\tau)\cdot f_2(\tau)\,d\tau\risingdotseq\overline{f}_1(p)\cdot\overline{f}_2(p).$$

Пусть оригинал $f(t)$ дифференцируем n раз и его производные до n-го порядка в свою очередь являются оригиналами. Тогда справедлива **теорема дифференцирования** оригинала: если $\overline{f}(p) \doteqdot f(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, то

$$f^{(k)}(t) \doteqdot p^k \cdot \overline{f}(p) - \{p^{k-1} \cdot f(0) + p^{k-2} \cdot f'(0) + \ldots + f^{k-1}(0)\}.$$

В частности,

$$f'(t) \doteqdot p \cdot \overline{f}(p) - f(0), \quad f''(t) \doteqdot p^2 \cdot \overline{f}(p) - p \cdot f(0) - f'(0).$$

Для всех оригиналов справедлива **теорема интегрирования**: если $\overline{f}(p) \doteqdot f(t)$, то

$$\frac{\overline{f}(p)}{p} \doteqdot \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда видно, что изображения производной и интеграла получаются из изображения функции $f(t)$ с помощью выполнения над $\overline{f}(p)$ алгебраических операций. Следует также отметить (см. таблицу изображений), что изображения значительной части функций, используемых на практике ($e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$ и т. д.), являются алгебраическими функциями от p.

Это дает возможность многие операции математического анализа (решение дифференциальных и интегральных уравнений и т. п.) свести к выполнению алгебраических действий над изображениями искомых функций.

1129. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $\overline{f}(p) = \dfrac{p}{p^4-1}$.

△ Запишем $\overline{f}(p)$ в виде $\dfrac{p}{p^2-1} \cdot \dfrac{1}{p^2+1}$. В силу того что $\dfrac{p}{p^2-1} \doteqdot \operatorname{ch} t$, $\dfrac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$, по теореме свертывания имеем

$$\frac{p}{p^4-1} \doteqdot \int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) \sin \tau \, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}[\operatorname{sh}(t-\tau) \sin \tau + \operatorname{ch}(t-\tau) \cos \tau]\Big|_0^t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t). \ ▲$$

1130. Найти изображение $y''(t) - y'(t) - y(t)$, если $y(0) = y'(0) = 0$ и $\overline{y}(p) \doteqdot y(t)$.

△ По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$y'(t) \doteqdot p\overline{y}(p) - y(0) = p \cdot \overline{y}(p),$$
$$y''(t) \doteqdot p^2 \cdot \overline{y}(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2 \cdot \overline{y}(p).$$

Отсюда находим

$$y''(t) - y'(t) - y(t) \doteqdot (p^2 - p - 1) \cdot y(p)$$

(сумме функций в качестве изображения соответствует сумма их изображений). ▲

1131. Найти изображение $y'(t) + y(t) + \int_0^t y(\tau)\, d\tau$, если $y(0)=1$ и $\overline{y}(p) \doteqdot y(t)$.

△ По теоремам дифференцирования и интегрирования оригинала имеем

$$y'(t) \risingdotseq p\cdot\bar{y}(p)-y(0)=p\cdot\bar{y}(p)-1, \quad \int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{\bar{y}(p)}{p}.$$

Отсюда находим

$$y'(t)+y(t)+\int_0^t y(\tau)\,d\tau \risingdotseq p\bar{y}(p)-1+\bar{y}(p)+\frac{\bar{y}(p)}{p}=\frac{p^2+p+1}{p}\cdot\bar{y}(p)-1. \ ▲$$

1132. Найти свертку функций t и $\cos t$ и ее изображение.

1133. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал для $\bar{f}(p)=\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.

1134. Найти изображение $F(t)=y(t)-2y'(t)$, если $y(0)=0$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

1135. Найти изображение $F(t)=y'''(t)-y''(t)+2y'(t)-2y(t)$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

1136. Найти изображение $F(t)=y'(t)-\int_0^t y(\tau)\,d\tau$, если $y(0)=0$, $y(t)\risingdotseq\bar{y}(p)$.

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t),$$

правая часть которого $f(t)$ является оригиналом, то и решение этого уравнения, удовлетворяющее произвольным начальным условиям вида $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}$ (т. е. решение задачи Коши, поставленной для этого уравнения, с начальными условиями при $t=0$), служит оригиналом. Обозначая изображение этого решения через $\bar{y}(p)$, находим изображение левой части исходного дифференциального уравнения и, приравнивая его изображению функции $f(t)$, приходим к так называемому *изображающему уравнению*, которое всегда является линейным алгебраическим уравнением относительно $\bar{y}(p)$. Определив из этого уравнения $\bar{y}(p)$, находим оригинал $y(t)$.

Тот же метод перехода к изображающему уравнению позволяет легко найти решение интегральных уравнений вида

$$\int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau=f(t), \quad y(t)=f(t)+\int_0^t K(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

в которых функции $K(t)$ и $f(t)$ являются оригиналами, поскольку входящий в эти уравнения интеграл является сверткой функций $y(t)$ и $K(t)$.

Эти интегральные уравнения являются частным случаем *интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода*, общий вид которых получается, если заменить функцию $K(t-\tau)$ (ее называют *ядром* интегрального уравнения) некоторой функцией двух аргументов $K(t, \tau)$.

1137. Решить дифференциальное уравнение $y''-2y'-3y=e^{3t}$, если $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

△ Переходим к изображениям:

$$p^2\bar{y}-p\cdot y(0)-y'(0)-2(p\bar{y}-y(0))-3\bar{y}=\frac{1}{p-3},$$

или

$$p^2\bar{y}-2p\bar{y}-3\bar{y}=\frac{1}{p-3};\ \bar{y}=\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложим эту рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2}=\frac{A}{(p-3)^2}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p+1},$$
$$1=A(p+1)+B(p-3)(p+1)+C(p-3)^2.$$

Полагая $p=-1$, получаем $1=16C$, т. е. $C=1/16$; при $p=3$ имеем $1=4A$, т. е. $A=1/4$. Сравнивая коэффициенты при p^2, получим $0=B+C$, т. е. $B=-C=1/16$. Следовательно,

$$\bar{y}=\frac{1}{4(p-3)^2}-\frac{1}{16(p-3)}+\frac{1}{16(p+1)},$$

откуда

$$y=\frac{1}{4}te^{3t}-\frac{1}{16}e^{3t}+\frac{1}{16}e^{-t}. \ ▲$$

1138. Решить уравнение $y''+y'-2y=e^{-t}$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

△ Переходим к изображениям:

$$[p^2\bar{y}-p\cdot y(0)-y'(0)]+[p\cdot\bar{y}-y(0)]-2\bar{y}=\frac{1}{p+1}.$$

После несложных преобразований получим

$$\bar{y}=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)}=\frac{1}{p^2-1}.$$

Отсюда $y=\operatorname{sh} t$. ▲

1139. Решить интегральное уравнение $y=\int\limits_0^t y\,dt+1$.

△ Строим изображающее уравнение:

$$\bar{y}=\frac{\bar{y}}{p}+\frac{1}{p},\ \bar{y}(p-1)=1, \bar{y}=\frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, $y=e^t$. ▲

1140. Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t.$$

△ Левая часть уравнения является сверткой функций $y(t)$ и $\sin t$. Переходя к изображениям, получаем

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)p}.$$

Следовательно, $\bar{y}(p)=1/p$ и $y(t)=1$. ▲

1141. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^t y(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau = y(t) - e^t.$$

△ Левая часть уравнения является сверткой функций $y(t)$ и e^t. Переходим к изображениям:

$$\bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1} = \bar{y}(p) - \frac{1}{p-1}, \quad \bar{y}(p)\cdot\frac{1}{p-1} - \bar{y}(p) = -\frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, $\bar{y}(p) = 1/(p-2)$, т. е. $y(t) = e^{2t}$. ▲

1142. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y + 1, \end{cases}$$

если $x(0) = 0$, $y(0) = 5$.

△ Перейдя к изображениям, имеем

$$\begin{cases} p\cdot\bar{x}(p) = \bar{x}(p) + 2\bar{y}(p), \\ p\cdot\bar{y}(p) - 5 = 2\bar{x}(p) + \bar{y}(p) + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно $\bar{x}$ и $\bar{y}$, получаем

$$\bar{x}(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)}, \qquad \bar{y}(p) = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}.$$

Для определения x воспользуемся второй теоремой разложения и формулой (5) § 2:

$$u(p) = 10p+2,\ v(p) = p^3 - 2p^2 - 3p,\ v'(p) = 3p^2 - 4p - 3,$$
$$p_1 = 0,\ p_2 = -1,\ p_3 = 3;$$
$$\frac{u(p_1)}{v'(p_1)} = \frac{u(0)}{v'(0)} = -\frac{2}{3},\ \frac{u(p_2)}{v'(p_2)} = \frac{u(-1)}{v'(-1)} = -2,\ \frac{u(p_3)}{v'(p_3)} = \frac{u(3)}{v'(3)} = \frac{8}{3}.$$

Таким образом, $x = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$. Аналогично находим $y = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}$. ▲

Решить дифференциальные уравнения:

1143. $y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$.

1144. $y' + y = e^t$; $y(0) = 0$.

1145. $y'' - 9y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.

1146. $y'' + y' - 2y = e^t$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

1147. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Решить системы уравнений:

1148. $\frac{dx}{dt}=2y,\ \frac{dy}{dt}=2x;\ x(0)=2,\ y(0)=2.$

1149. $\frac{dx}{dt}=3x+4y,\ \frac{dy}{dt}=4x-3y;\ x(0)=y(0)=1.$

Решить интегральные уравнения:

1150. $\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2\,d\tau=\frac{1}{3}t^3.$

1151. $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=1-\cos t.$

5. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ

Пусть функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1°. $f(t)\equiv 0$ при $t<0$.

2°. $|f(t)|<Me^{s_0t}$ при $t>0$, где $M>0$ и s_0 — некоторые действительные постоянные.

3°. На любом конечном отрезке $[a,\ b]$ $(0<a<b)$ функция удовлетворяет условиям Дирихле.

Тогда функция $\overline{f}(p)$, определяемая равенством $\overline{f}(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$, является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re}p\geqslant s_1>s_0$.

При этом справедлива *формула обращения (формула Римана—Меллина)*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp,\quad \text{или}\quad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp,$$

дающая выражение оригинала $f(t)$ через изображение $\overline{f}(p)$, причем σ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\sigma>s_0$.

Если $|\overline{f}(p)|<CR^{-k}$, где $p=Re^{i\theta}$ $-\pi\leqslant\theta<\pi$, $R>R_0$, R_0, C и $k>0$ — постоянные, то интеграл $\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$ в формуле обращения может быть заменен на интеграл $\int\limits_{\gamma}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$, где γ — окружность с центром в начале координат, которая содержит внутри все полюсы функции $F(p)=e^{pt}\overline{f}(p)$. Следовательно, $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}e^{pt}\overline{f}(p)\,dp$.

Применив основную теорему о вычетах, получаем

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}2\pi i\,(r_1+r_2+\ldots+r_m),$$

где $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m$ — вычеты функции $F(p)$ относительно полюсов. Итак, $f(t)=\sum\limits_{j=1}^{m}r_j$. Эта формула для дробно-рационального изображения в подробной записи есть не что иное, как формулы (4) и (5) § 2.

1152. Найти оригинал по изображению $\overline{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^3}$.

△ Находим вычет функции $F(p)=\frac{e^{pt}}{(p-1)^3}$:

$$r=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\cdot F(p)\right]=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}(e^{pt})=\frac{1}{2!}\lim_{p\to 1}t^2e^{pt}=\frac{t^2}{2!}e^t.$$

Следовательно, $f(t)=\frac{t^2e^t}{2!}$. ▲

1153. Найти оригинал по изображению

$$\overline{f}(p)=\frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

△ Имеем

$$F(p)=\frac{pe^{pt}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)},$$

$$r_1=\lim_{p\to -1}(p+1)\cdot F(p)=-\frac{1}{6}e^{-t},\quad r_2=\lim_{p\to -2}(p+2)\cdot F(p)=e^{-2t},$$

$$r_3=\lim_{p\to -3}(p+3)\cdot F(p)=-\frac{3}{2}e^{-3t},\quad r_4=\lim_{p\to -4}(p+4)\cdot F(p)=\frac{2}{3}e^{-4t}.$$

Следовательно, $f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}+\frac{2}{3}e^{-4t}$. ▲

Найти оригиналы по данным изображениям:

1154. $\overline{f}(p)=\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$.

1155. $\overline{f}(p)=\frac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$.

1156. $\overline{f}(p)=\frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Рассмотрим решения некоторых уравнений математической физики — волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Наиболее эффективными при этом являются методы операционного исчисления, основанные на идее использования преобразования Лапласа. Ограничимся случаем, когда искомая функция u зависит от двух независимых переменных x и t, где x — пространственная координата, t — время. Нестационарность рассматриваемой задачи выражается в том, что ищется решение, которое существенно зависит от начальных условий, и потому имеет место неустановившийся (или переходной) режим физического процесса.

Допустим, что дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial u}{\partial x}+Cu+A_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+B_1\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{1}$$

где A, B, C, A_1, B_1 — непрерывные функции от x, заданные в промежутке $0\leqslant x\leqslant l$ (можно считать, что $A>0$).

Рассмотрим два основных случая: 1) $A_1<0$, что соответствует гиперболическому типу уравнения; 2) $A_1=0$, $B_1<0$, что соответствует параболическому типу. При этих условиях поставленную нестационарную задачу можно сформулировать так: требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ (причем второе условие задается в случае $A_1 < 0$) и граничным условиям $u(x, t)|_{x=0} = f(t)$, $\alpha \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l} = \gamma u(x, t)|_{x=l}$, где α, β, γ — постоянные. Заметим, что при $l \to \infty$ второе граничное условие отпадает.

Предполагается также, что $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, являющиеся функциями от t, могут служить оригиналами и что изображения искомой функции и ее производных имеют вид

$$\overline{u}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt, \quad \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^\infty u e^{-pt}\, dt = \frac{d\overline{u}}{dx}, \quad \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty u e^{-pt}\, dt = \frac{d^2\overline{u}}{dx^2}.$$

Здесь p рассматривается только как параметр. Изображениями же $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ служат

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq p\overline{u} - u(x, 0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2\overline{u} - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

или, с учетом начальных условий,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq p\overline{u} - \varphi(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \risingdotseq p^2\overline{u} - p\varphi(x) - \psi(x);$$

граничные условия $\overline{u}|_{x=0} = \overline{f}(p)$, $\left[\alpha \frac{d\overline{u}}{dx} + \beta(p\overline{u} - \varphi(x))\right]_{x=l} = \gamma\overline{u}|_{x=l}$.

Таким образом, решение уравнения (1) сводится к решению операторного уравнения

$$A \frac{d^2\overline{u}}{dx^2} + B \frac{d\overline{u}}{dx} + M\overline{u} + N = 0, \tag{2}$$

где $M = C - A_1 p^2 + B_1 p$, $N = -A_1 p\varphi - A_1\psi - B_1\varphi$ (p — параметр), являющегося обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

Найдя изображение искомой функции $u(x, t)$, с помощью таблицы или формулы обращения Римана—Меллина можно определить оригинал.

1157. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Начальное отклонение задано равенством $u(x, 0) = A\sin(\pi x/l)$, $0 \leqslant x \leqslant l$; начальная скорость равна нулю. Найти отклонение $u(x, t)$ при $t > 0$.

△ Дифференциальное уравнение задачи имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Начальные условия $u(0, t) = A\sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$; граничные условия $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Запишем соответствующее операторное уравнение

$$\frac{d^2\overline{u}}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} \cdot \overline{u} = -pA \cdot \frac{1}{a^2} \sin\frac{\pi x}{l};$$

граничные условия $\overline{u}|_{x=0} = \overline{u}|_{x=l} = 0$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\overline{u}=C_1e^{(p/a)\,x}+C_2e^{-(p/a)\,x},$$

а частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$\overline{v}=\tilde{C}_1\cos\frac{\pi x}{l}+\tilde{C}_2\sin\frac{\pi x}{l},$$

т. е.

$$\begin{array}{r|l} -\dfrac{p^2}{a^2} & \overline{v}=\tilde{C}_1\cos\dfrac{\pi x}{l}+\tilde{C}_2\sin\dfrac{\pi x}{l}, \\ 0 & \overline{v}'=-\tilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}+\tilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi}{l}\cos\dfrac{\pi x}{l}, \\ 1 & \overline{v}''=-\tilde{C}_1\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\cos\dfrac{\pi x}{l}-\tilde{C}_2\cdot\dfrac{\pi^2}{l^2}\sin\dfrac{\pi x}{l} \end{array}$$

$$-\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}=-\tilde{C}_2\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\sin\frac{\pi x}{l}-\tilde{C}_1\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{l^2}\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

Отсюда $\tilde{C}_1=0$, $\tilde{C}_2=\dfrac{pA}{p^2+\pi^2a^2/l^2}$. Таким образом, общее решение операторного уравнения есть

$$\overline{u}(x,\ p)=C_1e^{(p/a)\,x}+C_2e^{-(p/a)\,x}+\frac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Учитывая граничные условия, получим $\overline{u}(x,\ p)=\dfrac{Ap}{p^2+a^2\pi^2/l^2}\sin\dfrac{\pi x}{l}$. Оригиналом для такого изображения служит функция

$$u(x,\ t)=A\cos\frac{\pi at}{l}\sin\frac{\pi x}{l}. \quad \blacktriangle$$

1158. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям: $u(x,\ 0)=0$; $u(0,\ t)=u_0$, $0<x<\infty$, $t>0$.

△ Запишем операторное уравнение

$$\frac{d^2\overline{u}(x,\ p)}{dx^2}-\frac{p}{a^2}\cdot\overline{u}(x,\ p)=0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\overline{u}(x,\ p)=C_1e^{-x\sqrt{p}/a}+C_2e^{x\sqrt{p}/a}.$$

Согласно условию, функции $u(x,\ t)$ и $\overline{u}(x,\ p)$ при $x\longrightarrow\infty$ являются ограниченными, а потому $C_2=0$.

Используя граничное условие $\overline{u}(x,\ p)\,|_{x=0}=u_0/p$, находим произвольную постоянную $C_1=u_0/p$. Тогда $\overline{u}=(u_0/p)\,e^{-x\sqrt{p}/a}$. Пользуясь соотношением $\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\ \dot{\longrightarrow}\ \mathrm{Erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$, находим оригинал для функции $\overline{u}(x,\ p)$.

Решение данного уравнения имеет вид

$$u(x,\ t)=u_0\cdot\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где, как известно,

$$\operatorname{Erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{t}^{\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t} e^{-\tau^2}\,d\tau=1-\operatorname{erf} t.$$

Следовательно,

$$u(x,\ t)=u_0\cdot\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)=u_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{0}^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-\tau^2}\,d\tau\right).\ \blacktriangle$$

1159. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha^2\frac{\partial u}{\partial t}$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям: $u(x,\ 0)=A\sin(n\pi x/l),\ 0\leqslant x\leqslant l;\ u(0,\ t)=u(l,\ t)=0.$

$\triangle$ Операторное уравнение, соответствующее данному уравнению в частных производных, имеет вид

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\alpha^2 p\cdot\bar{u}=-\alpha^2 A\sin\frac{n\pi x}{l},$$

а его общее решение

$$\bar{u}(x,\ p)=C_1e^{-\alpha\sqrt{p}\,x}+C_2e^{\alpha\sqrt{p}\,x}+\frac{A}{p+(n^2\pi^2)/(\alpha^2l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Учитывая граничные условия $\bar{u}\,|_{x=0}=\bar{u}\,|_{x=l}=0$, получим

$$\bar{u}(x,\ p)=\frac{A}{p+(n^2\pi^2)/(\alpha^2l^2)}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Оригинал этого решения есть $u(x,\ t)=Ae^{-(n^2\pi^2)\,t/(\alpha^2l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}$. $\blacktriangle$

1160. Найти решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,\ 0)=0\ (x>0)$ и граничным условиям $u(0,\ t)=0,\ u(h,\ t)=u_0$.

$\triangle$ Запишем операторное уравнение

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2}-\frac{p}{a}\cdot\bar{u}=0,$$

которое надо решить при условиях $\bar{u}(0,\ t)=0,\ \bar{u}(h,\ t)=u_0/p$. Общее решение операторного уравнения запишем в виде

$$\bar{u}(x,\ p)=A\operatorname{ch}\sqrt{p/a}\,x+B\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x. \qquad (*)$$

Используя граничные условия, найдем постоянные A и B. Имеем

$$A=0,\quad \frac{u_0}{p}=B\cdot\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\cdot h,\ \text{т. е. } B=\frac{u_0}{p\cdot\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}.$$

Подставляя значения A и B в равенство (*), получим $\bar{u}=\frac{u_0}{p}\cdot\frac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}$.

Согласно формуле обращения Римана—Меллина, имеем

$$u(x,\ t)=\frac{u_0}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}\cdot\frac{dp}{p}. \qquad (**)$$

Для вычисления интеграла найдем вычеты подынтегральной функции. Приравнивая знаменатель нулю и учитывая, что корни гиперболического синуса являются чисто мнимыми и равными $ik\pi$, находим

$$\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h=0,\ \sqrt{p_k/a}\,h=ik\pi,\ p_k=-k^2\pi^2a/h^2\quad (k\in\mathbf{N}).$$

Все k полюсов — простые, отличные от нуля; поэтому, применяя теорему Коши о вычетах, получаем

$$u(x,\ t)=\sum_{(p_k)}\operatorname{res}F(p)\,e^{pt},\ \text{где } F(p)=\frac{M(p)}{p\cdot N(p)}=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{p\cdot\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h},$$

причем степень $M(p)$ не превосходит степени $N(p)$. Тогда

$$\frac{M(p)}{pN(p)}\ \dot{\rightarrow}\ \frac{M(0)}{N(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(p_k)}{p_k\cdot N'(p_k)}\,e^{p_kt},$$

где $\dfrac{M(0)}{N(0)}=\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,x}{\operatorname{sh}\sqrt{p/a}\,h}=\dfrac{x}{h}$, а $\dfrac{M(p_k)}{p_kN'(p_k)}=-\dfrac{2i\operatorname{sh}(ik\pi x/h)}{k\pi\operatorname{ch}(ik\pi)}$. Выразив гиперболические функции через круговые, получим

$$\frac{2\sin(k\pi x/h)}{\pi k\cos(k\pi)}=(-1)^k\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin(k\pi x/h)}{k}.$$

Таким образом, равенство (**) примет вид

$$u(x,\ t)=u_0\left[\frac{x}{h}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot e^{-ak^2\pi^2t/h^2}\cdot\frac{\sin(k\pi x/h)}{k}\right].\ \blacktriangle$$

1161. Найти решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,\ 0)=A\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, $\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0$, $0\leqslant x\leqslant l$ и граничным условиям $\dfrac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=\dfrac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=0$.

1162. Найти решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,\ 0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=B\sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $0\leqslant x\leqslant l$ и граничным условиям $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0$.

1163. Найти решение уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\alpha^2\dfrac{\partial u}{\partial t}$, удовлетворяющее условиям $u(x,\ 0)=0$, $x\geqslant 0$; $u(0,\ t)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty}u(x,\ t)=0$.

ГЛАВА IX

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Задача о нахождении приближенных значений действительных корней уравнения $f(x)=0$ предусматривает предварительное *отделение корня*, т. е. установление промежутка, в котором других корней данного уравнения нет. Будем предполагать, что функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ непрерывна вместе со своими производными $f'(x)$ и $f''(x)$, значения $f(a)$ и $f(b)$ функции на концах промежутка имеют разные знаки, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, и обе производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак во всем промежутке $[a, b]$.

Так как действительными корнями уравнения $f(x)=0$ являются абсциссы точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью Ox, то отделение корня можно произвести графически. Вместо уравнения $y=f(x)$ можно взять уравнение $y=kf(x)$, где k — постоянная величина, отличная от нуля, так как уравнения $f(x)=0$ и $kf(x)=0$ равносильны.

Постоянную величину k можно взять так, чтобы ординаты точек графика не были чрезмерно большими или, наоборот, чтобы график не был слишком близок к оси Ox. Иногда бывает полезно уравнение $f(x)=0$ записать в виде $\varphi(x)=\psi(x)$. Действительными корнями исходного уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$.

1. Метод хорд. Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения $f'(x)=0$, изолированный на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим график функции $y=f(x)$. Пусть $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Точки графика $A[a;\ f(a)]$ и $B[b;\ f(b)]$ соединим хордой. За приближенное значение искомого корня примем абсциссу x_1 точки пересечения хорды AB с осью Ox.

Это приближенное значение находится по формуле

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},$$

где x_1 принадлежит интервалу $]a, b[$. Пусть, например, $f(x_1)<0$, тогда за новый (более узкий) промежуток изоляции корня можно принять $[x_1, b]$. Соединив точки $A_1[x_1;\ f(x_1)]$ и $B[b;\ f(b)]$, получим в точке пересечения хорды с осью Ox второе приближение x_2, которое вычислим по формуле

$$x_2=x_1-\frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)},$$

и т. д. Последовательность чисел $a, x_1, x_2, \dots$ стремится к искомому корню уравнения $f(x)=0$. Вычисление приближенных значений корней уравнения следует вести до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т. е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Если $\bar{x}$ — точный корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на отрезке $[a, b]$, а ξ — приближенное значение корня, найденное методом хорд, то оценка погрешности этого приближенного значения такова:

$$|\bar{x}-\xi|<-\frac{f(a)\cdot f(b)}{2}\cdot\max_{[a,\ b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

2. Метод касательных (метод Ньютона). Пусть действительный корень уравнения $f(x)=0$ изолирован на отрезке $[a, b]$. Будем предполагать, что все ограничения, сформулированные выше относительно $f(x)$, сохраняют силу и в этом случае. Возьмем на отрезке $[a, b]$ такое число x_0, при котором $f(x_0)$

имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т. е. $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ (в частности, за x_0 может быть принят тот из концов отрезка $[a, b]$, в котором соблюдено это условие). Проведем в точке $M_0[x_0; f(x_0)]$ касательную к кривой $y=f(x)$. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Это приближенное значение корня находится по формуле

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Применив этот прием вторично в точке $M_1[x_1; f(x_1)]$, найдем

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

и т. д. Полученная таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ имеет своим пределом искомый корень.

Для оценки погрешности приближенного значения корня, найденного методом Ньютона, может быть использовано неравенство

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(\xi)]^2}{2}\cdot\max_{[a,\ b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

3. Комбинированный метод хорд и касательных. Пусть требуется найти действительный корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на отрезке $[a, b]$. Предполагается, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, а каждая из производных сохраняет определенный знак на отрезке изоляции. Возьмем на отрезке $[a, b]$ такую точку x_0, что $f(x_0)$ и $f''(x_0)$ (при x, принадлежащем промежутку изоляции) имеют одинаковые знаки.

Воспользуемся формулами методов хорд и касательных:

$$x_{11}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)};\quad x_{12}=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Величины x_{11} и x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{21}=x_{11}-\frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})};\quad x_{22}=x_{11}-\frac{(x_{12}-x_{11})f(x_{11})}{f(x_{12})-f(x_{11})}.$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси расположены между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки.

Вычислим теперь значения

$$x_{31}=x_{21}-\frac{f(x_{21})}{f'(x_{21})};\quad x_{32}=x_{21}-\frac{(x_{22}-x_{21})f(x_{21})}{f(x_{22})-f(x_{21})}$$

и т. д.

Каждая из последовательностей

$$x_{11},\ x_{21},\ x_{31},\ \ldots,\ x_{n1},\ \ldots;\ x_{12},\ x_{22},\ x_{32},\ \ldots,\ x_{n2},\ \ldots$$

стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая — монотонно убывает. Пусть, например, $x_{n1}<\bar{x}<x_{n2}$, тогда $0<\bar{x}-x_{n-1}<x_{n2}-x_{n1}$. Задав заранее достаточно малое ε, мы можем, увеличивая n, добиться выполнения неравенства $x_{n2}-x_{n1}<\varepsilon$; следовательно, при этом же значении n будет выполняться неравенство $\bar{x}-x_{n1}<\varepsilon$. Таким образом, x_{n1} является приближенным значением корня $\bar{x}$, вычисленным с погрешностью, не превышающей ε.

Так, например, для нахождения приближенного значения $\bar{x}$ с точностью до 0,001 нужно определить n таким образом, чтобы значения x_{n1} и x_{n2}, вычисленные с точностью до 0,001, совпадали.

4. Метод итераций. Если данное уравнение приведено к виду $x=\varphi(x)$, где $|\varphi'(x)|\leqslant r<1$ всюду на отрезке $[a, b]$, на котором исходное уравнение имеет единственный корень, то исходя из некоторого начального значения x_0, принадлежащего отрезку $[a, b]$, можно построить такую последовательность:

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n=\varphi(x_{n-1}).$$

Пределом этой последовательности является единственный корень уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a, b]$. Погрешность приближенного значения x_n корня $\overline{x}$, найденного методом итераций, оценивается неравенством

$$|\overline{x}-x_n|<\frac{r}{1-r}|x_n-x_{n-1}|.$$

Для нахождения приближенного значения корня с погрешностью, не превышающей ε, достаточно определить n так, чтобы выполнялось неравенство

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{r-1}{r}\varepsilon.$$

5. **Метод проб.** Интервал изоляции действительного корня всегда можно уменьшить путем деления его, например, пополам, определяя, на границах какой из частей первоначального интервала функция $f(x)$ меняет знак. Затем полученный интервал снова делят на две части и т. д. Такой процесс проводится до тех пор, пока не перестанут изменяться сохраняемые в ответе десятичные знаки.

1164. Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4-2x-4=0$ с точностью до 0,01.

△ Положительный корень заключен в промежутке (1; 1,7), так как $f(1)=-5<0$, а $f(1{,}7)=0{,}952>0$.

Найдем первое приближенное значение корня по формуле

$$x_1=1-\frac{(1{,}7-1)\cdot f(1)}{f(1{,}7)-f(1)}=1{,}588.$$

Так как $f(1{,}588)=-0{,}817<0$, то снова применим метод хорд к промежутку **(1,588; 1,7)**:

$$x_2=1{,}588-\frac{(1{,}7-1{,}588)\cdot f(1{,}588)}{f(1{,}7)-f(1{,}588)}=1{,}639;\ f(1{,}639)=-0{,}051<0.$$

Найдем третье приближенное значение:

$$x_3=1{,}639-\frac{(1{,}7-1{,}639)\cdot f(1{,}639)}{f(1{,}7)-f(1{,}639)}=1{,}642;\ f(1{,}642)=-0{,}016<0.$$

Найдем четвертое приближенное значение:

$$x_4=1{,}642-\frac{(1{,}7-1{,}642)\cdot f(1{,}642)}{f(1{,}7)-f(1{,}642)}=1{,}643;\ f(1{,}643)=0{,}004>0.$$

Следовательно, с точностью до 0,01 искомый корень равен 1,64. ▲

1165. Решить предыдущий пример методом касательных.

△ Здесь $f(x)=x^4-2x-4$, $f'(x)=4x^3-2$, $f''(x)=12x^2$. Так как $f(x)$ и $f''(x)$ при $x_0=1{,}7$ имеют один и тот же знак, а именно $f(1{,}7)=0{,}952>0$ и $f''(1{,}7)>0$, то воспользуемся формулой $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$, где $f'(1{,}7)=4\cdot1{,}7^3-2=$ $=17{,}652$. Тогда

$$x_1=1{,}7-0{,}952/17{,}652=1{,}646.$$

Применим снова метод касательных. Имеем $x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1)$, где $f(x_1)=f(1{,}646)=0{,}048$, $f'(1{,}646)=15{,}838$; значит,

$$x_2=1{,}646-0{,}048/15{,}838=1{,}643.$$

Аналогичным образом находим $f(1{,}643)=0{,}004$; $f'(1{,}643)=15{,}740$, т. е.

$$x_3=x_2-f(x_2)/f'(x_2)=1{,}643-0{,}004/15{,}740=1{,}6427.$$

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64. ▲

1166. Используя комбинированный метод хорд и касательных, найти приближенное значение корня уравнения $x^3+x^2-11=0$, изолированного в промежутке $(1, 2)$, с точностью до 0,001.

△ Имеем $f(x)=x^3+x^2-11$, $f'(x)=3x^2+2x$, $f''(x)=6x+2$. В указанном промежутке $f''(x)>0$, поэтому за первое приближение в способе касательных берем $x_0=2$, так как $f(2)=1>0$:

$$x_{11}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{1}{16}=1{,}9375\approx 1{,}94;$$

$$x_{12}=a-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}=1-\frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)}=1+\frac{9}{10}=1{,}9.$$

Искомый корень принадлежит промежутку $(1{,}9;\ 1{,}94)$; имеем $f(1{,}9)=-0{,}531$; $f(1{,}94)=0{,}065$; $f'(1{,}94)=15{,}172$;

$$x_{21}=1{,}94-\frac{0{,}065}{15{,}172}=1{,}936;\quad x_{22}=1{,}9-\frac{0{,}04\cdot(-0{,}531)}{0{,}065+0{,}531}=1{,}936.$$

Так как значения x_{21} и x_{22}, вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенное значение корня $\bar{x}$, вычисленное с точностью до 0,001, есть 1,936. ▲

1167. Методом итераций найти приближенное значение корня уравнения $2-\lg x-x=0$ с точностью до 0,001.

△ Найдем интервал изоляции действительного корня уравнения. Представим данное уравнение в виде $\lg x=-x+2$ и построим графики функций $y=\lg x$ и $y=-x+2$. Абсцисса точки M пересечения этих графиков находится в промежутке $[1, 2]$, поэтому за начальное значение $\bar{x}$ можно взять $x_0=1$ (рис. 73).

Запишем исходное уравнение в виде $x=2-\lg x$. Здесь $\varphi(x)=2-\lg x$, $\varphi'(x)=-(\lg e)/x$, т. е. $|\varphi'(x)|<1$ в промежутке $[1, 2]$ и поэтому метод итераций применим. Найдем теперь первое приближенное значение:

$$x_1=2-\lg x_0=2-\lg 1=2.$$

Найдем второе и последующие приближения:

$x_2=2-\lg x_1=2-0{,}3010=1{,}6990$; $\quad x_3=2-\lg 1{,}6990=2-0{,}2302=1{,}7698$;
$x_4=2-\lg 1{,}7698=2-0{,}2480=1{,}7520$; $\quad x_5=2-\lg 1{,}7520=2-0{,}2435=1{,}7565$;
$x_6=2-\lg 1{,}7565=2-0{,}2445=1{,}7555$; $\quad x_7=2-\lg 1{,}7555=2-0{,}2444=1{,}7556$.

Таким образом, искомый корень $x\approx 1{,}755$. ▲

1168. Методом проб решить уравнение $x^3+2x-7=0$ с точностью до 0,01.

△ Интервал изоляции действительного корня можно определить графически, построив графики функций $y=x^3$ и $y=-2x+7$ (рис. 74).

Единственная точка пересечения графиков находится в интервале $(1, 2)$. Следовательно, искомый корень заключен в этом интервале, т. е. можно принять $a=1$, $b=2$. Найдем значения функции на концах интервала: $f(1)=-4<0$; $f(2)=5>0$. Разделив интервал $(1, 2)$ пополам, получим $c_1=(a+b)/2=(1+2)/2=1{,}5$ и вычислим $f(c_1)=f(1{,}5)=-0{,}625<0$. Следовательно, искомый корень находится в интервале $(1{,}5;\ 2)$.

Примем $c_2=1{,}7$; $f(c_2)=f(1{,}7)=1{,}313>0$. Мы видим, что искомый корень находится в интервале $(1{,}5; 1{,}7)$. Примем теперь $c_3=1{,}6$; $f(c_3)=f(1{,}6)=0{,}296>0$. В результате интервал изоляции удалось сузить, и искомый корень находится в интервале $(1{,}5; 1{,}6)$.

Продолжая этот процесс, имеем:

$c_4=1{,}55$; $f(c_4)=f(1{,}55)=-0{,}176<0$; интервал изоляции $(1{,}55; 1{,}6)$;
$c_5=1{,}57$; $f(c_5)=f(1{,}57)=0{,}010>0$; интервал изоляции $(1{,}55; 1{,}57)$;
$c_7=1{,}565$; $f(c_7)=f(1{,}565)=-0{,}037<0$; интервал изоляции $(1{,}56; 1{,}57)$;
$c_8=1{,}568$; $f(c_8)=f(1{,}568)=-0{,}009<0$.

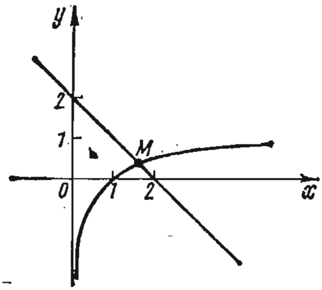

Рис. 73

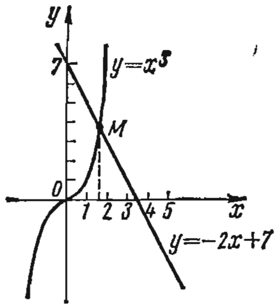

Рис. 74

Таким образом, мы получили интервал $(1{,}568; 1{,}57)$. Отсюда видно, что с точностью до 0, 01 искомый корень $x=1{,}57$. ▲

1169. Определить графически интервалы изоляции действительных корней уравнения $x^3-9x^2+18x-1=0$.

1170. Определить графически интервалы изоляции действительных корней уравнения $x^3-12x+1=0$.

Методом хорд и касательных решить с точностью до 0,01 уравнения:

1171. $x^4+3x-20=0$.
1172. $x^3-2x-5=0$.
1173. $x^4-3x+1=0$.
1174. $x^3+3x+5=0$.
1175. $x^4+5x-7=0$ (применить комбинированный метод хорд и касательных).

Методом итераций решить с точностью до 0,01 уравнения:

1176. $x^3-12x-5=0$.
1177. $x^3-2x^2-4x-7=0$.

Методом проб, деля интервал изоляции корня на части, решить с точностью до 0,01 уравнения:

1178. $x+e^x=0$.
1179. $x^5-x-2=0$.

1180. Применив дважды метод хорд, найти приближенное значение действительного корня уравнения $x^3-10x+5=0$, изолированного в промежутке $[0; 0{,}6]$. Приближенные значения x_1 и x_2 вычислить с двумя знаками после запятой. Оценить погрешность приближенного значения x_2.

△ Находим

$$f(x)=x^3-10x+5,\ f'(x)=3x^2-10,\ f''(x)=6x;$$
$$f(0)=5;\ f(0{,}6)=0{,}216-6+5=-0{,}784;$$
$$x_1=0-\frac{0{,}6\cdot 5}{-0{,}784-5}=\frac{3}{5{,}784}=0{,}52;\ f(0{,}52)=0{,}141-5{,}2+5=-0{,}059<0.$$

Новый интервал изоляции (0; 0,52). Находим второе приближение:

$$x_2=0-\frac{-0{,}52\cdot 5}{-0{,}059-5}=\frac{2{,}6}{5{,}059}=0{,}51.$$

Оценим погрешность этого приближенного значения по формуле

$$|\bar{x}-x_2|<-\frac{f(a)f(b)}{2}\cdot\max_{[a,\ b]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|,$$

приняв $a=0$, $b=0{,}52$. Имеем

$$|\bar{x}-x_2|<\frac{5\cdot 0{,}059}{2}\cdot\max_{[0;0,52]}\left|\frac{6x}{(3x^2-10)^3}\right|.$$

В указанном интервале $\left|\frac{6x}{(3x^2-10)^3}\right|=\frac{6x}{(10-3x^2)^3}$. Эта функция принимает наибольшее значение при $x=0{,}52$. Таким образом,

$$|\bar{x}-x_2|<0{,}1475\cdot\frac{3{,}12}{(10-0{,}8112)^3}.$$

Итак, получаем оценку приближенного значения корня: $|x-0{,}51|<0{,}0006$. Отсюда следует, что в приближенном значении корня $x_2=0{,}51$ оба знака верны. ▲

1181. Применив дважды метод касательных, найти приближенное значение действительного корня уравнения $x^4-8x+1=0$, изолированного в промежутке [1,6; 2]. Приближенные значения x_1 и x_2 вычислить с двумя знаками после запятой. Оценить погрешность приближенного значения x_2.

△ Находим $f(x)=x^4-8x+1$, $f'(x)=4x^3-8$, $f''(x)=12x^2$; $f(1{,}6)=-5{,}246$, $f(2)=1$; $f''(x)>0$, $f(2)=1>0$, поэтому принимаем $x_0=2$. Применяем формулу

$$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0),\ \text{т. е. } x_1=2-1/24=1{,}96.$$

Определяем второе приближение. Находим $f(x_1)=1{,}96^4-8\cdot 1{,}96+1=0{,}09$, $f'(x_1)=4\cdot 1{,}96^3-8=22{,}12$; значит,

$$x_2=x_1-f(x_1)/f'(x_1),\ \text{т. е. } x_2=1{,}96-0{,}09/22{,}12=1{,}956\approx 1{,}96.$$

Оценим погрешность найденного приближенного значения корня:

$$|\bar{x}-x_2|<\frac{[f(x_2)]^2}{2}\cdot\max_{[1,6;\ 2]}\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|.$$

В интервале (1,6; 2) имеем

$$\left|\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\right|=\left|\frac{12x^2}{(4x^3-8)^3}\right|=\frac{3x^2}{16(x^3-2)^3}.$$

Внутри промежутка [1,6; 2] функция $\frac{x^2}{(x^3-2)^3}$ экстремумов не имеет. Наибольшего значения она достигает при $x=1{,}6$:

$$|\bar{x}-1{,}96|<\frac{0{,}09^2}{2}\cdot\frac{3{,}16^2}{16(1{,}6^3-2)^3},$$

т. е. $|x-1{,}96| < 0{,}0002$; следовательно, в приближенном значении корня 1,96 все цифры верны. ▲

1182. Применив пять раз метод итераций, найти приближенный корень уравнения $2x-\cos x=0$, изолированный в промежутке $[0;\ 0{,}5]$, с точностью до трех значащих цифр.

△ Запишем данное уравнение в виде $x=0{,}5\cos x$; следовательно, $\varphi(x)=0{,}5\cos x$, $\varphi'(x)=0{,}5\sin x$. В промежутке $[0;\ 0{,}5]$ имеем $|\varphi'(x)|<0{,}5=r<1$. Примем $x_0=0{,}5$; $x_1=0{,}5\cos x_0$, $x_2=0{,}5\cos x_1$ и т. д.

Выполним вычисления: $x_1=0{,}5\cos 0{,}5=0{,}5\cos 28°41'=0{,}4386$; $x_2=0{,}5\cos 0{,}4386=0{,}5\cos 25°08'=0{,}4527$, $x_3=0{,}5\cos 0{,}4527=0{,}5\cos 25°56'=0{,}4496$; $x_4=0{,}5\cos 25°46'=0{,}4503$, $x_5=0{,}5\cos 25°48'=0{,}4502$.

Оценку погрешности вычислим по формуле

$$|\bar{x}-x_5|<\frac{r}{1-r}|x_5-x_4|.$$

Имеем $|\bar{x}-0{,}4502|<|0{,}4502-0{,}4503|$, т. е.

$$|\bar{x}-0{,}4502|<0{,}0001, \quad \text{или} \quad 0{,}4501<\bar{x}<0{,}4503.$$

Следовательно, с точностью до трех значащих цифр приближенное значение корня равно 0,450. ▲

6. Обобщение метода Ньютона для приближенного решения уравнений.

а) **Метод Чебышева.** Пусть требуется найти действительный корень уравнения $f(x)=0$, изолированный в интервале $]a, b[$. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной вместе с производными до n-го порядка включительно, причем $f'(x)\neq 0$ в интервале (a, b). Рассмотрим кривую $x=\xi+A_1y+A_2y^2+\ldots+A_ny^n$. Подберем параметры ξ, A_1 A_2, ..., A_n так, чтобы кривые $y=f(x)$ и $x=\xi+\sum\limits_{k=1}^{n}A_ky^k$ в точке с абсциссой x_0 из интервала $]a, b[$ имели касание n-го порядка. Напомним (см. ч. I, гл. VII, § 4), что кривые $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ в точке с абсциссой x_0 *имеют касание n-го порядка*, если

$$f(x_0)=\varphi(x_0),\ f'(x_0)=\varphi'(x_0),\ f''(x_0)=\varphi''(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)=\varphi^{(n)}(x_0).$$

Геометрически точка касания n-го порядка является предельным положением $n+1$ точек пересечения кривых $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ при стремлении этих точек пересечения к точке с абсциссой x_0. В данном случае кривая $y=\varphi(x)$ неявно определяется уравнением $x=\xi+\sum\limits_{k=1}^{n}A_ky^k$.

При таком выборе параметров ξ, A_1, A_2, ..., A_n за приближенное значение искомого корня можно принять абсциссу точки пересечения кривой $x=\xi+\sum\limits_{k=1}^{n}A_ky^k$ с осью Ox, т. е. число ξ.

Если $n=1$, то $\xi=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (формула метода Ньютона).

Если $n=2$, то

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{[f(x_0)]^2 f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}. \qquad (1)$$

Если $n=3$, то

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{[f(x_0)]^2\cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}-\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\cdot\frac{3[f''(x_0)]^2-f'(x_0)\cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}. \qquad (2)$$

Если $n=4$, то

$$\xi=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{[f(x_0)]^2\cdot f''(x_0)}{2!\,[f'(x_0)]^3}-\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\cdot\frac{3[f''(x_0)]^2-f'(x_0)\cdot f'''(x_0)}{[f'(x_0)]^5}-$$
$$-\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\cdot\frac{[f'(x_0)]^2\cdot f^{IV}(x_0)-10f'(x_0)\,f''(x_0)\,f'''(x_0)+15\,[f''(x_0)]^3}{[f'(x_0)]^7}.$$

Приведем *оценки погрешности* значений корней, найденных по формулам (1) и (2).

Для формулы (1) при $n=2$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^3}{3!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}\right|.$$

Для формулы (2) при $n=3$

$$|\bar{x}-\xi|<\frac{[f(x_0)]^4}{4!}\cdot\max_{[a,\,b]}\left|\frac{[f'(x)]^2\,f^{IV}(x)-10f'(x)\,f''(x)\,f'''(x)+15\,[f''(x)]^3}{[f'(x)]^7}\right|.$$

б) Для отыскания действительного корня уравнения $f(x)=0$, изолированного в интервале $(a,\,b)$, рассматривается кривая

$$y=\frac{x-\xi_n}{A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\ldots+A_{n-1}(x-x_0)^{n-1}},\qquad (3)$$

имеющая с кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 $(a<x_0<b)$ касание n-го порядка. Примем за приближенное значение корня абсциссу точки пересечения этой кривой с осью Ox, т. е. ξ_n.

Из условия касания находим это приближенное значение:

$$\xi_n=x_0-b_0\cdot\frac{D_{n-1}}{D_n},\qquad (4)$$

где

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots 0 & 0\\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & b_{n-4} & \ldots & b_1 & b_0\\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_2 & b_1\end{vmatrix},$$

$$b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ b_0=f(x_0).$$

Если $n=1$, то уравнение (3) определяет прямую $y=\frac{1}{A_0}(x-\xi)$ и для приближенного значения корня получается формула метода Ньютона.

Таким образом, формула (4) обобщает метод Ньютона для приближенного решения уравнений.

Если $n=2$, то

$$\xi_2=x_0-\frac{b_0b_1}{b_1^2-b_0b_2}.\qquad (5)$$

Если $n=3$, то

$$\xi_3=x_0-\frac{(b_1^2-b_0b_2)\,b_0}{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0\\ b_2 & b_1 & b_0\\ b_3 & b_2 & b_1\end{vmatrix}}.\qquad (6)$$

1183. Найти приближенное значение $\sqrt{3}$ с точностью до 0,0000001.

△ Применим к уравнению $x^2-3=0$ формулу Чебышева при $n=4$. Примем $x_0=1,7$; тогда $f(x)=x^2-3$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, $f'''(x)=0$, $f^{IV}(x)=0$; $f(1,7)=-0,11$, $f'(1,7)=3,4$, $f''(1,7)=2$, $f'''(1,7)=0$, $f^{IV}(1,7)=0$. Следовательно,

$$\xi=1,7+\frac{0,11}{3,4}-\frac{0,11^2\cdot 2}{2!\,3,4^3}+\frac{0,11^3}{3!}\cdot\frac{12}{3,4^5}-\frac{0,11^4}{4!}\cdot\frac{120}{3,4^7}=$$

$$=1,7+0,0323529-0,0003078+0,0000058-0,0000001=1,7320508.$$

Так как $f(1,7320508)<0$, но $f(1,7320509)>0$, то в приближенном значении корня $\xi=1,7320508$ все знаки верны. ▲

1184. Найти приближенное значение действительного корня уравнения $2x^3+2x-7=0$ с точностью до 0,000001.

△ Имеем $f(x)=2x^3+2x-7$, $f'(x)=6x^2+2>0$; $f(x)$ — возрастающая функция; $f(1,3)=4,394+2,6-7=-0,006<0$, $f(1,4)=5,488+2,8-7=1,288>0$. Следовательно, в интервале $(1,3;\ 1,4)$ имеется единственный действительный корень данного уравнения.

Примем $x_0=1,3$. Воспользуемся формулой Чебышева при $n=2$; находим $f(x)=2x^3+2x-7$, $f'(x)=6x^2+2$, $f''(x)=12x$; $f(1,3)=-0,006$, $f'(1,3)=12,14$, $f''(1,3)=15,6$; значит,

$$\xi=1,3+\frac{0,006}{12,14}-\frac{0,000036}{2}\cdot\frac{15,6}{1789,1883}=1,3+0,0004942-0,0000002=1,300494;$$

$$f(1,300494)=4,399009+2,600988-7=-0,000003<0,$$
$$f(1,300495)=4,399021+2,600990-7=+0,000011>0.$$

Следовательно, все знаки приближенного значения корня $\xi=1,300494$ верны. ▲

1185. С помощью формулы Чебышева найти приближенное значение $\sqrt[3]{5}$ с точностью до 0,00001. Принять $n=3$.

1186. Приняв в формуле Чебышева $n=2$, вычислить действительный корень уравнения $3x^5+6x-16=0$ с точностью до 0,00001.

1187. Найти приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до 0,00001.

△ Положим $f(x)=x^2-2$. Применяем формулу (6), взяв $x_0=1,4$. Тогда $f(x)=x^2-2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$, $f'''(x)=0$; $b_0=f(1,4)=-0,04$, $b_1=f'(1,4)=2,8$, $b_2=(1/2)f''(1,4)=(1/2)\cdot 2=1$, $f'''(1,4)=0$. Следовательно,

$$\xi_3=1,4+\frac{(7,84+0,04)\cdot 0,04}{\begin{vmatrix}2,8 & -0,04 & 0\\ 1 & 2,8 & -0,04\\ 0 & 1 & 2,8\end{vmatrix}}=1,4+\frac{7,88\cdot 0,04}{21,952+0,224}=$$

$$=1,4+\frac{0,3152}{22,176}=1,4+0,01421=1,41421.$$

Все десятичные знаки приближенного значения корня верны. ▲

1188. Приняв $n=2$, найти приближенное значение положительного корня уравнения $x^3+x^2-4=0$ с точностью до 0,0001.

△ Положим $x_0=1,3$. Имеем $f(x)=x^3+x^2-4$, $f'(x)=3x^2+2x$, $f''(x)=6x+2$, $b_0=f(1,3)=-0,113$, $b_1=f'(1,3)=7,67$, $b_2=(1/2)\cdot f''(1,3)=(1/2)\cdot 9,8=4,9$. Тогда

$$\xi_2=1,3+\frac{7,67\cdot 0,113}{7,67^2+0,113\cdot 4,9}=1,3+\frac{0,86671}{59,3826}=1,3146.$$

Все десятичные знаки верны. ▲

1189. Приняв $n=2$, найти приближенное значение корня уравнения $x+\ln x=3$ с точностью до 0,001.

1190. С помощью формулы (6) найти приближенное значение $\sqrt[5]{5}$ с точностью до 0,00001.

1191. С помощью формулы (5) вычислить отрицательный корень уравнения $5x^5-5x-47{,}071=0$ с точностью до 0,0001.

§ 2. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Пусть дана таблица значений

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Требуется составить многочлен $y=f(x)$ степени $m\leqslant n-1$, который принимал бы заданные значения y_i при соответствующих значениях x_i, т. е. $y_i=f(x_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Иными словами, график этого многочлена должен проходить через заданные n точек $M_i(x_i;\ y_i)$.

Обозначим через

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

вспомогательный многочлен n-й степени, в котором x_i — заданные табличные значения аргумента. Тогда имеет место равенство

$$f(x)=\frac{y_1\cdot\varphi(x)}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)}+$$
$$+\frac{y_2\cdot\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{y_n\cdot\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})},$$

или

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\cdot\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)}.$$

Это и есть *интерполяционный многочлен Лагранжа.*

1192. Составить многочлен Лагранжа для следующей таблицы значений:

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

△ Вспомогательный многочлен имеет вид $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x:

$$\varphi'(x)=(x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-4)+$$
$$+(x-1)(x-2)(x-3);\ \varphi'(1)=-6,\ \varphi'(2)=2,\ \varphi'(3)=-2,\ \varphi'(4)=6.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4)+$$
$$+\frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4)+\frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)=x+1.$$

Таким образом, в данном случае интерполяционный многочлен есть линейная функция $f(x)=x+1$. ▲

1193. Найти уравнение параболы, проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

△ Вспомогательный многочлен имеет вид $\varphi(x)=(x-2)(x-4)(x-6)\times$ $\times(x-8)(x-10)$. Находим

$$\varphi'(x)=(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-6)(x-8)(x-10)+(x-2)\times$$
$$\times(x-4)(x-8)(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)+(x-2)(x-4)(x-6)(x-8);$$
$$\varphi'(2)=384,\ \varphi'(4)=-96,\ \varphi'(6)=64,\ \varphi'(8)=-96,\ \varphi'(10)=384.$$

Тогда

$$f(x)=\frac{0}{384}(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)+\frac{3}{-96}(x-2)(x-6)(x-8)(x-10)+$$
$$+\frac{8}{64}(x-2)(x-4)(x-8)(x-10)-\frac{6}{96}(x-2)(x-4)(x-6)(x-10)+$$
$$+\frac{0}{384}(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640).$$

Следовательно, искомой является парабола четвертого порядка

$$y=\frac{1}{32}(x^4-26x^3+220x^2-664x+640). \ ▲$$

1194. Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Составить уравнение многочлена, принимающего указанные значения при заданных значениях аргумента.

1195. Построить многочлен, принимающий значения, заданные таблицей

x	1	3	4	6
y	—7	5	8	14

1196. Построить многочлен, график которого проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

2. Интерполяционная формула Ньютона. Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots$ — значения некоторой функции $y=f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (т. е. $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k=\text{const}$).

Введем обозначения:

$y_1-y_0=\Delta y_0,\ y_2-y_1=\Delta y_1, \ldots, y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1}$ — разности первого порядка данной функции;

$\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0,\ \Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1, \ldots$ — разности второго порядка;

. . . .

$\Delta^n y_1-\Delta^n y_0=\Delta^{n+1}y_0,\ \Delta^n y_2-\Delta^n y_1=\Delta^{n+1}y_1, \ldots$ — разности $(n+1)$-го порядка.

Производя последовательные подстановки, получим

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,\ \Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,\ \ldots,$$

$$\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot y_{n-k}.$$

Подобным же образом находим

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,\ y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,\ y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,\ \ldots,$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k y_0 = (1+\Delta)^n \cdot y_0 = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0. \qquad (1)$$

Запишем таблицу разностей:

$$\begin{array}{lllllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
x_1 & y_1 & \Delta y_0 & & & \\
 & & & \Delta^2 y_0 & & \\
x_2 & y_2 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
 & & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
x_3 & y_3 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_2 & \\
 & & & \Delta^2 y_2 & & \\
x_4 & y_4 & \Delta y_3 & & & \\
\ldots & & & & & \ldots
\end{array}$$

Если в формуле (1) считать, что n — не только целое и положительное число, а может быть любым ($n=t$), то получим *интерполяционную формулу Ньютона*:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0. \qquad (2)$$

Мы получили такую функцию от t, которая при $t=0$ обращается в y_0, при $t=1$ — в y_1, при $t=2$ — в y_2 и т. д. Так как последующее значение аргумента x при постоянном шаге h определяется формулой $x_n = x_0 + nh$, то $n = (x_n - x_0)/h$. Тогда, полагая $x = x_0 + th$, т. е. $t = (x - x_0)/h$, приведем формулу (1) к виду

$$y_n = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!\,h^2}\Delta^2 y_0 + \ldots . \qquad (3)$$

1197. Из таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

найти значение y при $x=3{,}1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

△ Составим таблицу разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	3			
		4		
2	7		2	
		6		0
3	13		2	
		8		0
4	21		2	
		10		0
5	31		2	
		12		0
6	43		2	
		14		
7	57			

Здесь $x_0=3$, $x=3,1$, $h=1$. Тогда $t=(x-x_0)/h=(3,1-3)/1=0,1$. Запишем интерполяционный многочлен Ньютона для этого случая:

$$y=y_0+t\cdot\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0,$$

или

$$y=13+0,1\cdot 8+\frac{0,1(0,1-1)}{2}\cdot 2=13,71.$$

Следовательно, при $x=3,1$ и $y=13,71$ интерполяционный многочлен для этой таблицы имеет вид

$$y=3+(x-1)\cdot 4+\frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 2=x^2+x+1. \ ▲$$

1198. Даны десятичные логарифмы чисел: $\lg 2,0=0,30103$, $\lg 2,1=0,32222$, $\lg 2,2=0,34242$, $\lg 2,3=0,36173$, $\lg 2,4=0,38021$, $\lg 2,5=0,39794$. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $\lg 2,03$.

△ Составим таблицу разностей:

x	$\lg x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
2,0	0,30103					
		2119				
2,1	0,32222		—99			
		2020		10		
2,2	0,34242		—89		—4	
		1931		6		6
2,3	0,36173		—83		2	
		1848		8		
2,4	0,38021		—75			
		1773				
2,5	0,39794					

Здесь $x_0=2,0$, $x=2,03$, $h=0,1$. Тогда $t=(x-x_0)/h=(2,03-2,0)/0,1=0,3$. Отсюда

$$y=y_0+t\cdot\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 y_0=$$
$$=0,30103+0,3\cdot 0,02119+\frac{1}{2}\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 0,00099+$$
$$+\frac{1}{6}\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 1,7\cdot 0,00010+\frac{1}{24}\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 1,7\cdot 2,7\cdot 0,00004+$$
$$+\frac{1}{120}\cdot 0,3\cdot 0,7\cdot 1,7\cdot 2,7\cdot 3,7\cdot 0,00006=0,30750.$$

Таким образом, $\lg 2,03=0,30750$. Пятизначная таблица логарифмов дает тот же результат. ▲

1199. Заданы пятизначные логарифмы чисел от 4 до 10 через единицу. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, вычислить четырехзначные логарифмы чисел от 6,5 до 7,0 через 0,1.

1200. Зная квадраты чисел 5, 6, 7, 8, найти квадрат числа 6,25.

1201. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

§ 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Если $f(x)$ — непрерывная и дифференцируемая достаточное число раз на отрезке $[a, b]$ функция и $h=(b-a)/n$, $x_k=x_0+kh$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$, $y_k=f(x_k)$, то имеют место следующие формулы для приближенного вычисления определенных интегралов.

Формулы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx=h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+R_n \quad (1)$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx=h(y_1+y_2+\ldots+y_n)+R_n; \quad (2)$$

предельная абсолютная погрешность

$$R_n\leqslant\frac{h}{2}(b-a)M_1, \quad \text{где} \quad M_1=\max_{[a,\,b]}|f'(x)|. \quad (3)$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n; \quad (4)$$

предельная абсолютная погрешность

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{[a,\,b]}|f''(x)| \tag{5}$$

(точное значение погрешности $\delta_T = -(h^2/12)(b-a)f''(c)$, где $a < c < b$).

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2})]+R_n; \tag{6}$$

предельная абсолютная погрешность

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_3, \quad \text{где} \quad M_3 = \max_{[a,\,b]}|f^{IV}(x)| \tag{7}$$

(точное значение погрешности $\delta_S = -(h^4/180)(b-a)f^{IV}(c)$, где $a < c < b$).

Если отыскание четвертой производной подынтегральной функции затруднительно, то для оценки погрешности вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по формуле Симпсона можно применять следующий прием.

Полагая $n=4k$, вычисляют приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона для шага $h=(b-a)/(4k)$; пусть найденное значение интеграла есть I_1; затем шаг h удваивают и вычисление по формуле Симпсона проводят для шага $h_1=(b-a)/(2k)$; пусть найденное значение интеграла есть I_2; погрешность второго вычисления приблизительно в 16 раз больше погрешности первого и обе они имеют одинаковый знак. Поэтому погрешность первого вычисления [при шаге $h=(b-a)/(4k)$] определяется следующей формулой (учитывающей и знак погрешности):

$$\delta_S \approx (I_1 - I_2)/15$$

(этот способ можно назвать оценкой погрешности формулы Симпсона по методу удвоения шага вычислений).

1202. Вычислить по формуле прямоугольников $I=\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

△ Здесь $y=\sqrt{x}$; при $n=10$ имеем $h=(2-1)/10=0{,}1$. Точками деления служат $x_0=1$, $x_1=x_0+h=1{,}1$, $x_2=1{,}2$, $\ldots$, $x_9=1{,}9$. Найдем соответствующие значения подынтегральной функции: $y_0=\sqrt{x_0}=\sqrt{1}=1$, $y_1=\sqrt{1{,}1}=1{,}049$, $y_2=1{,}095$, $y_3=1{,}140$, $y_4=1{,}183$, $y_5=1{,}225$, $y_6=1{,}265$, $y_7=1{,}304$, $y_8=1{,}342$, $y_9=1{,}378$.

Используя формулу прямоугольников, получим

$$I=0{,}1\,(1{,}000+1{,}049+1{,}095+1{,}140+1{,}183+1{,}225+1{,}265+1{,}304+1{,}342+$$
$$+1{,}378)=0{,}1\cdot 11{,}981 \approx 1{,}20.$$

Оценим погрешность. В данном случае $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$ на отрезке $[1,\ 2]$ достигает наибольшего значения, равного 0,5, при $x=1$. Таким образом, $|f'(x)| \leqslant M_1 = 1/2$. Отсюда по формуле (3) находим

$$R_n \leqslant \frac{0{,}1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=0{,}025.$$

Следовательно, $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025$.

Вычислим для сравнения этот же интеграл по формуле Ньютона—Лейбница:

$$I=\int_1^2 \sqrt{x}\,dx=\int_1^2 x^{1/2}\,dx=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\approx 1{,}219.$$

Таким образом, действительно, истинное значение интеграла лежит в найденном интервале. ▲

1203. Вычислить тот же интеграл по формуле трапеций, приняв $n=10$; оценить погрешность.

△ При тех же обозначениях, используя формулу трапеций, получим

$$I=0{,}1\cdot\left(\frac{1+1{,}414}{2}+1{,}049+1{,}095+1{,}140+1{,}183+\right.$$
$$\left.+1{,}225+1{,}265+1{,}304+1{,}342+1{,}378\right)=1{,}218.$$

Далее, $f''(x)=-1/(4\sqrt{x^3})$; $|f''(x)|\leqslant 1/4$ на отрезке $[1, 2]$. Таким образом, по формуле (5) находим

$$R_n\leqslant\frac{0{,}1}{12}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\approx 0{,}002.$$

Итак, $I\approx 1{,}218\pm 0{,}002$. ▲

1204. Вычислить приближенно по формуле Симпсона $I=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$ с точностью до $0{,}001$.

△ Прежде всего, пользуясь формулой (7), определим, какой шаг h нужно взять для достижения заданной точности. Имеем

$$f(x)=\sqrt{1+x^2};\quad f'(x)=x/\sqrt{1+x^2};\quad f''(x)=1/\sqrt{(1+x^2)^3};$$
$$f'''(x)=-3x/\sqrt{(1+x^2)^5};\quad f^{\mathrm{IV}}(x)=(12x^2-3)/\sqrt{(1+x^2)^7}.$$

Наибольшее значение $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ на отрезке $[0, 1]$ достигается в точке $x=0$: $|f^{\mathrm{IV}}(0)|=3$. Значит,

$$R_n\leqslant\frac{h^4}{180}(b-a)\,|f^{\mathrm{IV}}(x)|=\frac{h^4}{180}\cdot 1\cdot 3.$$

Так как эта погрешность должна быть меньше $0{,}001$, то $h^4/60\leqslant 0{,}001$, т. е. $h^4\leqslant 0{,}06$. Можно принять $h=0{,}5$ (если $h=0{,}5$, то $h^4=0{,}0625$), т. е. несколько больше нужной величины, но это не отразится на точности вычислений, поскольку при оценке была использована предельная абсолютная погрешность — величина заведомо бо́льшая фактической погрешности. Итак, для достижения нужной точности достаточно разбить интервал интегрирования пополам.

Вычислим значения функции $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ при $x=0$; $0{,}5$ и 1: $f(0)=1{,}0000$; $f(0{,}5)=1{,}1180$; $f(1{,}0)=1{,}4142$ (вычисления проведем с одним запасным знаком). Поэтому

$$I\approx\frac{0{,}5}{3}\cdot[1{,}0000+4\cdot 1{,}1180+1{,}4142]=1{,}1477.$$

Таким образом, округляя последний знак, находим $I\approx 1{,}148$.

Вычислим для сравнения точное значение этого интеграла по формуле Ньютона—Лейбница:

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx=\left[\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]\approx\frac{1}{2}(1{,}4142+0{,}8814)\approx 1{,}1478.$$

Таким образом, значение этого интеграла, вычисленное по формуле Симпсона, имеет даже не три, а четыре верных знака после запятой. ▲

1205. Вычислить по формуле Симпсона $I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, приняв $n=8$. Вычисления вести с шестью знаками после запятой. Оценить погрешность полученного результата, пользуясь способом удвоения шага вычислений; сравнить результат с истинным значением интеграла, взяв последнее с одним запасным (седьмым) знаком.

△ Нужно определить значения подынтегральной функции для следующих значений аргумента ($h_1=0{,}125$): $x_0=0$; $x_1=0{,}125$; ...; $x_8=1{,}0$. Находим соответствующие значения $f(x)=1/(1+x^2)$: $y_0=1{,}000000$; $y_1=0{,}984625$; $y_2=0{,}941176$; $y_3=0{,}876712$; $y_4=0{,}800000$; $y_5=0{,}719101$; $y_6=0{,}640000$; $y_7=0{,}566389$; $y_8=0{,}500000$. Подставляем эти данные в формулу Симпсона при $h_1=0{,}125$ и $h_2=0{,}25$:

$$I_1=\frac{h_1}{3}\left[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)\right]=$$

$$=\frac{0{,}125}{3}\cdot[1{,}000000+0{,}500000+4(0{,}984615+0{,}876712+0{,}719101+0{,}566371+$$

$$+2\cdot(0{,}941176+0{,}800000+0{,}640000)]=\frac{1}{24}\cdot 18{,}849548\approx 0{,}785398;$$

$$I_2=\frac{h_2}{3}\left[y_0+y_8+4(y_2+y_6)+2y_4\right]=$$

$$=\frac{0{,}25}{3}\cdot[1{,}000000+0{,}500000+4(0{,}941176+0{,}640000)+2\cdot 0{,}800000]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 9{,}424704=0{,}785392.$$

Отсюда

$$\delta_{I_1}\approx\frac{I_1-I_2}{15}=\frac{0{,}000006}{15}\approx 0{,}0000004.$$

Таким образом, все шесть знаков I_1 должны быть точными. Истинное значение интеграла есть

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}7853979,\ \ldots,$$

что подтверждает найденный результат. ▲

1206. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$ с точностью до 0,0001, приняв $n=10$.

1207. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_4^8 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, приняв $n=8$. Оценить погрешность по методу удвоения шага; сравнить с точным значением интеграла. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

1208. Вычислить по формуле трапеций $I=\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}5\sin^2 x}\,dx$, приняв $n=6$; оценить погрешность заранее, чтобы определить, с каким числом знаков (при одном запасном) надо вести вычисления.

1209. Вычислить по формуле трапеций $\ln 2=\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$ с точностью до 0,01, приняв $n=5$.

1210. Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$ с точностью до 0,01, приняв $n=4$.

1211. Вычислить по формуле трапеций $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,01, приняв $n=4$.

1212. Вычислить по формуле трапеций $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$ с точностью до 0,01, приняв $n=6$.

§ 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Аналог формул прямоугольников. а) Рассмотрим замкнутую область D, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, причем* $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ (рис. 75). Разделим область D на n частей линиями

$$y=\varphi(x)+\frac{j}{n}[\psi(x)-\varphi(x)] \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Далее, разобьем отрезок $[a, b]$ на m равных частей точками $a=x_0<x_1<$ $<x_2<\ldots<x_{m-1}<x_m=b$ и через эти точки проведем прямые, параллельные оси Oy:

$$x=x_i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Двумя семействами линий (1) и (2) область D разделится на mn криволинейных четырехугольников с вершинами в точках $P_{ij}(x_i;\ y_{ij})$, $P_{i+1,\,j}(x_{i+1};\ y_{i+1,\,j})$, $P_{i,\,j+1}(x_i;\ y_{i,\,j+1})$, $P_{i+1,\,j+1}(x_{i+1},\ y_{i+1,\,j+1})$; $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, m$; $j=0, 1, 2, \ldots$

* Заметим, что это условие не ограничивает общности рассуждений.

..., n. При фиксированном $i\,(0\leqslant i\leqslant m)$ длина вертикальной стороны четырехугольника не зависит от j и составляет

$$|P_{i,\,j}P_{i,\,j+1}|=\frac{\psi(x_i)-\varphi(x_i)}{n};\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Обозначим площадь криволинейного четырехугольника, изображенного на рис. 76, через $\Delta\omega_{ij}$. Эта площадь вычисляется по формуле

$$\Delta\omega_{ij}=\frac{1}{n}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}[\psi(x)-\varphi(x)]\,dx. \tag{3}$$

Из равенства (3) следует, что значение $\Delta\omega_{ij}$ от j не зависит. Учитывая это, обозначим $\Delta\omega_{ij}=\Delta\omega_i$; $0\leqslant i\leqslant m-1$, $0\leqslant j\leqslant n-1$. Двойной интеграл

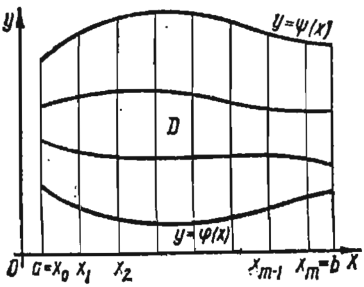

Рис. 75

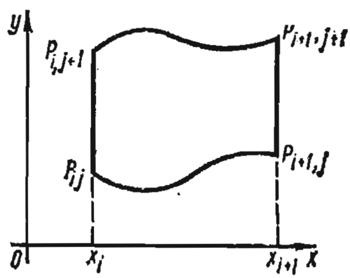

Рис. 76

$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy$, где функция $f(x,\ y)$ непрерывна в области D, заменим двумерной интегральной суммой, выбирая в качестве узлов точки P_{ij}:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{ij}, \tag{4}$$

где

$$z_{ij}=f(x_i,\ y_{ij}),\ y_{ij}=\varphi(x_i)+\frac{j}{n}[\psi(x_i)-\varphi(x_i)]. \tag{5}$$

Выбирая в качестве узлов последовательно точки $P_{i+1,\,j}$, $P_{i,\,j+1}$, $P_{i+1,\,j+1}$, получим соответственно еще три формулы для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{i+1,\,j}; \tag{6}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{i,\,j+1}; \tag{7}$$

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}z_{i+1,\,j+1}. \tag{8}$$

Формулы (4), (6), (7) и (8) являются аналогом формул прямоугольников ія приближенного вычисления определенного интеграла. Очевидно, что эти формулы тем точнее, чем больше числа m и n, т. е. чем меньше длина каждого из отрезков разбиения.

б) В частном случае, когда область D — прямоугольник, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, площади $\Delta\omega_i$ элементарных площадок равны между собой и вычисляются по формуле $\Delta\omega = (b-a)(d-c)/(mn)$. Формулы (4), (6), (7) и (8) соответственно примут вид

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}, \tag{9}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}, \tag{10}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}, \tag{11}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}. \tag{12}$$

Формулы (9) — (12) можно назвать *формулами параллелепипедов.*

в) Если функция $f(x, y)$ монотонна по каждой из переменных x и y, то для двойного интеграла справедлива оценка

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\mu \leqslant \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{mn} M, \tag{13}$$

где M и μ — соответственно наибольшая и наименьшая из сумм $\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{ij}$, $\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j}$, $\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i,\,j+1}$, $\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} z_{i+1,\,j+1}$.

г) Пусть функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в области D — прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Тогда оценка погрешности приближенных формул (9)—(12) определяется с помощью неравенства

$$|R| < \frac{(b-a)(d-c)}{2}\left[\frac{M_1(b-a)}{m} + \frac{M_2(d-c)}{n}\right], \tag{14}$$

где

$$M_1 = \max_{\substack{a \leqslant x \leqslant b\\ c \leqslant y \leqslant d}} |f'_x(x, y)|, \quad M_2 = \max_{\substack{a \leqslant x \leqslant b\\ c \leqslant y \leqslant d}} |f'_y(x, y)|.$$

2. Аналог формулы касательных. а) Рассмотрим двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$. Пусть область D — прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, во всех точках которого выполнены условия

$$AC - B^2 > 0, \quad A < 0, \quad C < 0, \tag{15}$$

где $A = f''_{x^2}$, $C = f''_{y^2}$, $B = f''_{xy}$. Эти условия обеспечивают выпуклость поверхности $z = f(x, y)$ во всех точках области D (аналогичным образом условия $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, $C > 0$ обеспечивают вогнутость этой поверхности).

Тогда для приближенного вычисления двойного интеграла справедлива формула

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx (b-a)(d-c) f(\overline{x}, \overline{y}), \tag{16}$$

где $\overline{x}=(a+b)/2$, $\overline{y}=(c+d)/2$.

б) Разобьем область D прямыми $x=x_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m)$ и $y=y_j$ $(j=0, 1, 2, \ldots, n)$ на mn равных прямоугольников. Вычисляя двойной интеграл по каждому элементарному прямоугольнику с помощью формулы (16) и суммируя полученные результаты, приходим к следующей формуле для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j), \tag{17}$$

где $\overline{x}_i=(x_{i+1}+x_i)/2$, $\overline{y}_j=(y_{j+1}+y_j)/2$.

Формула (17) дает приближенное значение двойного интеграла с избытком, если выполнены условия (15). Заметим, что формулой (17) можно пользоваться и в том случае, когда первое из условий (15) не выполнено. Однако в этом случае нельзя указать, найдено ли приближенное значение двойного интеграла с недостатком или с избытком.

3. Аналог формулы трапеций. а) Рассмотрим двойной интеграл $I = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. Тогда для приближенного вычисления двойного интеграла справедлива формула

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c))}{4}(z_1+z_2+z_3+z_4), \tag{18}$$

где $z_1=f(a, c)$, $z_2=f(b, c)$, $z_3=f(a, d)$, $z_4=f(b, d)$.

Эта формула дает приближенное значение двойного интеграла с избытком, если выполнено условие (15).

Оценка погрешности формулы (18) определяется неравенством

$$(b-a)(d-c) f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) < \iint_D f(x, y)\,dx\,dy <$$

$$< (b-a)(d-c)\frac{f(a, c)+f(b, c)+f(a, d)+f(b, d)}{4}. \tag{19}$$

б) Разобьем область D прямыми, параллельными осям координат, на mn равных прямоугольников. Вычисляя двойной интеграл по каждому элементарному прямоугольнику с помощью формулы (18) и суммируя полученные результаты, приходим к следующей формуле для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{4mn}(S_0+2S_1+4S_2), \tag{20}$$

где $S_0=z_{00}+z_{m0}+z_{0n}+z_{mn}$ — сумма значений функции в вершинах прямоугольника; $S_1=\sum_{i=1}^{m-1}(z_{i0}+z_{in})+\sum_{j=1}^{n-1}(z_{0j}+z_{mj})$ — сумма значений функции в узлах, лежащих на сторонах прямоугольника, не считая вершин; $S_2=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}$ — сумма значений функции в узлах, лежащих внутри прямоугольника.

При выполнении условий (15) по аналогии с неравенством (19) получаем оценку

$$\frac{(b-a)(d-c)}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) < \iint_D f(x, y)\,dx\,dy <$$
$$< \frac{(b-a)(d-c)}{4mn}(S_0+2S_1+4S_2), \tag{21}$$

где $\overline{x}_i=(x_{i+1}+x_i)/2$, $\overline{y}_j=(y_{j+1}+y_j)$.

Для оценки погрешности приближенного равенства (20) также справедливо неравенство (14).

в) Если область D ограничена линиями $x=a$, $x=b$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, то в качестве приближенного значения двойного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ можно рассматривать среднее арифметическое результатов приближенных вычислений двойного интеграла по формулам (4), (6), (7) и (8):

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{m-1}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{n-1}(z_{ij}+z_{i+1,\,j}+z_{i,\,j+1}+z_{i+1,\,j+1}), \tag{22}$$

где $\Delta\omega_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, m-1)$ вычисляются по формуле (3), а значения z_{ij} — по формулам (5). Формулы (4), (6), (7), (8) и (22) целесообразно использовать в тех случаях, когда точное или приближенное вычисление площадей $\Delta\omega_i$ не вызывает особых затруднений.

4. Аналог формул Симпсона. а) Рассмотрим случай прямоугольной области D, заданной неравенствами $-h\leqslant x\leqslant h$, $-l\leqslant y\leqslant l$. Подберем коэффициенты многочлена третьей степени

$$P_3(x, y)=a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+$$
$$+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$$

так, чтобы в специальным образом выбранных пяти точках (узлах) значения функции $f(x, y)$ и многочлена $P_3(x, y)$ совпали. Тогда

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \approx \int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} P_3(x, y)\,dx\,dy.$$

Учитывая, что $\int\limits_{-a}^{a}\varphi(t)\,dt=0$, если $\varphi(-t)=-\varphi(t)$ на $[-a, a]$, получим формулу

$$\int_{-h}^{h}\int_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{4hl}{3}(a_{20}h^2+a_{02}l^2+3a_{00}). \tag{23}$$

Если выбрать узлы так, как показано на рис. 77 и 78, то формулу (23) можно записать соответственно в виде

$$\int_{-l}^{l}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{hl}{3}[f(h, l)+f(-h, l)+f(h, -l)+f(-h, -l)+8f(0, 0)] \tag{24}$$

или

$$\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_{-l}^{l} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{2}{3} hl\,[f(h, 0)+f(-h, 0)+f(0, l)+f(0, -l)+2f(0, 0)]. \tag{25}$$

Для прямоугольника $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ формулы (24) и (25) соответственно примут вид

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\,dx\,dy \approx$$

$$\approx \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[f(a, c)+f(a, d)+f(b, c)+f(b, d)+8f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right], \tag{26}$$

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{6}\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)+f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)+f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right]. \tag{27}$$

Формулы (26) и (27) тем точнее, чем меньше размеры прямоугольника; как следует из изложенного, они точны для многочленов третьей степени.

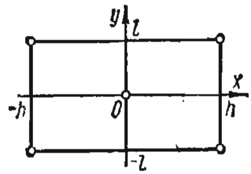

Рис. 77

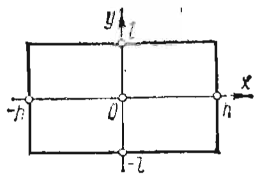

Рис. 78

б) Разбивая прямоугольник прямыми, параллельными осям координат, на $4mn$ равных прямоугольников, применяя к каждому такому прямоугольнику формулу (26) и суммируя полученные результаты, приходим к формуле

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{12mn}(S_0+2S_1+4S_2+8S_3), \tag{28}$$

где

$$S_0 = f(a, c)+f(a, d)+f(b, c)+f(b, d),$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m-1}[f(x_{2i}, c)+f(x_{2i}, d)] + \sum_{j=1}^{n-1}[f(a, y_{2j})+f(b, y_{2j})],$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i}, y_{2j}), \qquad S_3 = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right).$$

Если в предыдущих рассуждениях использовать формулу (27), то

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{6mn}(S_1+S_2+4S_3), \tag{29}$$

где

$$S_1=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f\left(a, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)+f\left(b, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\left[f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, c\right)+f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, d\right)\right],$$

$$S_2=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}f\left(\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right),$$

$$S_3=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(f\frac{x_{2i}+x_{2(i+1)}}{2}, y_{2j}\right)+f\left(x_{2i}, \frac{y_{2j}+y_{2(j+1)}}{2}\right)\right].$$

Формулы (25)—(28) дают точный результат, если подынтегральная функция является многочленом не выше третьей степени от переменных x, y, т. е. $f(x, y)\equiv P_3(x, y)$.

в) Пусть область D определена неравенствами $x_0\leqslant x\leqslant x_2$, $y_0(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)$. Прямой $x_1=(x_0+x_2)/2$ и линией $y_1=[y_0(x)+y_2(x)]/2$ разобьем область D на четыре части (рис. 79). Обозначим $y_j(x_i)=y_{ij}$. Как и ранее, $f(x_i, y_{ij})=$ $=z_{ij}$ $(i, j=0, 1, 2)$. Рассмотрим

$$I=\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_{x_0}^{x_2}dx\int_{y_0(x)}^{y_2(x)}f(x, y)\,dy.$$

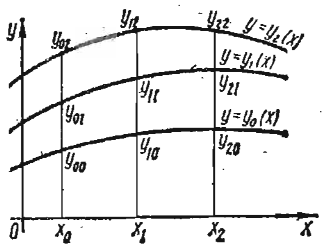

Рис. 79

Применяя несколько раз малую формулу Симпсона, в результате получим следующее приближенное равенство:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\approx\frac{x_2-x_0}{36}[(y_{02}-y_{00})(z_{00}+4z_{01}+z_{02})+$$

$$+4(y_{12}-y_{10})(z_{10}+4z_{11}+z_{12})+(y_{22}-y_{20})(z_{20}+4z_{21}+z_{22})]. \qquad (30)$$

Заметим, что если $y_2(x)-y_0(x)=k=\text{const}$, то формула (30) принимает вид

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\approx k\frac{x_2-x_0}{36}[z_{00}+z_{02}+z_{20}+z_{22}+4(z_{01}+z_{10}+z_{12}+z_{21})+16z_{11}. \qquad (31)$$

В частности, формула (31) справедлива, если областью интегрирования D является прямоугольник $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ со сторонами, параллельными осям координат. В этом случае

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\approx\frac{(b-a)(d-c)}{36}\left\{f(a, c)+f(a, d)+f(b, c)+\right.$$

$$+f(b, d)+4\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right)+f\left(b, \frac{c+d}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}, c\right)+\right.$$

$$\left.\left.+f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right]+16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\right\}. \qquad (32)$$

Формула (30) дает точный результат, если подынтегральная функция является многочленом третьей степени относительно y при фиксированном x и результат вычисления внутреннего интеграла — многочленом не выше третьей степени по x. Формула (32) точна, если $f(x, y)$ — многочлен третьей степени относительно x при фиксированном y (или относительно y при фиксированном x).

г) Если областью интегрирования D является круг с центром в начале координат и радиусом r (рис. 80), то для приближенного вычисления двойного интеграла целесообразно перейти к полярным координатам:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

Разделим прямоугольник в плоскости $\varphi O\rho$ (рис. 81) прямыми $\varphi=\pi$ и $\rho=r/2$ на четыре равные части. Вычислив значения подынтегральной функции в узлах и применив последовательно формулы (24) и (26), соответственно получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{S}{3}\left[f(r, 0) + 2f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right], \tag{33}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{S}{3}\left[f\left(\frac{r}{2}, 0\right) + f(-r, 0) + f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right], \tag{34}$$

где $S=\pi r^2$ — площадь круга. Формулы (33) и (34) точны, если $F(\rho, \varphi)$ — многочлен не выше третьей степени относительно ρ и φ.

Используя формулу (32), получим

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{S}{9}\left[f(r, 0) + 2f\left(\frac{r}{2}, 0\right) + 2f(-r, 0) + 4f\left(-\frac{r}{2}, 0\right)\right]. \tag{35}$$

Эта формула точна, если функция $F(\rho, \varphi)$ является многочленом не выше третьей степени относительно ρ при фиксированном φ (или относительно φ при фиксированном ρ).

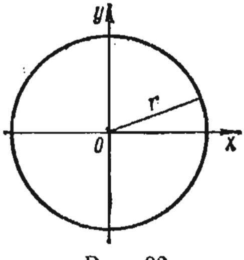

Рис. 80

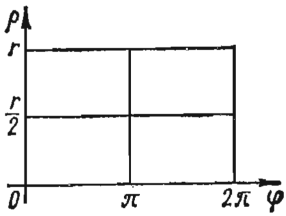

Рис. 81

д) Если область интегрирования ограничена эллипсом $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, то с помощью преобразования координат по формулам $x=a\rho\cos\varphi$, $y=a\rho\sin\varphi$ двойной интеграл можно переписать так:

$$I = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} ab\rho\cdot f(a\rho\cos\varphi,\ b\rho\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi.$$

Формулы (24), (25) и (32) для такой области соответственно примут вид

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f(a, 0) + 2f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{36}$$

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f\left(\frac{a}{2}, 0\right) + f(-a, 0) + f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{37}$$

$$I \approx \frac{S}{3}\left[f(a, 0) + 2f\left(\frac{a}{2}, 0\right) + 2f(-a, 0) + 4f\left(-\frac{a}{2}, 0\right)\right], \tag{38}$$

где $S=\pi ab$ — площадь эллипса.

1213. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D (x+y)^2\,dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x=1$, $x=3$, $y=x^2$, $y=x+x^2$.

△ Сначала найдем точное значение интеграла:

$$I=\int\limits_1^3\int\limits_{x^2}^{x+x^2}(x+y)^2\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int\limits_1^3 (x+y)^3\Big|_{x^2}^{x+x^2}dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^3[(2x+x^2)^3-(x+x^2)^3]\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^3(7x^3+9x^4+3x^5)\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{7}{4}x^4+\frac{9}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6\right]_1^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{567}{4}+\frac{2187}{5}+\frac{729}{2}-\frac{7}{4}-\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right)=313{,}2.$$

Найдем приближенные значения двойного интеграла по формулам (4), (6), (7), (8) и (22) и сравним эти значения с точными.

Положим $m=4$, $n=4$. Значения y_{ij} ($i=0,\ 1,\ 2,\ 3$; $j=0,\ 1,\ 2,\ 3$) вычислим, пользуясь формулой (5):

$$y_{ij}=x_i^2+\frac{x_i}{4}j=x_i\left(x_i+\frac{1}{4}j\right).$$

Так как $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $x_2=2$, $x_3=2{,}5$, $x_4=3$, то $y_{00}=1$; $y_{01}=1{,}25$; $y_{02}=1{,}5$; $y_{03}=1{,}75$; $y_{04}=2$; $y_{10}=2{,}25$; $y_{11}=2{,}625$; $y_{12}=3$; $y_{13}=3{,}375$; $y_{14}=3{,}75$, $y_{20}=3{,}75$; $y_{21}=4{,}5$; $y_{22}=5$; $y_{23}=5{,}5$; $y_{24}=6$; $y_{30}=6{,}25$; $y_{31}=6{,}875$; $y_{32}=7{,}5$; $y_{33}=8{,}125$; $y_{34}=8{,}75$; $y_{40}=9$; $y_{41}=9{,}75$; $y_{42}=10{,}5$; $y_{43}=11{,}125$; $y_{44}=12$. Согласно формуле (3), имеем

$$\Delta\omega_i=\frac{1}{4}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}x\,dx=\frac{1}{8}x^2\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}=\frac{1}{8}\left(x_{i+1}^2-x_i^2\right).$$

Для $i=0,\ 1,\ 2,\ 3$ получим $\Delta\omega_0=0{,}156$; $\Delta\omega_1=0{,}219$; $\Delta\omega_2=0{,}281$; $\Delta\omega_3=0{,}344$.

Далее, так как

$$z_{ij}=(x_i+y_{ij})^2\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ j=0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

то $z_{00}=4$; $z_{01}=5{,}063$; $z_{02}=6{,}25$; $z_{03}=7{,}563$; $z_{04}=9$; $z_{10}\approx 14{,}063$; $z_{11}\approx 17{,}016$; $z_{12}=20{,}25$; $z_{13}\approx 23{,}766$; $z_{14}\approx 27{,}563$; $z_{20}=36$; $z_{21}=42{,}25$; $z_{22}=49$; $z_{23}=56{,}25$; $z_{24}=64$; $z_{30}\approx 76{,}563$; $z_{31}\approx 87{,}891$; $z_{32}=100$; $z_{33}=112{,}891$; $z_{34}\approx 126{,}563$; $z_{40}\approx 144$; $z_{41}\approx 162{,}563$; $z_{42}=182{,}250$; $z_{43}=199{,}516$; $z_{44}=225$.

Используя теперь формулы (4), (6), (7) и (8), соответственно находим

$$\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{3}z_{ij}=\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\,(z_{i0}+z_{i1}+z_{i2}+z_{i3})\approx$$

$$\approx 22{,}876\cdot 0{,}156+75{,}095\cdot 0{,}219+183{,}5\cdot 0{,}281+377{,}345\cdot 0{,}344\approx 201{,}386;$$

$$\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{3}z_{i+1,\,j}=\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\,(z_{i+1,\,0}+z_{i+1,\,1}+z_{i+1,\,2}+z_{i+1,\,3})\approx$$

$$\approx 75{,}095\cdot 0{,}156+183{,}5\cdot 0{,}219+377{,}345\cdot 0{,}281+688{,}329\cdot 0{,}344\approx 394{,}721.$$

$$\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{3}z_{i,\,j+1}=\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\,(z_{i1}+z_{i2}+z_{i3}+z_{i4})\approx$$

$$\approx 27{,}876\cdot 0{,}156+88{,}595\cdot 0{,}219+211{,}5\cdot 0{,}281+427{,}345\cdot 0{,}344\approx 230{,}190;$$

$$\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\sum_{j=0}^{3}z_{i+1,\,j+1}=\sum_{i=0}^{3}\Delta\omega_i\,(z_{i+1,\,1}+z_{i+1,\,2}+z_{i+1,\,3}+z_{i+1,\,4})\approx$$
$$\approx 88{,}595\cdot 0{,}156+211{,}5\cdot 0{,}219+427{,}345\cdot 0{,}281+769{,}329\cdot 0{,}344\approx 444{,}873.$$

Абсолютная и относительная погрешности полученных значений довольно велики, что объясняется малостью чисел m и n.

Применяя приближенную формулу (22), получим

$$I\approx\frac{201{,}386+230{,}190+394{,}721+444{,}873}{4}=\frac{1271{,}17}{4}\approx 317{,}793.$$

Тогда относительная погрешность

$$\delta=\frac{317{,}792-313{,}2}{313{,}2}\cdot 100\%\approx 1{,}3\%.\ \blacktriangle$$

1214. Используя неравенство (21), дать оценку двойного интеграла $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=4$, $y=1$, $y=5$.

$\triangle$ Здесь $f(x, y)=x^2+y^2$, $f'_x(x, y)=2x$, $f'_y(x, y)=2y$, $f''_{x^2}(x, y)=2$, $f''_{y^2}(x, y)=2$, $f''_{xy}(x, y)=0$, поэтому условия $AC-B^2>0$, $A>0$, $C>0$ выполнены. Положим $m=4$, $n=4$. Значения x и y, соответствующие точкам разбиения, таковы: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $y_0=1$, $y_1=2$, $y_2=3$, $y_3=4$, $y_4=5$. Так как $z_{ij}=x_i^2+y_j^2$, то $z_{00}=1$, $z_{01}=4$, $z_{02}=9$, $z_{03}=16$, $z_{04}=25$, $z_{10}=2$, $z_{11}=5$, $z_{12}=10$, $z_{13}=17$, $z_{14}=26$, $z_{20}=5$, $z_{21}=8$, $z_{22}=13$, $z_{23}=20$, $z_{24}=29$, $z_{30}=10$, $z_{31}=13$, $z_{32}=18$, $z_{33}=25$, $z_{34}=34$, $z_{40}=17$, $z_{41}=20$, $z_{42}=25$, $z_{43}=22$, $z_{44}=41$. Согласно формуле (20) имеем

$$I\approx\frac{1}{4}(S_0+2S_1+4S_2),$$

где $S_0=1+25+17+41=84$, $S_1=2+5+10+20+25+32+34+29+26+4+9+16=212$, $S_2=5+10+17+8+13+20+13+18+25=129$. Следовательно,

$$I\approx\frac{1}{4}(84+2\cdot 212+4\cdot 129)=\frac{1}{4}\cdot 1024=256.$$

Для приближенного вычисления двойного интеграла по формуле (17) сначала найдем $\bar{x}_i=(x_{i+1}+x_i)/2$, $\bar{y}_j=(y_{j+1}+y_j)/2$ ($i=0, 1, 2, 3$; $j=0, 1, 2, 3$); имеем $\bar{x}_0=0{,}5$; $\bar{x}_1=1{,}5$; $\bar{x}_2=2{,}5$; $\bar{x}_3=3{,}5$; $\bar{y}_0=1{,}5$; $\bar{y}_1=2{,}5$; $\bar{y}_2=3{,}5$; $\bar{y}_3=4{,}5$. Обозначим $\bar{z}_{ij}=\bar{x}_i^2+\bar{y}_j^2$ и вычислим

$$\begin{aligned}
&\bar{z}_{00}=0{,}5^2+1{,}5^2=2{,}5; &&\bar{z}_{10}=1{,}5^2+1{,}5^2=4{,}5;\\
&\bar{z}_{01}=0{,}5^2+2{,}5^2=6{,}5; &&\bar{z}_{11}=1{,}5^2+2{,}5^2=8{,}5;\\
&\bar{z}_{02}=0{,}5^2+3{,}5^2=12{,}5; &&\bar{z}_{12}=1{,}5^2+3{,}5^2=14{,}5;\\
&\bar{z}_{03}=0{,}5^2+4{,}5^2=20{,}5; &&\bar{z}_{13}=1{,}5^2+4{,}5^2=22{,}5;\\
&\bar{z}_{20}=2{,}5^2+1{,}5^2=8{,}5; &&\bar{z}_{30}=3{,}5^2+1{,}5^2=14{,}5;\\
&\bar{z}_{21}=2{,}5^2+2{,}5^2=12{,}5; &&\bar{z}_{31}=3{,}5^2+2{,}5^2=18{,}5;\\
&\bar{z}_{22}=2{,}5^2+3{,}5^2=18{,}5; &&\bar{z}_{32}=3{,}5^2+3{,}5^2=24{,}5;\\
&\bar{z}_{23}=2{,}5^2+4{,}5^2=26{,}5; &&\bar{z}_{33}=3{,}5^2+4{,}5^2=32{,}5.
\end{aligned}$$

Тогда

$$I \approx \frac{4\cdot 4}{4\cdot 4}(2,5+6,5+12,5+20,5+4,5+8,5+14,5+22,5+8,5+$$
$$+12,5+18,5+26,5+14,5+18,5+24,5+32,5)=248.$$

Итак, $248 < I < 256$.
Найдем точное значение интеграла:

$$I=\int\limits_0^4\int\limits_1^5 (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^4 \left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_1^5 dx=$$
$$=\int\limits_0^4\left(5x^2+\frac{125}{3}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^3+\frac{124}{3}x\right]_0^4=250\frac{2}{3}\approx 250,667.$$

Таким образом, приближенные формулы (20) и (17) дают соответственно относительные погрешности

$$\delta_1=\frac{256-250,667}{250,667}\cdot 100\% \approx 2,1\%;\quad \delta_2=\frac{250,667-248}{250,667}\cdot 100\% \approx 1,1\%. \blacktriangle$$

1215. Используя формулу (32), вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D (x^2+2y)\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 6$.

△ Вычислим точное значение интеграла:

$$I=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^6 (x^2+2y)\,dy=\int\limits_0^4\left[x^2y+y^2\right]_0^6 dx=\int\limits_0^4 (6x^2+36)\,dx=\left[2x^3+36x\right]_0^4=272.$$

Здесь $a=0$, $b=4$, $c=0$, $d=6$; $f(x,\ y)=x^2+2y$; $f(a,\ c)=0$; $f(a,\ d)=12$; $f(b,\ c)=16$; $f(b,\ d)=28$; $f\left(a,\ \frac{c+d}{2}\right)=6$; $f\left(b,\ \frac{c+d}{2}\right)=22$; $f\left(\frac{a+b}{2},\ c\right)=4$; $f\left(\frac{a+b}{2},\ d\right)=16$; $f\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{c+d}{2}\right)=10$. Применяя формулу (32), находим

$$I=\int\limits_0^4\int\limits_0^6 (x^2+2y)\,dx\,dy=\frac{4\cdot 6}{36}[0+12+16+28+4(6+22+4+16)+16\cdot 10]=$$
$$=\frac{2}{3}(56+4\cdot 48+160)=272.$$

Мы получили точный результат, так как подынтегральная функция $f(x,y)=$ $=x^2+2y$ — многочлен относительно x и y, имеющий степень ниже третьей. ▲

1216. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)^{3/2}dx\,dy$, если область D определена неравенствами $-3\leqslant x\leqslant 3$, $-2\leqslant y\leqslant$ $\leqslant 2$.

△ Перейдем к полярным координатам, полагая $x=3\rho\cos\varphi$, $y=2\rho\sin\varphi$. Тогда $x^2/9+y^2/4=\rho^2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$. Воспользовавшись формулой (38), найдем приближенное значение интеграла:

$$I \approx \frac{2}{3}\pi\left(1+2\cdot\frac{1}{8}+2+4\cdot\frac{1}{8}\right)=\frac{2}{3}\pi\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=2{,}5\pi.$$

Точное значение интеграла составляет

$$I=6\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^4\,d\rho\,d\varphi=\frac{6}{5}\int_0^{2\pi}\rho^5\Big|_0^1 d\varphi=\frac{6}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi}=2{,}4\pi.$$

Относительная погрешность $\delta=(2{,}5\pi-2{,}4\pi)/2{,}4\pi\cdot 100\% \approx 4{,}2\%$. ▲

1217. Найти приближенное значение двойного интеграла $I=\iint\limits_D\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy$ по формуле (30), если область D ограничена линиями $x=2$, $x=4$, $y=x^2/2$ и $y=2x$.

△ Найдем точное значение интеграла:

$$I=\int_2^4 dx\int_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dy=\int_2^4\left[\frac{x}{2}y+\frac{y^2}{2}\right]_{x^2/2}^{2x}dx=$$

$$=\int_2^4\left(x^2+2x^2-\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{8}\right)dx=\left[x^3-\frac{x^4}{16}-\frac{x^5}{40}\right]_2^4=$$

$$=64-16-25{,}6-8+1+0{,}8=16{,}2.$$

Здесь

$$x_0=2,\ x_2=4,\ x_1=(x_0+x_2)/2=3,\ y_0=x^2/2,\ y_2=2x,\ y_1=(y_0+y_2)/2=x^2/4+x;$$
$$y_{ij}=y_j(x_i);\ y_{00}=y_0(x_0)=2,\ y_{01}=y_1(x_0)=3,\ y_{02}=y_2(x_0)=4,$$
$$y_{10}=y_0(x_1)=4{,}5,\ y_{11}=y_1(x_1)=5{,}25,\ y_{12}=y_2(x_1)=6,$$
$$y_{20}=y_0(x_2)=8,\ y_{21}=y_1(x_2)=8,\ y_{22}=y_2(x_2)=8.$$
$$z_{ij}=f(x_i,\ y_{ij})=x_i/2+y_{ij}\quad (i,\ j=0,\ 1,\ 2);$$
$$z_{00}=3,\ z_{01}=4,\ z_{02}=5,\ z_{10}=6,\ z_{11}=6{,}75,\ z_{12}=7{,}5,\ z_{20}=10,\ z_{21}=10,\ z_{22}=10.$$

По формуле (30) получаем

$$I=\int_2^4\int_{x^2/2}^{2x}\left(\frac{x}{2}+y\right)dx\,dy=\frac{4-2}{36}[(4-2)(3+4\cdot4+5)+4(6-4{,}5)\times$$
$$\times(6+4\cdot6{,}75+7{,}5)+(8-8)(10+4\cdot10+10)]=16\frac{1}{6}=16{,}167.$$ ▲

1218. Используя формулы (26) и (32), найти приближенные значения двойного интеграла $I=\iint\limits_D(xy+3\sqrt{y})\,dx\,dy$, если область D — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 2$, $1\leqslant y\leqslant 9$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ И КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло. а) Требуется вычислить интеграл $\int_0^1 \varphi(t)\,dt$. Пусть t — равномерно распределенная случайная величина, $p(t)$ — плотность распределения вероятности этой случайной величины:

$$p(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 0 & \text{при} \quad t>1.\end{cases}$$

Тогда математическое ожидание случайной функции $\varphi(t)$ определяется равенством

$$M[\varphi(t)]=\int_0^1 \varphi(t)\,p(t)\,dt.$$

Учитывая значения $p(t)$, получим

$$M[\varphi(t)]=\int_0^1 \varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Найдем приближенное значение математического ожидания. Пусть в результате N испытаний получено N значений случайной величины: $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Эти значения можно взять из таблицы случайных чисел (см. табл. VII на с. 415). Тогда приближенное значение $M[\varphi(t)]$, согласно теореме Чебышева, определится из равенства

$$M[\varphi(t)]\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$\int_0^1 \varphi(t)\,(dt)\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i). \tag{3}$$

б) Рассмотрим теперь общий случай: пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Перейдем к новой переменной t с помощью равенства $x=a+(b-a)\,t$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 \varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

где $\varphi(t)=f[a+(b-a)\,t]$. Используя формулу (3) для приближенного вычисления интеграла в правой части равенства (4), получим

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\varphi(t_i), \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i), \tag{5}$$

где $x_i=a+(b-a)\,t_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$.

Расчетная таблица для вычисления определенного интеграла по формуле (5) имеет вид

i	t_i	$x_i=a+(b-a)\,t_i$	$f(x_i)$
1	t_1	x_1	$f(x_1)$
2	t_2	x_2	$f(x_2)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	t_N	x_N	$f(x_N)$
			$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$

Изложенный метод приближенного вычисления определенных интегралов с помощью формулы (5) является одним из частных случаев метода статистических испытаний (метода Монте-Карло).

в) Укажем другой способ вычисления определенных интегралов, основанный на использовании метода Монте-Карло. Из геометрического смысла определенного интеграла следует, что интеграл $I=\int_a^b f(x)\,dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим пря-

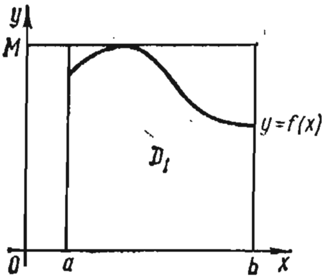

Рис. 82

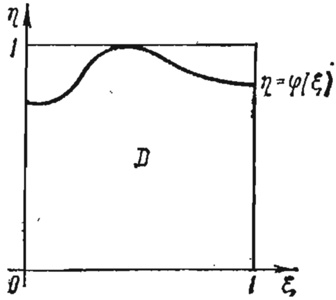

Рис. 83

моугольник, ограниченный прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=M$, где $M \geqslant \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ (рис. 82). Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $f(x)\geqslant 0$ не во всех точках отрезка $[a, b]$, то будем пользоваться тождеством

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b [f(x)+h]\,dx-h\,(b-a),$$

где число $h>0$ подобрано так, что $f(x)+h\geqslant 0$ для $x\in[a, b]$.

Данный метод, так же как и предыдущий, основан на использовании таблицы случайных чисел, принадлежащих промежутку $[0, 1]$. В связи с этим необходимо от переменных x, y, перейти к переменным ξ, η так, чтобы область D_1 преобразовалась в некоторую область D, лежащую внутри единичного квадрата $0\leqslant\xi\leqslant 1$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$ (рис. 83). Для этого положим $x=a+(b-a)\,\xi$,

$y = M\eta$. Тогда $dx = (b-a)\,d\xi$ и при изменении x в пределах от a до b переменная ξ принимает значения от 0 до 1. Данный определенный интеграл преобразуется к виду

$$I = (b-a)\cdot M \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{M} f[a + (b-a)\,\xi]. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что $f(x) = M\varphi(\xi)$. Рассмотрим множество случайных точек $(\xi_1;\ \eta_1)$, $(\xi_2;\ \eta_2)$, ..., $(\xi_N;\ \eta_N)$, равномерно распределенных на единичном квадрате. Пусть в область D попадет n точек. Так как случайные точки распределены равномерно, то

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{\text{по вероятности}} \frac{\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi}{1},$$

где число 1 выражает площадь единичного квадрата. Тогда

$$\int_0^1 \varphi(\xi)\,w\xi \approx \frac{n}{N}. \tag{8}$$

Из равенств (6) и (8) можно заключить, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)\,nM}{N}. \tag{9}$$

Это и есть формула приближенного вычисления определенного интеграла методом Монте-Карло.

Приближенное равенство (9) можно переписать так:

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{M\,(b-a)} \approx \frac{n}{N}, \tag{10}$$

откуда следует, что отношение площади криволинейной трапеции D_1 к площади прямоугольника (см. рис. 82) приближенно равно отношению числа случайных точек, попавших внутрь криволинейной трапеции и внутрь прямоугольника.

Расчетная таблица для вычисления определенного интеграла по формуле (9) имеет вид

i	ξ_i	η_i	$x_i = a + (b-a)\,\xi_i$	$y_i = M\eta_i$	$Y_i = f(x_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$f(x_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$f(x_2)$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$f(x_N)$

Среди значений y_i ($i=1, 2, \ldots, N$) надо выбрать те, для которых выполняется неравенство $y_i < Y_i$. Число этих значений равно n.

2. Вычисление кратных интегралов методом Монте-Карло. а) Требуется вычислить $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, где область D определяется неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Будем считать, что непрерывные функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют неравенствам $\varphi_1(x) \geqslant c$, $\varphi_2(x) \leqslant d$ (рис. 84).

Произведем замену переменных по формулам $x=a+(b-a)\xi$, $y=c+(d-c)\eta$. При таком преобразовании область D переходит в область Δ, содер-

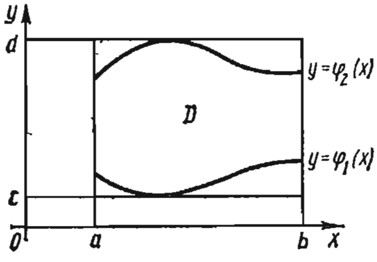

Рис. 84

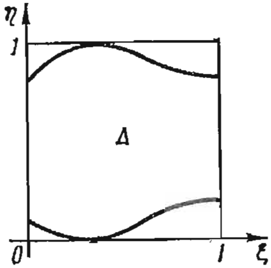

Рис. 85

жащуюся в единичном квадрате $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ (рис. 85). Пусть n — число случайных точек $(\xi_i; \eta_i)$ ($i=1, 2, \ldots, n$), попавших в область Δ, а N — число случайных точек, расположенных внутри единичного квадрата. Очевидно, что в область D попадет n точек $(x_i; y_i)$, где $x_i=a+(b-a)\xi_i$, $y_i=c+(d-c)\eta_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$). По теореме о среднем имеем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S, \tag{11}$$

где $(\bar{x}; \bar{y}) \in D$, а S — площадь области D. За приближенное значение $f(\bar{x}, \bar{y})$ возьмем среднее арифметическое значений функции $f(x, y)$ в n случайных точках, попавших в область D:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{12}$$

Учитывая равенства (11) и (12), получаем

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i). \tag{13}$$

Формулой (13) удобно пользоваться, если площадь S вычисляется легко.

По аналогии с формулой (10) можно записать

$$\frac{S}{(d-c)(b-a)} \approx \frac{n}{N},$$

где S — площадь области D. Тогда

$$S \approx \frac{n(b-a)(d-c)}{N}. \tag{14}$$

Из равенств (13) и (14) получим формулу для приближенного вычисления двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \approx \frac{(b-a)(d-c)}{N} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i), \tag{15}$$

При вычислении двойных интегралов с помощью приближенной формулы (15) удобно использовать расчетную таблицу:

i	ξ_i	η_i	$x_i=a+(b-a)\xi_i$	$y_i=c+(d-c)\eta_i$	$\underline{y}_i=\varphi_1(x_i)$	$\overline{y}_i=\varphi_2(x_i)$	$f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	x_1	y_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	x_2	y_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	x_N	y_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Среди значений y_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ надо выбрать те, для которых выполнено условие $\underline{y}_i \leqslant y_i \leqslant \overline{y}_i$. Их число равно n.

б) Обобщим формулу (9) на случай двойного интеграла $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, если область D определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$. Обозначим через M такое число, что $M \geqslant \max\limits_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x, y)$. Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$, как известно, выражает объем цилиндрического тела V, определенного неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$. Это цилиндрическое тело расположено внутри параллелепипеда $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant z \leqslant M$.

Перейдем к новым переменным ξ, η, ζ по формулам $x=a+(b-a)\xi$, $y=c+(d-c)\eta$, $z=M\zeta$. Тогда область V преобразуется в область Ω, определенную неравенствами

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \frac{\varphi_1(x)-c}{d-c} \leqslant \eta \leqslant \frac{\varphi_2(x)-c}{d-c}, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1.$$

Область Ω лежит внутри единичного куба, ограниченного плоскостями $\xi=0$, $\xi=1$, $\eta=0$, $\eta=1$, $\zeta=0$, $\zeta=1$. Значит,

$$I=(b-a)(d-c)\cdot M \iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $\varphi(\xi, \eta)=\frac{1}{M} f[a+(b-a)\xi, c+(d-c)\eta]$, а Δ — область, полученная из области D после замены переменных.

Рассмотрим множество случайных точек $(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$, $(\xi_2; \eta_2; \zeta_2)$, ..., $(\xi_N; \eta_N; \zeta_N)$, равномерно распределенных внутри единичного куба. Число этих точек, попавших в область Δ, обозначим через n. Так как случайные точки распределены равномерно, то

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{\text{по вероятности}} \iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \text{ или } \iint\limits_\Delta \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \approx \frac{n}{N}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим приближенную формулу для вычисления двойных интегралов методом Монте-Карло:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \approx \frac{(b-a)(d-c)\,nM}{N}. \qquad (16)$$

Расчетная таблица при использовании формулы (16) имеет вид

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i=a+(b-a)\xi_i$	$y_i=c+(d-c)\eta_i$	$z_i=M\zeta_i$	$\underline{y}_i=\varphi_1(x_i)$	$\overline{y}_i=\varphi_2(x_i)$	$Z_i=f(x_i, y_i)$
1	ξ_1	η_1	ζ_1	x_1	y_1	z_1	$\varphi_1(x_1)$	$\varphi_2(x_1)$	$f(x_1, y_1)$
2	ξ_2	η_2	ζ_2	x_2	y_2	z_2	$\varphi_1(x_2)$	$\varphi_2(x_2)$	$f(x_2, y_2)$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
N	ξ_N	η_N	ζ_N	x_N	y_N	z_N	$\varphi_1(x_N)$	$\varphi_2(x_N)$	$f(x_N, y_N)$

Число n находится следующим образом: среди значений y_i $(i=1, 2, \ldots, N)$ надо взять те, для которых справедливо неравенство

$$\underline{y}_i < y_i < \overline{y}_i. \qquad (17)$$

Соответственно этим значениям y_i среди значений z_i следует выбрать те, для которых выполнено условие

$$z_i < Z_i. \qquad (18)$$

Заметим, что целесообразно находить не все значения $Z_i=f(x_i, y_i)$, а лишь соответствующие тем y_i, для которых выполнено условие (17).

в) Формула, аналогичная соотношениям (9) и (15), имеет место и для k-кратных интегралов:

$$\iint\limits_V \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_k \approx \frac{nM}{N}\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i), \qquad (19)$$

где область V принадлежит k-мерному параллелепипеду, координаты точек которого удовлетворяют k неравенствам $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ непрерывна в области V и удовлетворяет условию $0 \leqslant f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leqslant M$.

Вывод формул (9), (15) и (16) основан на использовании понятия сходимости по вероятности. Поэтому соотношение n/N тем устойчивее, чем больше N. Это означает, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|I-\tilde{I}| < \varepsilon$, где I — точное значение интеграла $\tilde{I}$ — его приближенное значение, найденное методом Монте-Карло, возрастает с увеличением N. Тем не менее может случиться, что и при очень больших N окажется, что $|I-\tilde{I}| > \varepsilon$. Последнее обстоятельство на практике встречается редко.

Что касается метода Монте-Карло, то приведенные примеры имеют иллюстративный характер, преследуя цель познакомить учащихся с сущностью метода.

В силу сделанных выше замечаний, для приближенного вычисления интегралов с помощью метода Монте-Карло необходимо использовать ЭВМ, составив предварительно соответствующую программу метода.

1219. С помощью формулы (3) найти приближенное значение интеграла $I=\int\limits_0^1 (1-t^2)\,dt$, взяв из таблицы случайных чисел на с. 415 подряд 30 значений и ограничиваясь тремя цифрами.

△ Расчетная таблица имеет вид

i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2	i	t_i	t_i^2
1	0,857	0,734	11	0,609	0,371	21	0,070	0,005
2	0,457	0,209	12	0,179	0,032	22	0,692	0,478
3	0,499	0,249	13	0,974	0,949	23	0,696	0,484
4	0,762	0,581	14	0,011	0,0001	24	0,203	0,041
5	0,431	0,186	15	0,098	0,010	25	0,350	0,122
6	0,698	0,487	16	0,805	0,648	26	0,900	0,810
7	0,038	0,001	17	0,516	0,266	27	0,451	0,203
8	0,558	0,311	18	0,296	0,088	28	0,318	0,101
9	0,653	0,426	19	0,149	0,022	29	0,798	0,637
10	0,573	0,328	20	0,815	0,664	30	0,111	0,012

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{30}(1-t_i^2)=30-\sum_{i=1}^{30}t_i^2=30-9{,}455=20{,}545,$$

откуда по формуле (3) получаем

$$\int\limits_0^1 (1-t^2)\,dt=\frac{1}{30}\cdot 20{,}545\approx 0{,}685.$$

Точное значение интеграла есть

$$I=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\approx 0{,}667.$$

Значит, абсолютная погрешность составляет $|0{,}667-0{,}685|=0{,}018$, а относительная погрешность $\delta=(0{,}018/0{,}667)\cdot 100\%\approx 2{,}7\%$. ▲

1220. Вычислить определенный интеграл $I=\int\limits_2^3 (x^2+x^3)\,dx$, используя приближенную формулу (5).

△ Из таблицы случайных чисел возьмем 20 значений, начиная с третьего. Расчетная таблица имеет вид

i	t_i	$x_i=2+t_i$	x_i^2	x_i^3	$f(x_i)=x_i^2+x_i^3$
1	0,499	2,499	6,245	15,606	21,851
2	0,762	2,762	7,629	21,070	28,699
3	0,431	2,431	5,910	14,367	20,277
4	0,698	2,698	7,279	19,639	26,918
5	0,038	2,038	4,153	8,464	12,617
6	0,558	2,558	6,543	16,738	23,281
7	0,653	2,653	7,038	18,672	25,710
8	0,573	2,573	6,620	17,034	23,654
9	0,609	2,609	6,807	17,759	24,566
10	0,179	2,179	4,748	10,346	15,094
11	0,974	2,974	8,645	26,305	35,150
12	0,011	2,011	4,044	8,133	12,177
13	0,098	2,098	4,402	9,235	13,637
14	0,805	2,805	7,868	22,07	29,938
15	0,516	2,516	6,330	15,926	22,256
16	0,296	2,296	5,276	12,104	17,380
17	0,149	2,149	4,618	9,924	14,542
18	0,815	2,815	7,924	22,307	30,231
19	0,070	2,070	4,285	8,870	13,155
20	0,692	2,692	7,247	19,508	26,755

Используя формулу (5) при $a=2$, $b=3$, $N=20$, $\sum\limits_{i=1}^{20} f(x_i)=437{,}888$, находим

$$I\approx 437{,}888/20=21{,}894.$$

Точное значение интеграла есть

$$I=\int\limits_2^3 (x^2+x^3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3=22\frac{7}{12}\approx 22{,}583.$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta=(22{,}583-21{,}894)/22{,}583\cdot 100\,\%\approx 3{,}1\,\%. \ \blacktriangle$$

1221. Вычислить определенный интеграл $I=\int\limits_2^3 (x^2+x^3)\,dx$, используя приближенное равенство (9).

$\triangle$ Здесь $a=2$, $b=3$, $\max\limits_{2\leqslant x\leqslant 3}(x^2+x^3)=36$. Положим $x=2+\xi$, $y=36\eta$. Из таблицы случайных чисел возьмем 40 значений ($N=20$). Расчетная таблица имеет вид

i	ξ_i	η_i	$x_i=2+\xi_i$	$y_i=36\eta_i$	x_i^2	x_i^3	$Y_i=x_i^2+x_i^3$
1	0,857	0,457	2,857	16,452	8,162	23,319	31,481
2	0,499	0,762	2,499	27,432	6,245	15,606	21,851
3	0,431	0,698	2,431	25,128	5,910	14,367	20,277
4	0,038	0,558	2,038	20,088	4,153	8,464	12,617
5	0,653	0,573	2,653	20,628	7,038	18,672	25,710
6	0,609	0,179	2,609	6,444	6,807	17,759	24,566
7	0,974	0,011	2,974	0,396	8,845	26,305	35,150
8	0,098	0,805	2,098	28,980	4,402	9,235	13,637
9	0,516	0,296	2,516	10,656	6,330	15,926	22,256
10	0,149	0,815	2,149	29,340	4,618	9,924	14,542
11	0,070	0,692	2,070	24,912	4,285	8,870	13,155
12	0,696	0,203	2,696	7,308	7,268	15,595	26,863
13	0,350	0,900	2,350	32,400	5,523	12,979	18,502
14	0,451	0,318	0,451	11,448	6,007	14,723	20,730
15	0,798	0,111	2,798	3,996	7,829	21,906	29,735
16	0,933	0,199	2,933	7,164	8,602	25,230	33,832
17	0,183	0,421	2,183	15,156	4,765	10,402	15,167
18	0,338	0,104	2,338	3,744	5,466	12,780	18,246
19	0,190	0,150	2,190	5,400	4,796	10,503	15,299
20	0,449	0,320	2,449	11,520	5,998	14,689	20,687

Как видно из таблицы, $n=13$. Следовательно, по формуле (9) находим

$$I \approx (36\cdot 13)/20 = 23,4;\ \delta = (23,4-22,583)/22,583\cdot 100\% \approx 3,6\%. \ \blacktriangle$$

1222. Применяя формулу (15), найдем приближенное значение двойного интеграла $I=\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, если область D задана неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x/2 \leqslant y \leqslant x$ (рис. 86).

$\triangle$ Здесь $a=0$, $b=1$. Так как область D расположена в единичном квадрате, то нет необходимости переходить к новым переменным. Из таблицы случайных чисел возьмем подряд 20 значений. Расчетная таблица имеет вид

i	x_i	y_i	$\underline{y}_i=x_i/2$	$\overline{y}_i=x_i$	$2y_i$	$f(x_i, y_i)=x_i+2y_i$
1	0,857	0,457	0,428	0,857	0,914	1,771
2	0,499	0,762	0,249	0,499		
3	0,431	0,698	0,215	0,431		
4	0,038	0,558	0,019	0,038		
5	0,653	0,573	0,326	0,653	1,146	1,799
6	0,609	0,179	0,304	0,609		
7	0,974	0,011	0,487	0,974		
8	0,098	0,805	0,049	0,098		
9	0,516	0,296	0,258	0,516	0,592	1,108
10	0,149	0,815	0,074	0,149		

По формуле (15) при $N=10$ и $n=3$ получаем

$$I \approx (1{,}771+1{,}799+1{,}108)/10=4{,}578/10 \approx 0{,}458.$$

Найдем точное значение интеграла:

$$I=\iint\limits_D (f+2y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1\int\limits_{x/2}^{x}(x+2y)\,dx\,dy=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 (x+2y)^2\Big|_{x/2}^{x}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 (9x^2-4x^2)\,dx=\frac{5}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{5}{12}\approx 0{,}417.$$

Тогда $\delta=(0{,}458-0{,}417)/0{,}417\cdot 100\% \approx 9{,}82\%$.

Здесь, как и в других примерах, число $n=3$ недостаточно для того, чтобы в должной мере могли проявиться статистические закономерности. Тем не менее для грубой ориентировки получен удовлетворительный результат. ▲

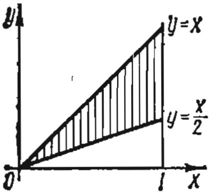

Рис. 86

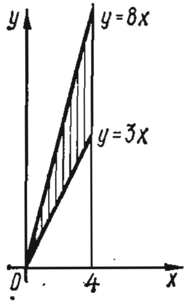

Рис. 87

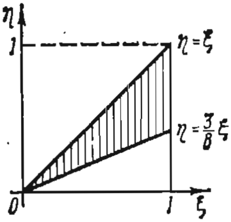

Рис. 88

1223. Вычислить по приближенной формуле (16) двойной интеграл $I=\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dx\,dy$, где область D ограничена линиями $x=0$, $x=4$, $y=3x$, $y=8x$ (рис. 87).

△ Записав данный двойной интеграл в виде повторного, имеем $I=$ $=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{3x}^{8x}\sqrt{x+y}\,dy$. Здесь $a=0$, $b=4$, $\varphi_1(x)=3x$, $\varphi_2(x)=8x$; далее, $\varphi_1(x)\geqslant 0$, $\varphi_2(x)\leqslant 32$, поэтому $c=0$, $d=32$. Так как $\max\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant y\leqslant 32}}\sqrt{x+y}=6$, то произведем замену переменных по формулам $x=4\xi$, $y=32\eta$, $z=6\zeta$. Прямые $y=3x$ и $y=8x$ преобразуются соответственно в прямые $\eta=(3/8)\,\xi$, $\eta=\xi$ (рис. 88). Из таблицы случайных чисел возьмем 60 значений ($N=20$). Расчетная таблица имеет вид

i	ξ_i	η_i	ζ_i	$x_i=4\xi_i$	$y_i=32\eta_i$	$z_i=6\zeta_i$	$y_i=3x_i$	$\bar{y}_i=8x_i$	x_i+y_i	$Z_i=\sqrt{x_i+y_i}$
1	0,857	0,457	0,499	3,428	14,624	2,994	10,284	27,424	18,052	4,249
2	0,762	0,431	0,698	3,048	13,792	4,188	9,144	24,384	16,840	4,104
3	0,038	0,558	0,653	0,152	17,856		0,456	1,216		
4	0.573	0,609	0,179	2,292	19,488		6,876	18,336		
5	0,974	0,011	0,098	3,896	0,352		11,688	31,168		
6	0,805	0,516	0,296	3,220	16,512	1,776	9,660	25,760	19,732	4,441
7	0,149	0,815	0,070	0,596	26,080		1,788	4,768		
8	0,692	0,696	0,203	2,768	22,272		8,304	22,144		
9	0,350	0,900	0,451	1,400	28,800		4,200	11,200		
10	0,318	0,798	0,111	1,272	25,536		3,816	10,176		
11	0,933	0,199	0,183	3,732	6,368		11,196	26,976		
12	0,421	0,338	0,104	1,684	10,816	0,624	5,052	13,472	12,500	3,536
13	0,190	0,150	0,449	0,760	4,800	2,694	2,280	6,080	5,560	2,358
14	0,320	0,165	0,617	1,280	5,280	3,702	3,840	10,240	6,560	2,561
15	0,369	0,069	0,248	1,476	2,208		4,428	11,808		
16	0,960	0,652	0,367	3,840	20,864	2,202	11,520	30,720	24,704	4,970
17	0,168	0,261	0,189	0,672	8,352		2,016	5,376		
18	0,703	0,142	0,486	2,812	4,544		8,436	22,496		
19	0,233	0,424	0,291	0,932	13,568		2,796	7,456		
20	0,473	0,645	0,514	1,892	20,640		5,676	15,136		

Как следует из расчетной таблицы, $n=4$. Таким образом, по формуле (16) находим

$$I\approx\frac{(4-0)\,(32-0)\cdot 6\cdot 4}{20}=153{,}6.$$

Точное значение интеграла есть

$$I=\frac{2}{3}\int\limits_0^4 (x+y)^{3/2}\Big|_{3x}^{8x}dx=\frac{76}{15}\,x^{5/2}\Big|_0^4=162\frac{2}{15}\approx 162{,}1$$

а относительная погрешность $\delta=(162{,}1-153{,}6)/162{,}1\cdot 100\%\approx 5{,}2\%$. ▲

1224. Двойной интеграл $I=\iint\limits_D \sqrt{x+y+1}\,dx\,dy$, где D — прямоугольник $0\leqslant x\leqslant 4$, $1\leqslant y\leqslant 7$, вычислить тремя способами: 1) по формуле (20) § 4; 2) по формуле (28) § 4; 3) по формуле (16), взяв из таблицы случайных 60 значений. В каждом случае оценить относительную погрешность.

1225. Двойной интеграл $I=\iint\limits_D \frac{\cos y}{x}\,dx\,dy$, где область D задана неравенствами $0{,}2\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x$, вычислить двумя способами: 1) по формуле (30) § 4; 2) по формуле (16), взяв из таблицы случайных чисел 90 значений. Оценить относительную погрешность.

1226. Найти приближенное значение тройного интеграла $I=\iiint\limits_V (x+y+2z)\,dx\,dy\,dz$, воспользовавшись формулой (19) для

$k=3$, если область D определена неравенствами $1 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant x$, $x+y \leqslant z \leqslant x+2y$.

△ Формула (19) для тройного интеграла принимает вид

$$I \approx \frac{(b-a)(d-c)(h-g)Mn}{N}.$$

Здесь $a=1$, $b=3$, $c=0$, $d=3$, $g=1$, $h=9$, $M=\max\limits_{\substack{1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 3 \\ 1 \leqslant z \leqslant 9}} (x+y+2z)=24$. Произведем замену переменных по формулам $x=1+2\xi$, $y=3\eta$, $z=1+8\zeta$, $u=24\sigma$. Из таблицы случайных чисел возьмем 80 значений ($N=20$). Расчетная таблица имеет вид

i	ξ_i	η_i	ζ_i	σ_i	x_i	y_i	z_i	u_i	$\underline{y}=0$	$\overline{y}_i=x_i$	$\underline{z}_i=x_i+y_i$	$\overline{z}_i=x_i+2y_i$	$2z_i$	$U_i=x_i+y_i+2z_i$
1	0,165	0,617	0,369	0,069	1,330	1,851	3,952	1,656	0	1,330				
2	0,248	0,960	0,652	0,367	1,496	2,880	6,216	8,08	0	1,496				
3	0,168	0,261	0,189	0,703	1,336	0,783	2,512	16,872	0	1,336	2,119	2,902	5,024	7,143
4	0,142	0,486	0,233	0,424	1,284	1,458	2,864	10,176	0	1,284				
5	0,291	0,473	0,645	0,514	1,582	1,419	6,160	12,336	0	1,582	3,001	4,420		
6	0,819	0,064	0,870	0,256	2,638	0,192	7,960	6,144	0	2,638	2,830	3,022		
7	0,347	0,151	0,912	0,191	1,694	0,453	8,296	4,584	0	1,694	2,147	2,600		
8	0,259	0,096	0,019	0,854	1,518	0,288	1,152	20,496	0	1,518	1,806	2,094	2,304	4,110
9	0,193	0,732	0,253	0,352	1,386	2,196	3,024	8,448	0	1,386				
10	0,729	0,102	0,222	0,088	2,458	0,306	2,776	2,112	0	2,458	2,764	3,070	5,552	8,316
11	0,205	0,562	0,851	0,647	1,410	1,686	7,808	15,528	0	1,410				
12	0,568	0,020	0,051	0,649	2,136	0,060	1,408	15,576	0	2,136	2,196	2,256		
13	0,179	0,896	0,453	0,546	1,358	2,688	4,624	13,104	0	1,358				
14	0,919	0,691	0,155	0,181	2,838	2,073	2,240	4,344	0	2,838	4,911	6,984		
15	0,273	0,876	0,690	0,494	1,546	2,628	6,520	11,856	0	1,546				
16	0,339	0,910	0,789	0,908	1,678	2,730	7,312	21,792	0	1,678				
17	0,263	0,131	0,389	0,438	1,526	0,393	4,112	10,512	0	1,526	1,919	2,312		
18	0,161	0,485	0,535	0,090	1,322	1,455	5,280	2,160	0	1,322				
19	0,142	0,321	0,969	0,091	1,284	0,963	8,752	2,184	0	1,284	2,247	3,210		
20	0,463	0,251	0,596	0,784	1,926	0,753	5,768	18,816	0	1,926	2,679	3,432		

Сначала находим те значения y_i ($1 \leqslant i \leqslant 20$), для которых выполнено условие $\underline{y_i} \leqslant y_i \leqslant \overline{y}_i$; их число равно 11. Далее, среди соответствующих 11 значений z_i, находим те, для которых $\underline{z} \leqslant z_i \leqslant \overline{z_i}$; таких значений оказывается 3. Наконец, среди соответствующих трех значений u_i находим те, которые удовлетворяют неравенству $u_i < U_i$; их число $n=1$. Таким образом,

$$I \approx (48 \cdot 24)/20 = 1152/20 = 57{,}6.$$

Найдем точное значение интеграла:

$$I=\int_1^3 dx\int_0^x dy\int_{x+y}^{x+2y}(x+y+2z)\,dz=\frac{1}{4}\int_1^3 dx\int_0^x (x+y+2z)^2\Big|_{x+y}^{x+2y}dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^3 dx\int_0^x [(3x+5y)^2-(3x+3y)^2]\,dy=\frac{1}{4}\int_1^3\Big[\frac{1}{15}(3x+5y)^3-$$

$$-\frac{1}{9}(3x+3y)^3\Big]\Big|_0^x dx=\frac{1}{4}\int_1^3\Big[\frac{(8x)^3}{15}-\frac{(6x)^3}{9}-\frac{(3x)^3}{15}+\frac{(3x)^3}{9}\Big]dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{485}{15}-\frac{189}{9}\right)\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=56\frac{2}{3}\approx 56{,}667;$$

$$\delta=(57{,}6-56{,}667)/56{,}667\cdot 100\%\approx 1{,}6\%. \ \blacktriangle$$

§ 6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Метод Эйлера. Дифференциальное уравнение $y'=f(x, y)$ определяет на плоскости так называемое *поле направлений*, т. е. в каждой точке плоскости, в которой существует функция $f(x, y)$, задает направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Пусть требуется решить задачу Коши, т. е. найти решение уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. Разделим отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей и положим $(X-x_0)/n=h$ (h — шаг изменения аргумента). Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до x_0+h функция y' сохраняет постоянное значение $f(x_0, y_0)$. Тогда $y_1-y_0\approx h\cdot f(x_0, y_0)$, где y_1 — значение искомой функции, соответствующее значению $x_1=x_0+h$. Отсюда получаем $y_1\approx y_0+h\cdot f(x_0, y_0)$. Повторяя эту операцию, получим последовательные значения функции:

$$y_2\approx y_1+h\cdot f(x_1, y_1),\ \ y_3\approx y_2+h\cdot f(x_2, y_2),\ \ldots,\ y_{k+1}\approx y_k+h\cdot f(x_k, y_k).$$

Таким образом, можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами $M_k(x_k;\ y_k)$, где $x_{k+1}=x_k+\Delta x_k$, $y_{k+1}=y_k+h\cdot f(x_k, y_k)$. Этот метод называется *методом ломаных Эйлера*, или просто *методом Эйлера*.

1227. Используя метод Эйлера, найти значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$, при начальном условии $y(0)=1$; шаг $h=0{,}1$. Ограничиться отысканием первых четырех значений y.

△ Находим последовательные значения аргумента: $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=0{,}3$. Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$$y_1=y_0+h\cdot f(x_0,\ y_0)=1+0{,}1\cdot(1-0)/(1+0)=1{,}1;$$
$$y_2=y_1+h\cdot f(x_1,\ y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot(1{,}1-0{,}1)/(1{,}1+0{,}1)=1{,}183;$$
$$y_3=y_2+h\cdot f(x_2,\ y_2)=1{,}183+0{,}1\cdot(1{,}183-0.2)/(1{,}183+0{,}2)=1{,}254;$$
$$y_4=y_3+h\cdot f(x_3,\ y_3)=1{,}254+0{,}1\cdot(1{,}254-0{,}3)/(1{,}254+0{,}3)=1{,}315.$$

Таким образом, получаем таблицу

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31 ▲

1228. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y'=x+y$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}1$.

Δ Значения аргумента $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=0{,}3$. Найдем соответствующие значения y:

$$y_1=y_0+h\cdot f(x_0,\ y_0)=1+0{,}1\cdot(0+1)=1{,}1;$$
$$y_2=y_1+h\cdot f(x_1,\ y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot(0{,}1+1{,}1)=1{,}22;$$
$$y_3=y_2+h\cdot f(x_2,\ y_2)=1{,}22+0{,}1\cdot(0{,}2+1{,}22)=1{,}36;$$
$$y_4=y_3+h\cdot f(x_3,\ y_3)=1{,}36+0{,}1\cdot(0{,}3+1{,}36)=1{,}52.$$

Получаем таблицу

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52 ▲

1229. Методом Эйлера найти три значения функции y, определяемой уравнением $y'=1+x+y^2$, при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}1$.

1230. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y'=x^2+y^3$, при начальном условии $y(0)=0$, полагая $h=0{,}1$.

1231. Методом Эйлера найти численное решение уравнения $y'=y^2+\frac{y}{x}$ при начальном условии $y(2)=4$, полагая $h=0{,}1$ (четыре значения).

1232. Методом Эйлера найти численное решение уравнения $y'=\frac{(x+y)\ (1-xy)}{x+2y}$ на отрезке $[0,\ 1]$ при начальном условии $y(0)=1$, полагая $h=0{,}2$.

1233. Методом Эйлера найти численное решение системы уравнений $\frac{dx}{dt}=\frac{y-x}{t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x+y}{t}$ при начальных условиях $x(1)=1$, $y(1)=1$, $1\leqslant t\leqslant 2$, полагая $h=0{,}2$.

2. Метод Рунге — Кутта. Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y'=f(x,\ y)$ при начальном условии $y(x_0)=y_0$. При численном интегрировании такого уравнения *методом Рунге — Кутта* определяют четыре числа:

$$k_1=h\cdot f(x,\ y),\ \ k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_1}{2}\right),$$
$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_2}{2}\right),\ \ k_4=h\cdot f(x+h,\ y+k_3).$$

Если положить $y(x+h)=y(x)+\Delta y$, то можно доказать, что $\Delta y \approx \approx \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$. Схема вычислений имеет вид

x	y	$k_j=h\cdot f(x,\ y)$	Добавка
x_0	y_0	k_1	$\Delta y_0=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_1$	k_2	
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_2$	k_3	
x_0+h	y_0+k_3	k_4	
$x_1=x_0+h$	$y_1=y_0+k$		

1234. Составить таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y'=y-\frac{2x}{y}$, при начальном условии $y(0)=1$ в промежутке $[0,\ 1]$; шаг $h=0{,}2$ (точное решение $y=\sqrt{2x+1}$).

△ Найдем числа:

$$k_1=h\cdot f(x,\ y)=0{,}2\cdot\left(1-\frac{2\cdot 0}{1}\right)=0{,}2;$$
$$k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_1}{2}\right)=0{,}2\cdot f(0{,}1;\ 1{,}1)=0{,}2\cdot\left(1{,}1-\frac{0{,}2}{1{,}1}\right)=0{,}1836;$$
$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_2}{2}\right)=0{,}2\cdot f(0{,}1;\ 1{,}0918)=0{,}1817;$$
$$k_4=h\cdot f(x+h,\ y+k_3)=0{,}2\cdot f(0{,}2;\ 1{,}1817)=0{,}1686.$$

Отсюда

$$\Delta y=\frac{1}{6}(0{,}2+0{,}3672+0{,}3634+0{,}1686)=0{,}1832.$$

Таким образом, $y_1=1+0{,}1832=1{,}1832$ при $x=0{,}2$. Аналогично находим y_2 и т. д. Процесс вычислений ведем по такой схеме:

i	x	y	$f(x, y)$	$k_i=h\cdot f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	0,1832
2	0,1	1,1	0,0918	0,1838	
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	1,1584
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	
2					
3					
4					
1					

Заметим, что все пять знаков чисел $y_1=1{,}1832$ и $y_2=1{,}3416$ верны, если сравнить с точным решением $y=\sqrt{2x+1}$. ▲

1235. Методом Рунге—Кутта проинтегрировать уравнение $x^2y'-xy=1$ при начальном условии $y(1)=0$ в промежутке $[1, 2]$; шаг $h=0{,}2$ [точное решение $y=(x^2-1)/(2x)$].

△ Здесь $f(x, y)=\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$. Найдем числа:

$$k_1=h\cdot f(x, y)=0{,}2\cdot\left(\frac{0}{1}+\frac{1}{1^2}\right)=0{,}2;$$

$$k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right)=0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}1^2}\right)=0{,}18;$$

$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right)=0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}09}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}1^2}\right)=0{,}18;$$

$$k_4=h\cdot f(x+h, y+k_3)=0{,}2\cdot\left(\frac{0{,}18}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}2^2}\right)=0{,}17.$$

Следовательно,

$$\Delta y_0=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=0{,}18, \text{ т. е. } y_1=y_0+\Delta y_0=0+0{,}18=0{,}18.$$

Аналогичным образом находим

$$k_1=h\cdot f(x, y)=0{,}2\left(\frac{0{,}18}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}2^2}\right)=0{,}17;$$

$$k_2=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}\right)=0{,}2\left(\frac{0{,}26}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}3^2}\right)=0{,}15;$$

$$k_3=h\cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{2}\right)=0{,}2\left(\frac{0{,}25}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}3^2}\right)=0{,}15;$$

$$k_4=h\cdot f(x+h, y+k_3)=0{,}2\left(\frac{0{,}33}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}4^2}\right)=0{,}14;$$

Следовательно,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) = 0,15, \text{ т. е. } y_2 = y_1+\Delta y_1 = 0,18+0,15 = 0,33$$

и т. д. ▲

1236. Методом Рунге — Кутта проинтегрировать уравнение $4y' = y^2+4x^2$, $y(0)=1$ в промежутке $[0, 1]$ с шагом $h=0,1$. Вычисления вести с тремя верными знаками.

1237. Методом Рунге — Кутта проинтегрировать уравнение $y' = x/y+0,5y$, $y(0)=1$ в промежутке $[0, 1]$ с шагом $h=0,1$. Вычисления вести с тремя верными знаками.

3. Метод Адамса. Пусть требуется проинтегрировать уравнение $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Одним из разностных методов приближенного решения этой задачи является *метод Адамса*.

Задавшись некоторым шагом изменения аргумента h, находят каким-либо способом, исходя из начальных данных $y(x_0)=y_0$, следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0+h), \; y_2 = y(x_0+2h), \; y_3 = y(x_0+3h)$$

(эти три значения можно получить любым методом, обеспечивающим нужную точность: с помощью разложения решения в степенной ряд, методом Рунге — Кутта и т. д., но не методом Эйлера ввиду его недостаточной точности). С помощью чисел x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3 вычисляют величины

$$q_0 = h\cdot y_0' = h\cdot f(x_0, y_0), \; q_1 = h\cdot f(x_1, y_1),$$

$$q_2 = h\cdot f(x_2, y_2), \; q_3 = h\cdot f(x_3, y_3).$$

Далее, составляют таблицу конечных разностей величин y и q:

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		q_0			
		Δy_0		Δq_0		
x_1	y_1		q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1		Δq_1		$\Delta^3 q_0$
x_2	y_2		q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2		Δq_2		
x_3	y_3		q_3			
...	...	...	...	...	...	...

Зная числа в нижней косой строке, по формуле Адамса находят

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0,$$

а затем и величину $y_4=y_3+\Delta y_3$. Зная теперь y_4, вычисляют $q_4=h\cdot f(x_4, y_4)$, после чего можно написать следующую косую строку:

$$\Delta q_3=q_4-q_3,\ \Delta^2 q_2=\Delta q_3-\Delta q_2,\ \Delta^3 q_1=\Delta^2 q_2-\Delta^2 q_1.$$

Новая косая строка позволяет вычислить по формуле Адамса значение

$$\Delta y_4=q_4+\frac{1}{2}\Delta q_3+\frac{5}{12}\Delta^2 q_2+\frac{3}{8}\Delta^3 q_1,$$

а следовательно, $y_5=y_4+\Delta y_4$ и т. д.

1238. Используя метод Адамса, найти значение $y(0{,}4)$ с точностью до 0,01 для дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2$; $y(0)=-1$.

△ Найдем первые четыре члена разложения решения данного уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$:

$$y(x)=y(0)+y'(0)\cdot x+\frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2+\frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3+\ \ldots\ .$$

Согласно условию, $y(0)=-1$; значения $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ находим, последовательно дифференцируя данное уравнение:

$$y'=x^2+y^2;\ y'(0)=0^2+(-1)^2=1,$$
$$y''=2x+2yy';\ y''(0)=0+2\cdot(-1)\cdot 1=-2,$$
$$y'''=2+2y'^2+2yy'';\ y'''(0)=2+2\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)\cdot(-2)=8.$$

Таким образом,

$$y(x)\approx-1+x-x^2+\frac{4}{3}x^3+\ldots\ .$$

Вычисляем $y(x)$ в точках $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, $x_3=0{,}3$ с одним запасным (третьим) знаком $y_1=-0{,}909$, $y_2=-0{,}829$, $y_3=-0{,}754$. Составим таблицу

x	y	Δy	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0	−1		0,1			
0,1	−0,909	0,091	0,083	−0,017		
0,2	−0,829	0,080	0,072	−0,011	0,006	−0,002
0,3	−0,754	0,075	0,065	−0,007	0,004	
0,4						

Тогда

$$\Delta y_3=q_3+\frac{1}{2}\Delta q_2+\frac{5}{12}\Delta^2 q_1+\frac{3}{8}\Delta^3 q_0=$$
$$=0{,}065+\frac{1}{2}(-0{,}007)+\frac{5}{12}\cdot 0{,}004+\frac{3}{8}\cdot(-0{,}002)=0{,}062.$$

Следовательно, $y_4=y_3+\Delta y_3\approx-0{,}754+0{,}062=-0{,}692\approx-0{,}69$. ▲

1239. Используя метод Адамса, найти значение $y(0{,}5)$ для дифференциального уравнения $y'=x+y$, $y(0)=1$; шаг $h=0{,}1$. Вычисления вести с точностью до 0,001, оставить в результате два знака.

1240. Используя метод Адамса, найти значение $y(0{,}4)$ для дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; шаг $h = 0{,}1$. Вычисления вести с тем же числом знаков, что и в предыдущем примере.

§ 7. МЕТОД ПИКАРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Одним из аналитических методов приближенного решения дифференциальных уравнений является *метод Пикара последовательных приближений*. Применительно к дифференциальному уравнению первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ он заключается в том, что строится искомое решение $y = y(x)$ для $x \geqslant x_0$ (или $x \leqslant x_0$). Интегрируя правую и левую части уравнения (1) в пределах от x_0 до x, получаем

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt,$$

или

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt. \tag{2}$$

Предполагается, что в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ уравнение (1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности (теоремы Коши), т. е. что $f(x, y)$ — непрерывная функция своих аргументов и $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < K$.

Для нахождения последовательных приближений заменим в равенстве (2) неизвестную функцию y данным значением y_0; получим первое приближение

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

Далее, подставив в равенство (2) вместо неизвестной функции y найденную функцию y_1, получим второе приближение

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt.$$

Все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$y(x) \approx y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt.$$

Можно доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(x) = y(x)$.

Погрешность оценивается неравенством

$$|y(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M(Kc)^n}{K\cdot n!}.$$

где $|f(x, y)|\leqslant M$, $|x-x_0|<a\leqslant\infty$, $|y-y_0|<b\leqslant\infty$, $c=\min(a, b/M)$.

Пикаровские приближения дают последовательность нижних функций, т. е.

$$y_0<y_1<y_2<\ldots<y_n<y(x),$$

если $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ и $f(x, y_0)>0$, и последовательность верхних функций, т. е.

$$y_0>y_1>y_2>\ldots>y_n>y(x),$$

если $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ и $f(x, y_0)<0$. Таким образом, при $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ пикаровские приближения образуют *одностороннюю последовательность приближений*, а при $\frac{\partial f}{\partial y}<0$ — *двустороннюю последовательность*.

1241. Найти приближенное решение уравнения $y'=x+y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

△ В качестве начального приближения возьмем $y_0=y(0)=1$. Тогда первое приближение

$$y_1(x)=1+\int_0^x(t+1)\,dt=1+x+\frac{1}{2}x^2.$$

Аналогично получим второе приближение

$$y_2(x)=1+\int_0^x\left[t+\left(1+t+\frac{1}{2}t^2\right)^2\right]dt=$$

$$=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{20}x^5,$$

. . . . ▲

1242. Какой последовательностью пикаровских приближений выражается решение уравнения $y'=x+y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$ при $x\geqslant 0$?

△ За начальное приближение возьмем $y_0=y(0)=0$. Тогда

$$y_1=y_0+\int_0^x(t+y_0)\,dt=\int_0^x t\,dt=\frac{1}{2}x^2,$$

$$y_2=\int_0^x\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},$$

$$y_3=\int_0^x\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}\right)dt=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!},$$

. . . .

$$y_n(x)=\int_0^x\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)dt=$$

$$=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Здесь $f(x, y_0)=x+y_0 \geqslant 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=1>0$. Следовательно, пикаровские приближения образуют последовательность нижних функций.

Истинное аналитическое выражение $y(x)$ в данном случае имеет вид

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)-(x+1),$$

или

$$y(x)=e^x-x-1. \blacktriangle$$

1243. Найти три последовательных приближенных решения уравнения $y'=x^2+y^2$, удовлетворяющих начальному условию $y(0)=0$, взяв за начальное приближение $y=0$.

1244. Найти приближенное решение уравнения $y'+y\operatorname{ch} x=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

1245. Найти приближенное решение и определить характер пикаровских приближений уравнения $y'=x-y$; начальное условие $y(0)=1$, $x\geqslant 0$.

1246. Найти приближенное решение и определить характер пикаровских приближений уравнения $y'=y\cos x$; начальное условие $y(0)=1$, $-2<x<2$.

1247. Найти приближенное решение уравнения $y'=2xy\cos(x^2)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$, $0<x<1$, $0<y<2$. Определить характер пикаровских приближений.

§ 8. ПРОСТЕЙШИЕ СПОСОБЫ ОБРАБОТКИ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

1. Графический способ. Пусть данные опыта представлены таблицей. Через точки, определяемые этой таблицей или близкие к ним, проводим график и по виду графика подбираем вид эмпирической формулы. Простейшим случаем считается тот, для которого данные опыта приводят к точкам, располагающимся приблизительно на прямой $y=a_0+a_1x$ или на кривых, уравнения которых $S=At^{\alpha}$ и $S=Ae^{\alpha t}$ преобразуются заменой переменных к линейной функции. Решая эту задачу графическим способом, наносим точки на координатную сетку (с равномерной или логарифмической шкалой) и проводим прямую приблизительно через эти точки так, чтобы она лежала возможно ближе к каждой из нанесенных точек, а затем берем две произвольные точки на этой прямой (возможно дальше одна от другой) и подставляем их координаты в соотношение $y=a_0+a_1x$. Из полученных таким образом двух уравнений найдем a_0 и a_1.

1248. Стационарное распределение температуры в теплоизолированном тонком стержне описывается линейной функцией $u=a_0+a_1x$. Определить постоянные a_0 и a_1, если дана таблица измеренных температур в соответствующих точках стержня:

x	0	2	6	8	10	14	16	20
u	32	29,2	23,3	19,9	17,2	11,3	7,8	2

△ Построив точки, отвечающие данной таблице, видим, что прямая проходит через точки (0; 32) и (20; 2). Подставляя их координаты в уравнение $u = a_0 + a_1 x$, имеем

$$\begin{cases} a_0 + 0 \cdot a_1 = 32, \\ a_0 + 20 a_1 = 2; \end{cases} \quad a_0 = 32,\ a_1 = -1{,}5.$$

Отсюда получаем искомое соотношение $u = 32 - 1{,}5x$.

Насколько хорошо эта формула отвечает табличным данным, можно судить по величине суммы уклонений δ и суммы квадратов уклонений δ^2 значений функции, вычисленных по формуле, от табличных значений. В данном примере $\delta = -1{,}5x + 32 - u$. Следовательно, $\delta_1 = -1{,}5 \cdot 0 + 32 - 32 = 0$; $\delta_2 = -1{,}5 \cdot 2 + 32 - 29{,}2 = -0{,}2$; $\delta_3 = -1{,}5 \cdot 6 + 32 - 23{,}3 = -0{,}3$; $\delta_4 = -1{,}5 \cdot 8 + 32 - 19{,}9 = 0{,}1$; $\delta_5 = -1{,}5 \cdot 10 + 32 - 17{,}2 = -0{,}2$; $\delta_6 = -1{,}5 \cdot 14 + 32 - 11{,}3 = -0{,}3$; $\delta_7 = -1{,}5 \cdot 16 + 32 - 7{,}8 = 0{,}2$; $\delta_8 = -1{,}5 \cdot 20 + 32 - 2 = 0$; $\sum_{i=1}^{8} \delta_i = -0{,}7$; $\sum_{i=1}^{8} \delta_i^2 = 0{,}31$. ▲

1249. Табличные данные

t	1	2	3	4	5	6	7
S	2,31	2,58	2,77	2,93	3,06	3,16	3,26

отвечают формуле $S = At^{\alpha}$. Найти значения A и α.

△ Логарифмируя равенство $S = At^{\alpha}$, получим $\lg S = \lg A + \alpha \cdot \lg t$; полагая $\lg S = y$, $\lg t = x$, $\lg A = a_0$, $\alpha = a_1$, имеем $y = a_0 + a_1 x$. Графиком полученного линейного уравнения служит прямая, параметры уравнения которой найдем, взяв две точки на этой прямой, например ($\lg 1$; $\lg 2{,}31$) и ($\lg 7$; $\lg 3{,}26$). Подставив координаты этих точек в уравнение $y = \lg A + \alpha x$, получим

$$\begin{cases} \lg 2{,}31 = \lg A + \alpha \lg 1, \\ \lg 3{,}26 = \lg A + \alpha \lg 7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lg A = 0{,}364, \\ \lg A + 0{,}845\alpha = 0{,}513. \end{cases}$$

Отсюда $\lg A = 0{,}364$; $A = 2{,}312$; $\alpha = 0{,}149/0{,}845 = 0{,}176$. Следовательно, $S = 2{,}312\, t^{0{,}176}$. ▲

1250. Табличные данные

x	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
y	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

отвечают формуле $y = a_0 + a_1 x$. Найти a_0 и a_1.

1251. Табличные данные

t	1	2	3	4	5	6	7	8
S	15,3	20,5	27,4	36,6	49,1	65,6	87,8	117,6

отвечают формуле $S = Ae^{\alpha t}$. Найти A и α.

2. Способ средних. *Способ средних* основывается на допущении, что наиболее подходящей линией служит та, для которой алгебраическая сумма уклонений равна нулю. Для того чтобы найти этим способом неизвестные постоянные в эмпирической формуле, сначала подставляем в эту формулу все пары наблюдавшихся или замеренных значений x и y и получаем столько уклонений, сколько пар значений $(x;\ y)$ в таблице (уклонения — вертикальные расстояния от данных точек до графика функции). Затем распределяем эти уклонения по группам, составляя столько групп, сколько неизвестных параметров эмпирической формулы надо найти. Наконец, приравнивая нулю сумму уклонений по каждой группе, получим систему линейных уравнений относительно параметров.

1252. Найти способом средних формулу вида $S = At^{\alpha}$, отвечающую таблице

t	273	283	288	293	313	333	353	373
S	29,4	33,3	35,2	37,2	45,8	55,2	65,6	77,3

△ Здесь уклонения имеют вид $\delta = At^{\alpha} - S$. Подставляя значения t и S, взятые из таблицы, и приравнивая уклонения нулю, получим систему уравнений относительно параметров A и α, решение которой затруднительно. Без большой потери в точности можно приравнять нулю сумму уклонений логарифма S, т. е. $\delta' = \lg A + \alpha \lg t - \lg S$.

Тогда уклонения выразятся формулами

$$
\begin{aligned}
\delta_1' &= \lg A + 2{,}4362\,\alpha - 1{,}4683, & \delta_5' &= \lg A + 2{,}4955\,\alpha - 1{,}6609,\\
\delta_2' &= \lg A + 2{,}4518\,\alpha - 1{,}5224, & \delta_6' &= \lg A + 2{,}5224\,\alpha - 1{,}7419,\\
\delta_3' &= \lg A + 2{,}4594\,\alpha - 1{,}5465, & \delta_7' &= \lg A + 2{,}5478\,\alpha - 1{,}8169,\\
\delta_4' &= \lg A + 2{,}4669\,\alpha - 1{,}5705, & \delta_8' &= \lg A + 2{,}5717\,\alpha - 1{,}8882.
\end{aligned}
$$

Приравняв нулю сумму уклонений по этим двум группам, получим систему уравнений для определения параметров A и α:

$$
\begin{cases}
4 \lg A + \ \ 9{,}8143\,\alpha = 6{,}1077,\\
4 \lg A + 10{,}1374\,\alpha = 7{,}1079.
\end{cases}
$$

Решение этой системы $\alpha = 3{,}096$, $\lg A = \overline{7}{,}9345$; отсюда $A = 8{,}5 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, $S = 8{,}6 \cdot 10^{-7}\, t^{3{,}096}$. ▲

1253. Дана таблица

x	87,5	84,0	77,8	63,7	46,7	36,9
y	292	283	270	235	197	181

Найти параметры a_0, a_1, a_2 формулы $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, отвечающей этой таблице.

1254. Дана таблица

t	53,92	26,36	14,00	6,99	4,28	2,75	1,85
S	6,86	14,70	28,83	60,40	101,9	163,3	250,3

отвечающая формуле $S=At^{\alpha}$. Найти A и α.

3. Подбор параметров способом наименьших квадратов. 1) На практике часто приходится решать такую задачу. Пусть для двух функционально связанных величин x и y известны n пар соответствующих значений $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n,\ y_n)$. Требуется в наперед заданной формуле $y=f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)$ определить m параметров $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots;\ \alpha_m$ $(m<n)$ так, чтобы в эту формулу наилучшим образом «укладывались» бы известные n пар значений x и y.

Считается (исходя из принципов теории вероятностей), что наилучшими являются те значения $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, которые обращают в минимум сумму

$$\sum_{k=1}^{k=n}[f(x_k,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)-y_k]^2$$

(т. е. сумму квадратов отклонений значений y, вычисленных по формуле, от заданных), поэтому сам способ и получил название *способа наименьших квадратов*.

Это условие дает систему m уравнений, из которых определяются α_1, $\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$:

$$\sum_{k=1}^{k=n}[f(x_k,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)-y_k]\frac{\partial f(x_k,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)}{\partial\alpha_j}=0 \qquad (1)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

На практике заданную формулу $y=f(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m)$ иногда приходится (в ущерб строгости полученного решения) преобразовывать к такому виду, чтобы систему (1) было проще решать (см. ниже подбор параметров в формулах $y=Ae^{cx}$ и $y=Ax^q$).

Частные случаи. а) $y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$ ($m+1$ параметров $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_m$; $n>m+1$).

Система (1) принимает следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^m+a_1\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{m-1}+\ldots+na_m=\sum\limits_{k=1}^{k=n}y_k,\\ a_0\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{m+1}+a_1\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^m+\ldots+a_m\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_ky_k,\\ a_0\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{m+2}+a_1\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{m+1}+\ldots+a_m\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^2=\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^2y_k,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_0\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{2m}+a_1\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^{2m-1}+\ldots+a_m\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^m=\sum\limits_{k=1}^{k=n}x_k^my_k. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Эта система $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными всегда имеет единственное решение, так как ее определитель отличен от нуля.

Для определения коэффициентов системы (2) удобно составить вспомогательную таблицу вида

k	x_k	x_k^2	x_k^3	$\dots$	${}^{2m}_{k}$	y_k	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$	$\dots$	$x_k^m y_k$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	$\dots$	x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$	$\dots$	$x_1^m y_1$
2	x_2	x_2^2	x_2^3	$\dots$	x_2^{2m}	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$	$\dots$	$x_2^m y_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	x_n	x_n^2	x_n^3	$\dots$	x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$	$\dots$	$x_n^m y_n$
Σ										

В последней строке записывают суммы элементов каждого столбца, которые и являются коэффициентами системы (2).

Систему (2) обычно решают методом Гаусса.

б) $y = Ae^{cx}$.

Для упрощения системы (1) эту формулу, связывающую x и y, предварительно логарифмируют и заменяют формулой

$$\lg y = \lg A + c \cdot \lg e \cdot x.$$

Система (1) примет в этом случае следующий вид:

$$\left\{\begin{aligned} & c \cdot \lg e \sum_{k=1}^{k=n} x_k + n \cdot \lg A = \sum_{k=1}^{k=n} \lg y_k, \\ & c \cdot \lg e \sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 + \lg A \cdot \sum_{k=1}^{k=n} x_k = \sum_{k=1}^{k=n} x_k \cdot \lg y_k. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Вспомогательная таблица имеет вид

k	x_k	x_k^2	$\lg y_k$	$x_k \cdot \lg y_k$
1	x_1	x_1^2	$\lg y_1$	$x_1 \cdot \lg y_1$
2	x_2	x_2^2	$\lg y_2$	$x_2 \cdot \lg y_2$
$\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$
n	x_n	x_n^2	$\lg y_n$	$x_n \cdot \lg y_n$
Σ				

Из системы (3) определяют c и $\lg A$.

в) $y = Ax^q$.

Эту формулу также предварительно логарифмируют и заменяют следующей:

$$\lg y = \lg A + q \cdot \lg x.$$

Система (1) теперь примет вид

$$\begin{cases} q\sum\limits_{k=1}^{k=n}\lg x_k + n\lg A = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\lg y_k, \\ q\sum\limits_{k=1}^{k=n}\lg^2 x_k + \lg A\cdot\sum\limits_{k=1}^{k=n}\lg x_k = \sum\limits_{k=1}^{k=n}\lg x_k\cdot\lg y_k. \end{cases} \tag{4}$$

Соответствующим образом изменяется и вспомогательная таблица.

2) Часто бывает необходимо заменить наилучшим образом некоторую заданную функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ многочленом m-й степени: $y\approx a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$. Применение способа наименьших квадратов в этом случае приводит к отысканию коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ из условия минимума интеграла

$$\int\limits_a^b [\varphi(x)-f(x)]^2\,dx = \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots+a_m - f(x)]^2\,dx.$$

Необходимые условия минимума этого интеграла приводят к системе $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, из которых определяют все эти коэффициенты:

$$\begin{cases} \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots+a_m - f(x)]\,x^m\,dx = 0, \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots+a_m - f(x)]\,x^{m-1}\,dx = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int\limits_a^b [a_0x^m + a_1x^{m-1}+\ldots+a_m - f(x)]\,dx = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1255. Способом наименьших квадратов подобрать для заданных значений x и y квадратичную функцию $\varphi(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

△ Составим таблицу

k	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	y_k	x_ky_k	$x_k^2y_k$
1	7	49	343	2 401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4 196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6 561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10 000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331	14 641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1728	20 736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28 561	9,4	122,2	1588,6
Σ	70	728	7840	87 096	62,7	635,6	6683,4

Отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 728a_0 + 70a_1 + 7a_2 = 62{,}7, \\ 7840a_0 + 728a_1 + 70a_2 = 635{,}6, \\ 87\,096a_0 + 7840a_1 + 728a_2 = 6683{,}4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a_0 = -0{,}04$, $a_1 = 1{,}10$, $a_2 = 2{,}12$. Таким образом, искомая квадратичная функция имеет вид $\varphi(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}10x + 2{,}12$. ▲

1256. Способом наименьших квадратов подобрать степенную функцию $S = At^q$ по следующим табличным данным:

t	1	2	3	4	5
S	7,1	27,8	62,1	110	161

△ Составим таблицу

k	$x_k = \lg t_k$	x_k^2	$y_k = \lg S_k$	$x_k y_k$
1	0,0000	0,0000	0,8513	0,0000
2	0,3010	0,0906	1,4440	0,4346
3	0,4771	0,2276	1,7931	0,8555
4	0,6021	0,3625	2,0414	1,2291
5	0,6990	0,4886	2,2068	1,5425
$\sum$	2,0792	1,1693	8,3366	4,0637

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2{,}0792q + 5\lg A = 8{,}3366, \\ 1{,}1693q + 2{,}0792\lg A = 4{,}0637. \end{cases}$$

Отсюда $q = 1{,}958$, $\lg A = 0{,}8532$, т. е. $A = 7{,}132$. Следовательно, искомая степенная функция имеет вид $S = 7{,}132t^{1{,}958}$. ▲

1257. Способом наименьших квадратов подобрать показательную функцию $S = Ae^{ct}$ по следующим табличным данным:

t	0	2	4	6	8	10	12
S	1280	635	324	162	76	43	19

△ Составим таблицу

k	t	t^2	$y=\lg S$	ty
1	0	0	3,1072	0,0000
2	2	4	2,8028	5,6056
3	4	16	2,5105	10,0420
4	6	36	2,2095	13,2570
5	8	64	1,8808	15,0464
6	10	100	1,6335	16,3350
7	12	144	1,2787	15,3444
$\sum$	42	364	15,4230	75,6304

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 42c\cdot\lg e+7\lg A=15{,}4230, \\ 364c\cdot\lg e+42\lg A=75{,}6304, \end{cases}$$

т. е. $c\cdot\lg e=-0{,}1509$, $\lg A=3{,}1087$. Следовательно, $A=1284$ и $c=-0{,}347$. Таким образом, искомая показательная функция имеет вид $S=1284e^{-0{,}347t}$. ▲

В следующих задачах способом наименьших квадратов подобрать функции заданного вида по приведенным табличным данным.

1258. Найти линейную функцию:

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

2)

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

3)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

1259. Найти квадратичную функцию:

1)

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,4	5,9

2)

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

3)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−0,71	−0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

1260. Найти степенную функцию $S = At^q$:

t	1	2	3	4	5
S	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1

1261. Найти показательную функцию $S = Ae^{ct}$:

1)

t	2,2	2,7	3,5	4,1
S	67	60	53	50

2)

t	1	3	5	7	9	11
S	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59,00

1262. Найти наилучшее приближение функции $f(x) = \sin(\pi x/2)$ в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ многочленом третьей степени.

△ Для нахождения коэффициентов функции $\varphi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ составляем систему уравнений вида (5):

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\dfrac{\pi x}{2}\right) x^3\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\dfrac{\pi x}{2}\right) x^2\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\dfrac{\pi x}{2}\right) x\,dx = 0, \\ \int\limits_0^1 \left(a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 - \sin\dfrac{\pi x}{2}\right) dx = 0. \end{cases}$$

Интегрируя, получим

$$\begin{cases} \dfrac{1}{7}a_0 + \dfrac{1}{6}a_1 + \dfrac{1}{5}a_2 + \dfrac{1}{4}a_3 = \dfrac{12}{\pi^2} - \dfrac{96}{\pi^4}, \\ \dfrac{1}{6}a_0 + \dfrac{1}{5}a_1 + \dfrac{1}{4}a_2 + \dfrac{1}{3}a_3 = \dfrac{8}{\pi^2} - \dfrac{16}{\pi^3}, \\ \dfrac{1}{5}a_0 + \dfrac{1}{4}a_1 + \dfrac{1}{3}a_2 + \dfrac{1}{2}a_3 = \dfrac{4}{\pi^2}, \\ \dfrac{1}{4}a_0 + \dfrac{1}{3}a_1 + \dfrac{1}{2}a_2 + a_3 = \dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, найдем $a_0 = -0{,}40$, $a_1 = -0{,}24$, $a_2 = 1{,}64$, $a_3 = -0{,}05$. Следовательно,

$$\varphi(x) = -0{,}4x^3 - 0{,}42x^2 + 1{,}85x - 0{,}05.$$

Проверка: если $x = 1/3$, то $f(1/3) = 0{,}50$, $\varphi(1/3) = 0{,}51$. ▲

1263. Найти наилучшее приближение функции $f(x)=\ln(4+x)$ многочленом второй степени при $0\leqslant x\leqslant 1$.

1264. Найти наилучшее приближение функции $f(x)=1/(1+x)$ многочленом третьей степени при $0<x<1$.

4. Интерполяция функций с помощью приближения сплайнами. В основе нового метода, получившего название сплайновой интерполяции, лежит понятие *сплайна* (spline — от англ. «планка») или ломаной линии, звеньями которой служат отрезки кривых, заданных многочленами.

а) Линейные сплайны. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция аналитически [в виде $y=f(x)$], таблично или графически. Для замены этой функции сплайном разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей и составим таблицу

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

Здесь $x_0=a$, $x_n=b$, а y_k — значения функции $f(x)$ при $x=x_k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n$). Если функция задана таблично, то значения x_k выбираем из таблицы; при этом чем больше n, тем лучше аппроксимация. На каждом из элементарных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ заменим функцию $y=f(x)$ отрезком прямой:

$$L_k(x)=\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}[f(x_{k+1})-f(x_k)]+f(x_k). \tag{1}$$

Таким образом, кривая на отрезке $[a, b]$ заменяется ломаной, а функция $y=f(x)$ аппроксимируется простейшим линейным сплайном $S(x)$.

б) Кусочно-кубические сплайны. При рассмотрении изгиба упругого стержня, уравнение упругого равновесия которого имеет вид $\varphi^{IV}(x)=0$, изогнутость стержня приходится представлять кривой третьего порядка.

В этом случае часто применяют кусочно-кубические сплайн-функции, когда функция $f(x)$ интерполируется на каждом элементарном отрезке кубическим многочленом.

На отрезке $[a, b]$ оси Ox зададим равномерную сетку с шагом $h=(b-a)/n$; в узлах $x=x_k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n$) заданы значения y_k функции $y=f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$.

Внутри каждого элементарного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ заменим функцию $f(x)$ функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющей следующим условиям:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$ вместе со своими производными первого и второго порядка.

2) $\varphi(x)$ на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ является кубическим многочленом:

$$\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{3} a_i(x_k-x_i) \quad (k=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

3) в узлах сетки $\{x_k\}$ выполняется равенство $\varphi(x_k)=y_k$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n$).

4) $\varphi''(x)$ удовлетворяет граничным условиям $\varphi''(a)=\varphi''(b)=0$.

Можно показать, что задача нахождения кусочно-кубической сплайн-функции $\varphi(x)$ имеет единственное решение.

Так как вторая производная $\varphi''(x)$ непрерывна и линейна на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то для $x\in[x_{k-1}, x_k]$ можно записать

$$\varphi''(x)=m_{k-1}\frac{x_k-x}{h}+m_k\frac{x-x_{k-1}}{h}, \tag{3}$$

где $m_k=\varphi''(x_k)$. Проинтегрировав дважды обе части равенства (3), получим

$$\varphi(x)=m_{k-1}\frac{(x_k-x)^3}{6h}+m_k\frac{(x-x_{k-1})^3}{6h}+A_k\frac{x_k-x}{h}+B_k\frac{x-x_{k-1}}{h}, \qquad (4)$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные интегрирования. Они находятся из условий $\varphi(x_k)=y_k$. Подставляя в равенство (4) $x=x_{k-1}$ и $x=x_k$, получим $A_k=y_{k-1}-m_{k-1}\frac{h^2}{6}$, $B_k=y_k-m_k\frac{h^2}{6}$.

Таким образом, на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ имеем

$$\varphi(x)=m_{k-1}\frac{(x_k-x)^3}{6h}+m_k\frac{(x-x_{k-1})^3}{6h}+\left(y_{k-1}-m_{k-1}\frac{h^2}{6}\right)\frac{x_k-x}{h}+$$
$$+\left(y_k-m_k\frac{h^2}{6}\right)\frac{x-x_{k-1}}{h}. \qquad (5)$$

Для определения коэффициентов m_k и m_{k-1} воспользуемся условием непрерывности $\varphi'(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$\frac{h}{6}m_{k-1}+\frac{2}{3}hm_k+\frac{h}{6}m_{k+1}=\frac{1}{h}(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}). \qquad (6)$$

Выражение (6) получается в результате сравнения односторонних пределов первой производной

$$\varphi'(x)=-m_{k-1}\frac{(x_k-x)^2}{2h}+m_k\frac{(x-x_{k-1})^2}{2h}+\frac{y_k-y_{k-1}}{h}-\frac{m_k-m_{k+1}}{6}h,$$

а именно:

$$\varphi'(x_k-0)=\frac{h}{6}m_{k-1}+\frac{h}{3}m_k+\frac{y_k-y_{k-1}}{h},$$
$$\varphi'(x_k+0)=-\frac{h}{3}m_k-\frac{h}{6}m_{k+1}+\frac{y_{k+1}-y_k}{h}.$$

Дополняя эти условия равенствами $\varphi(x_k)=y_k$ и $\varphi''(x_0)=\varphi''(x_n)=0$, получим систему уравнений для определения m_k и m_{k+1}.

1265. Аппроксимировать функцию $y=4^x$ на отрезке $[-1, 1]$ линейным сплайном.

△ Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на четыре равные части $\omega_1=[-1; -0{,}5]$, $\omega_2=[-0{,}5; 0]$, $\omega_3=[0; 0{,}5]$, $\omega_4=[0{,}5; 1]$ (рис. 89) и на каждом отрезке ω_k ($k=1, 2, 3, 4$) проведем линейную интерполяцию. В узлах интерполяции значения функции определяются следующей таблицей:

x	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
y	$0{,}25$	$0{,}5$	1	2	4

Применяя на каждом из отрезков ω_k формулу (1), получим

$$S(x)=\begin{cases} y=0{,}5x+0{,}75 & \text{при } x\in[-1; -0{,}5], \\ y=x+1 & \text{при } x\in[-0{,}5; 0], \\ y=2x+1 & \text{при } x\in[0; 0{,}5], \\ y=4x & \text{при } x\in[0{,}5; 1]. \end{cases}$$

Воспользуемся полученным линейным сплайном для вычисления значения функции $y=4^x$ в точке $x=0{,}125$. Эта точка принадлежит отрезку $\omega_3=[0; 0{,}5]$, на котором $y=2x+1$. Следовательно, $4^{0,125} \approx S(0,125)=1,25$, а с помощью таблиц находим $4^{0,125} \approx 1,19$. ▲

1266. Кривая зависимости скорости v роспуска отцепа на сортировочной горке от длины l отцепа приведена на рис. 90. За-

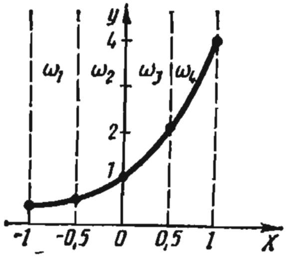

Рис. 89

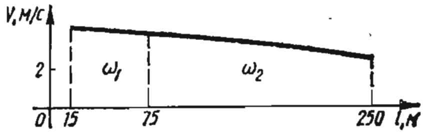

Рис. 90

писать аналитически уравнение этой кривой, применив интерполяцию линейным сплайном.

△ Разобьем отрезок [15, 250] на две неравные части $\omega_1=[15, 75]$ и $\omega_2=[75, 250]$ и заменим кривую линейным сплайном. Составим таблицу

l	15	75	250
v	4,2	4,0	2,7

Воспользовавшись формулой (1), получим

$$v_1=\frac{4-4,2}{75-15}(l-15)+4,2, \quad v_2=\frac{2,7-4}{250-75}(l-75)+4,$$

или

$$v_1=-0,0033l+4,25, \quad v_2=-0,0074l+4,5571.$$

Итак,

$$v(l) \approx S(l)=\begin{cases} -0,0033l+4,25 & \text{при} \quad l \in [15, 75], \\ -0,0074l+4,5571 & \text{при} \quad l \in [75, 250]. \end{cases}$$ ▲

1267. Найти приближение функции $y=\sin x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ кубическим сплайном.

△ Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на четыре равные части $\omega_1=[-\pi, -\pi/2]$, $\omega_2=[-\pi/2, 0]$, $\omega_3=[0, \pi/2]$, $\omega_4=[\pi/2, \pi]$. Здесь $h=\pi/2$. Значения функции $\sin x$ в узлах интерполяции запишем в таблицу:

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y	0	-1	0	1	0

Искомая функция имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x) & \text{при} \quad x\in[-\pi,\ -\pi/2],\\ \varphi_2(x) & \text{при} \quad x\in[-\pi/2,\ 0],\\ \varphi_3(x) & \text{при} \quad x\in[0,\ \pi/2],\\ \varphi_4(x) & \text{при} \quad x\in[\pi/2,\ \pi].\end{cases}$$

1) Найдем $\varphi_1(x)$, $\omega_1=[-\pi,\ -\pi/2]$, $k=1$. Из равенства (5) имеем

$$\varphi_1(x)=m_0\frac{\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)^3}{3\pi}+m_1\frac{(x+\pi)^3}{3\pi}+\left(0-m_0\frac{\pi^2}{24}\right)\frac{-\frac{\pi}{2}-x}{\pi/2}+$$
$$+\left(-1-m_1\frac{\pi^2}{24}\right)\frac{x+\pi}{\pi/2},$$

или

$$\varphi_1(x)=m_1\frac{(x+\pi)^3}{3\pi}-\left(1+m_1\frac{\pi^2}{24}\right)\frac{x+\pi}{\pi/2},$$

так как $m_0=\varphi''(x_0)=0$.

Из равенства (6) получаем

$$\frac{\pi}{12}m_0+\frac{\pi}{3}m_1+\frac{\pi}{12}m_2=\frac{2}{\pi}[0-2(-1)]=\frac{4}{\pi}, \quad \text{или} \quad m_2=-4m_1+\frac{48}{\pi^2}.$$

С другой стороны, из равенства (3) имеем

$$m_2=\varphi''(0)=m_0\frac{-\frac{\pi}{2}-0}{\pi/2}+m_1\frac{0+\pi}{\pi/2}=2m_1-m_0, \quad \text{или} \quad m_2=2m_1.$$

Следовательно, $2m_1=-4m_1+48/\pi^2$, $m_1=8/\pi^2$. Тогда

$$\varphi_1(x)=\frac{8}{\pi^2}\frac{(x+\pi)^3}{3\pi}-\frac{8}{\pi^2}\frac{x+\pi}{3\pi}\frac{\pi^2}{4}-\frac{x+\pi}{\pi/2} \quad \text{или} \quad \varphi_1(x)=\frac{8}{3\pi^3}x(\pi+x)(2\pi+x).$$

2) Найдем $\varphi_2(x)$; $\omega_2=[-\pi/2,\ 0]$, $k=2$. Из равенства (5) имеем

$$\varphi_2(x)=-\frac{8x^3}{3\pi^3}+\frac{8x}{3\pi}+m_2\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^3}{3\pi}-m_2\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\pi}{12}.$$

Найдем m_2 из равенства (6) и (3):

$$\frac{\pi}{12}m_1+\frac{\pi}{3}m_2+\frac{\pi}{12}m_3=\frac{2}{\pi}(1-2\cdot 0-1), \quad m_3=-4m_2-\frac{8}{\pi^2}.$$

С другой стороны,

$$m_3=\varphi''\left(\frac{\pi}{2}\right)=m_1\frac{0-\pi/2}{\pi/2}+m_2\frac{\pi/2-(-\pi/2)}{\pi/2}=2m_2-\frac{8}{\pi^2}.$$

Следовательно, $m_2=0$. Тогда

$$\varphi_2(x)=\frac{8}{3\pi^3}x(\pi+x)(\pi-x).$$

3) Найдем $\varphi_3(x)$, $\omega_3=[0,\ \pi/2]$, $k=3$. Из равенства (5) имеем

$$\varphi_3(x)=m_3\left(\frac{x^3}{3\pi}-\frac{\pi x}{12}\right)+\frac{2x}{\pi}.$$

Для нахождения m_3 используем равенство (6): $m_4 = -4m_3 - \frac{48}{\pi^2}$. Так как $m_4 = \varphi''(\pi) = 2m_3$, то $-4m_3 - \frac{48}{\pi^2} = 2m_3$, $m_3 = -\frac{8}{\pi^2}$. Тогда

$$\varphi_3(x) = \frac{8}{3\pi^3} x(\pi + x)(\pi - x).$$

4) Найдем $\varphi_4(x)$, $\omega_4 = [\pi/2, \pi]$, $k = 4$. Имеем

$$\varphi_4(x) = m_3 \frac{(\pi - x)^3}{3\pi} + m_4 \frac{(x - \pi/2)^3}{3\pi} + \left(1 - m_3 \frac{\pi^2}{24}\right) \frac{\pi - x}{\pi/2} + \left(0 - m_4 \frac{\pi^2}{24}\right) \frac{x - \pi/2}{\pi/2}.$$

Так как $m_3 = -8/\pi^2$, а $m_4 = \varphi''(\pi) = 0$, то

$$\varphi_4(x) = \frac{8}{3\pi^3} x(\pi - x)(2\pi - x).$$

Итак, кусочно-кубическая сплайн-функция $\varphi(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{8}{3\pi^3} x(\pi + x)(2\pi + x) & \text{при} \quad x \in [-\pi, -\pi/2], \\ \frac{8}{3\pi^3} x(\pi + x)(\pi - x) & \text{при} \quad x \in [-\pi/2, 0], \\ \frac{8}{3\pi^3} x(\pi + x)(\pi - x) & \text{при} \quad x \in [0, \pi/2], \\ \frac{8}{3\pi^3} x(\pi - x)(2\pi - x) & \text{при} \quad x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Отметим, что в общем случае деление заданного отрезка на равные части не является обязательным. В данном случае это было сделано для упрощения вычислений. ▲

1268. Построить линейную сплайн-функцию для функции $y = \operatorname{tg} x$, заданной таблично на отрезке $[-\pi/4, \pi/4]$:

x	$-\pi/4$	$-\pi/8$	0	$\pi/8$	$\pi/4$
y	-1	$-0,4146$	0	0,4146	1

1269. Построить линейную сплайн-функцию для функции $y = (4 + x)^{1/2}$, заданной таблично на отрезке $[-1, 1]$:

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1
y	1,7320	1,8708	2	2,1213	2,2361

1270. Построить линейную сплайн-функцию для функции $y = \operatorname{ch} x$, заданной таблично на отрезке $[-1, 1]$:

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1
y	1,5431	1,1276	1	1,1276	1,5431

1271. Построить кубическую сплайн-функцию для функции $y = 2^x$, заданной таблично на отрезке $[-1, 1]$:

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1
y	0,5	0,7071	1	1,4142	2

1272. Построить кубическую сплайн-функцию для функции $y = \ln(2 + x)$, заданной таблично на отрезке $[-1, 1]$:

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1
y	0	0,4054	0,6931	0,9163	1,0986

ГЛАВА X

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ О ФУНКЦИОНАЛЕ

Вариационное исчисление занимается задачей отыскания наибольших и наименьших значений функционалов, определенных на множествах линий или поверхностей.

Понятие функционала является расширением понятия функции на случай, когда область определения E есть множество объектов произвольной природы. Если каждому элементу f из E по некоторому правилу ставится в соответствие действительное число J, то говорят, что на множестве E определен *функционал* $J=J(f)$. Функционалы обычно задаются с помощью некоторых определенных интегралов. Функции из области определения E данного функциона J будем называть *функциями сравнения* (или *допустимыми функциями*).

В дальнейшем в качестве классов C функций сравнения используются следующие множества функций, заданных на отрезке $[x_0, x_1]$: $C[x_0, x_1]$ — класс непрерывных функций; $C^{(1)}[x_0, x_1]$ — класс гладких (т. е. имеющих непрерывные первые производные) функций.

Обобщением этих двух классов является множество $C^{(m)}[x_0, x_1]$ — класс функций, имеющих непрерывные m-е производные ($m=0, 1, 2, \ldots$).

В каждом из указанных классов можно ввести понятие расстояния. Именно, *расстоянием нулевого порядка* между любыми двумя функциями $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, принадлежащими $C[x_0, x_1]$, называется число

$$\rho_0=\rho_0(y_1, y_2)=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y_1(x)-y_2(x)|$$

Расстоянием первого порядка между функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из класса $C^{(1)}[x_0, x_1]$ называется число

$$\rho_1=\rho_1(y_1, y_2)=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y_1'(x)-y_2'(x)|.$$

Аналогично можно ввести понятие расстояния $\rho_m(y_1, y_2)$ между любыми двумя функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из класса $C^{(m)}[x_0, x_1]$.

Пусть $\overline{y}(x)\in C^{(m)}[x_0, x_1]$ и ε — произвольное сколь угодно малое положительное число. Множество всех функций $y(x)$ из класса $C^{(m)}[x_0, x_1]$ таких, что $\rho_m(y, \overline{y})<\varepsilon$, называется *$\varepsilon$-окрестностью* функции $\overline{y}(x)$ в заданном классе функций.

1273. Вычислить функционал $J(y(x))=\int\limits_0^1[y(x)]^2\,dx$, если $y_1(x)=x$, $y_2(x)=e^x$, $y_3(x)=\sqrt{1+x^2}$.

△ Здесь функционал задан как определенный интеграл $J(y(x))=\int\limits_0^1[y(x)]^2\,dx$. Подставляя в это соотношение данные функции, получим числовые значения функционала. Имеем

$$\text{при}\quad y_1(x)=x:\quad J_1(x)=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3};$$

$$\text{при}\quad y_2(x)=e^x:\ J_2(x)=\int_0^1 (e^x)^2\,dx=\frac{1}{2}(e^2-1);$$

$$\text{при}\quad y_3(x)=\sqrt{1+x^2}:\ J_3(\sqrt{1+x^2})=\int_0^1 (\sqrt{1+x^2})^2 dx=\frac{4}{3}.\ \blacktriangle$$

1274. Найти расстояние между функциями $y=x^2$ и $y=x$ в классе $C[0, 1]$.

$\triangle$ По определению $\rho_0=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^2-x|$. На концах отрезка $[0, 1]$ функция $y=x^2-x$ принимает значения, равные нулю. Исследуем ее на экстремум в интервале $]0, 1[$. Имеем $y'=2x-1$; $y'=0$ при $x=1/2$. Так как $y''(1/2)=2>0$, то в точке $x=1/2$ исследуемая функция достигает минимума, равного $-1/4$. Поэтому $|x^2-x|$ принимает в точке $x=1/2$ наибольшее на отрезке $[0, 1]$ значение, равное $1/4$. Значит, расстояние между функциями $y=x^2$ и $y=x$ в классе $C[0, 1]$ есть $\rho_0=1/4$. $\blacktriangle$

1275. Найти расстояние ρ_0 между функциями $y_1(x)=xe^{-x}$ и $y_2=0$ на отрезке $[0, 2]$.

1276. Найти расстояние ρ_1 между функциями $y_1(x)=x$ и $y_2(x)=\ln x$ на отрезке $[e^{-1}, e]$.

§ 2. ПОНЯТИЕ О ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть функционал $J(y(x))=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, где $F(x, y, y')$ — некоторая известная функция трех переменных, определен в классе C. Разность

$$\delta y(x)=\bar{y}(x)-y(x),\quad y(x),\quad \bar{y}(x)\in C,$$

называется *приращением* (или *вариацией*) *аргумента* y функционала $J(y)$.

Разность

$$\Delta J=\Delta J(\delta y)=J(y+\delta y)-J(y)$$

называется *приращением функционала* $J(y)$, соответствующим приращению δy аргумента.

Пусть функция $F(x, y, y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Тогда в приращении функционала $\Delta J(\delta y)$ можно выделить главную часть, линейную относительно вариации аргумента, которая называется *вариацией функционала* $J(y)$ и обозначается через δJ.

1277. Найти приращение функционала $J(y(x))=\int\limits_0^3 y^2y'\,dx$, если $y(x)=x^2$, $y_1(x)=x^3$.

△ Здесь приращение аргумента функционала $\delta y(x)=y_1(x)-y(x)=x^3-x^2$, а соответствующее ему приращение функционала

$$\Delta J = J(y(x)+\delta y(x)) - J(y(x)) = J(y_1(x)) - J(y(x)) = \\ = \int_0^3 x^6 \cdot 3x^2\,dx - \int_0^3 x^4 \cdot 2x\,dx = 6318. \ \blacktriangle$$

1278. Найти вариацию функционала $J(y(x))=\int_{x_0}^{x_1} yy'\,dx$, если $y(x)$ и $\delta(y(x))\in C^{(1)}[x_0, x_1]$.

△ По определению приращения функционала

$$\Delta J = J(y(x)+\delta y(x)) - J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y+\delta y)(y'+\delta y')\,dx - \int_{x_0}^{x_1} yy'\,dx = \\ = \int_{x_0}^{x_1} (y'\,\delta y + y\,\delta y')\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta y\,\delta y'\,dx,$$

откуда искомая вариация

$$\delta J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} (y'\,\delta y + y\,\delta y')\,dx. \ \blacktriangle$$

Сравнить приращение и вариацию следующих функционалов:

1279. $J(y(x))=\int_1^e (yy'+xy'^2)\,dx$, если $y=\ln x$, $\delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$.

1280. $J(y(x))=\int_0^\pi y'^2 \sin x\,dx$, если $y=\sin x$, $\delta y=\alpha\cos x$.

§ 3. ПОНЯТИЕ ОБ ЭКСТРЕМУМЕ ФУНКЦИОНАЛА. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Пусть E — класс функций сравнения функционала J. Говорят, что функционал J имеет в этом классе *абсолютный минимум (максимум)*, реализуемый функцией $\bar{y}(x)\in E$, если для любой функции $y(x)\in E$ выполняется неравенство

$$J(y(x)) \geqslant J(\bar{y}(x)) \ [J(y(x)) \leqslant J(\bar{y}(x))], \tag{1}$$

т. е. приращение функционала $\Delta J = J(y(x)) - J(\bar{y}(x))$ неотрицательно (неположительно).

Говорят, что функционал J имеет в классе E *относительный минимум (максимум)*, реализуемый функцией $\bar{y}(x)$, если найдется такая ε-окрестность функции $\bar{y}(x)$, что для любой функции $y(x)\in E$ из этой окрестности выполняется неравенство (1).

Очевидно, абсолютный экстремум является и подавно относительным экстремумом. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть функционал

$$J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \tag{2}$$

определен в классе $C^{(1)}$, а подынтегральная функция непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Теорема. *Если функция $y=y(x)\in C^{(1)}$ удовлетворяет граничным условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ и реализует экстремум функционала* (1), *то она является решением уравнения Эйлера*

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0, \tag{3}$$

или в развернутой записи

$$y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}+F_{xy'}-F_y=0. \tag{4}$$

Уравнение (3) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y(x)$. Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2, которые должны определиться из граничных условий $y(x_0)=y_0$ и $y(x_1)=y_1$. Интегральные кривые уравнения Эйлера называются *экстремалями*. Для того чтобы экстремаль проходила через две точки $M(x_0;\ y_0)$ и $N(x_1;\ y_1)$, следует выбрать постоянные C_1 и C_2 так, чтобы $\varphi(x_0, C_1, C_2)=y_0$ и $\varphi(x_1, C_1, C_2)=y_1$, где $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ — общее решение уравнения Эйлера.

В общем случае уравнение Эйлера не разрешимо в квадратурах. Рассмотрим частные случаи этого уравнения.

Случай 1. Функция F не зависит от y', т. е. $F=F(x, y)$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид $\frac{\partial F}{\partial y}=0$. Это уравнение не является дифференциальным относительно неизвестной функции $y(x)$, так как оно не содержит y'. Оно определяет одну или несколько функций, которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям $y(x_0)=y_0$ и $y(x_1)=y_1$. Следовательно, решение рассматриваемой вариационной задачи в общем случае не существует. Лишь в специальных случаях найдется кривая $y=y(x)$, проходящая через точки $M(x_0, y_0)$ и $N(x_1, y_1)$ и являющаяся решением функционального уравнения $\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

1281. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x))=\int_0^1 (x\sin y+\cos y)\,dx;\ \ y(0)=0,\quad y(1)=\pi/4.$$

△ Здесь $F=x\sin y+\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x\cos y-\sin y$ и уравнение Эйлера имеет вид $x\cos y-\sin y=0$, откуда $y=\operatorname{arctg} x$. Это решение удовлетворяет заданным граничным условиям и, следовательно, полученная кривая является экстремалью. ▲

1282. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x))=\int_1^e (xe^y-ye^x)\,dx;\ \ y(1)=1,\ \ y(e)=1.$$

△ Здесь $F=xe^y-ye^x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=xe^y-e^x$, и уравнение Эйлера записывается в виде $xe^y-e^x=0$, откуда $y=x-\ln x$. Полученное решение не удовлетворяет данным граничным условиям и найденная кривая не является экстремалью. ▲

Случай 2. Функция F линейно зависит от y', т. е. $F=P(x, y)+y'Q(x, y)$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$. Это уравнение не является дифференциальным относительно неизвестной функции $y(x)$ и, вообще говоря, не имеет решений, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Если же $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, то подынтегральное выражение $F(x, y, y')\,dx = (P+y'Q)\,dx = P\,dx + Q\,dy$ есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных. В этом случае значение функционала не зависит от пути интегрирования. Следовательно, функционал J постоянен на всех допустимых кривых и вариационная задача теряет смысл.

1283. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x)) = \int_{\alpha}^{\beta} [(xy'+1)e^y + x^2 - y^2y']\,dx; \; y(\alpha) = a, \; y(\beta) = b.$$

△ Здесь F линейно зависит от y':

$$F = (xy'+1)e^y + x^2 - y^2y' = (x^2+e^y) + (xe^y - y^2)\,y',$$

т. е. $P(x, y) = x^2 + e^y$, $Q(x, y) = xe^y - y^2$ и $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. Выражение $(x^2+e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy$ есть полный дифференциал, и, следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$J(y(x)) = \int_{(\alpha;\,a)}^{(\beta;\,b)} (x^2+e^y)\,dx + (xe^y - y^2)\,dy = \int_{(\alpha;\,a)}^{(\beta;\,b)} d\left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right) =$$

$$= \left(xe^y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{(\alpha;\,a)}^{(\beta;\,b)} = \beta e^b - \alpha e^a + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} + \frac{a^3 - b^3}{3}.$$

Значение функционала J постоянно для всех кривых $y(x)$, проходящих через точки $(\alpha;\,a)$ и $(\beta;\,b)$, и вариационная задача не имеет смысла. ▲

Случай 3. Функция F зависит лишь от y', т. е. $F = F(y')$. Тогда уравнение Эйлера имеет вид $y''F_{y'y'} = 0$. Если $F_{y'y'} \neq 0$ (в противном случае требуется дополнительное исследование), то получаем уравнение $y'' = 0$. Его общее решение $y = C_1x + C_2$, т. е. экстремалями являются прямые.

1284. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x)) = \int_0^1 (y'^2 + y' + 1)\,dx; \quad y(0) = 1, \; y(1) = 2.$$

△ Здесь $F = y'^2 + y' + 1$, $F_{y'} = 2y' + 1$, $F_{y'y'} = 2$. Уравнение Эйлера имеет вид $2y'' = 0$, откуда $y = C_1x + C_2$. Значения C_1 и C_2 найдем из условия прохождения экстремали через точки $M(0;\,1)$ и $N(1;\,2)$: $C_2 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, т. е. $C_1 = C_2 = 1$. Таким образом, экстремалью является прямая $y = x + 1$. ▲

Случай 4. Функция F зависит лишь от x и y', т. е. $F = F(x, y')$. Так как в этом случае $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, то уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, откуда сразу находим $\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = C_1$. Разрешая это уравнение относительно y' и интегрируя, получим общее решение уравнения Эйлера.

1285. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x)) = \int_1^e (xy'^2 - 2y')\,dx; \quad y(1) = 1, \; y(e) = 2.$$

△ Здесь $F=xy'^2-2y'$, $\frac{\partial F}{\partial y'}=2xy'-2$, т. е. $2xy'-2=C_1$. Отсюда $y'=\frac{C_1+2}{2x}$. Интегрируя, находим $y=\frac{1}{2}(C_1+2)\ln x+C_2$. Используя граничные условия, получаем $C_2=1$, $\frac{1}{2}C_1+C_2+1=2$, т. е. $C_1=0$, $C_2=1$. Экстремалью является кривая $y=\ln x+1$. ▲

Случай 5. Функция F зависит лишь от y и y', т. е. $F=F(y, y')$. Уравнение Эйлера, имеющее в этом случае вид $y''F_{y'y'}+y'F_{yy'}-F_y=0$, сводится к дифференциальному уравнению первого порядка $F-y'F_{y'}=C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

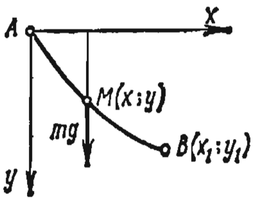

Рис. 91

1286 (Задача о наименьшей площади поверхности вращения). Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0;\ y_0)$ и $B(x_1;\ y_1)$, найти ту, которая при вращения вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

△ Площадь поверхности вращения является функционалом, определенным в пространстве $C^{(1)}[x_0,\ x_1]$:

$$J(y(x))=2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Здесь $F=y\sqrt{1+y'^2}$, поэтому уравнение Эйлера сводится к уравнению

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1, \quad \text{или} \quad y=C_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Полагая $y'=\operatorname{sh} t$, находим $y=C_1\operatorname{ch} t$. Отсюда

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{C_1\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t}=C_1\,dt, \quad \text{т. е.} \quad x=C_1t+C_2.$$

Следовательно, искомой кривой является цепная линия $y=C_1\operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$. Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий: $\operatorname{ch}\frac{x_0-C_2}{C_1}=\frac{y_0}{C_1}$, $\operatorname{ch}\frac{x_1-C_2}{C_1}=\frac{y_1}{C_1}$. ▲

1287 (Задача о брахистохроне). Среди всех линий, соединяющих точки A и B, найти ту, по которой материальная точка, двигаясь под действием силы тяжести из A без начальной скорости, достигнет точки B за кратчайшее время.

△ Проведем через точки $A(0;\ 0)$ и $B(x_1;\ y_1)$ вертикальную плоскость (рис. 91) и возьмем произвольную линию $y=f(x)$, $0\leqslant x\leqslant x_1$, где f — непрерывно дифференцируемая функция, причем $f(0)=0$ и $f(x_1)=y_1$.

Для произвольной точки M на основании закона сохранения кинетической энергии получим $mv^2/2=mgy$, где m — масса точки, а v — ее скорость. Отсюда $v=\sqrt{2gy}$. С другой стороны, $v=\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt}$ (ds — элемент дуги линии).

Отсюда

$$dt=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx, \text{ т. е. } J(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx.$$

Уравнение Эйлера в данном случае приводит к следующему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=C_1, \text{ т. е. } y=\frac{1}{C_1^2(1+y'^2)}.$$

Положим $y'=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; тогда $y=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)$, а

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\sin t\,dt}{2C_1^2\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}=\frac{1}{C_1^2}\sin^2\frac{t}{2}dt=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t)\,dt,$$

$$x=\frac{1}{2C_1^2}(t-\sin t)+C_2.$$

Мы получим параметрические уравнения циклоиды:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2C_1^2}(t-\sin t), \\ y=\frac{1}{2C_1^2}(1-\cos t), \end{cases}$$

т. е. линией наискорейшего ската (брахистохроной) является циклоида. Постоянная $C_2=0$ (так как $x=0$ при $t=0$), а постоянная C_1 определяется из условия, что кривая проходит через точку $B(x_1;\ y_1)$. ▲

Случай 6. Функция F зависит только от y, т. е. $F=F(y)$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид $\frac{\partial F}{\partial y}=0$.

1288. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x))=\int_0^1(2e^y-y^2)\,dx;\ y(0)=1,\ y(1)=e.$$

△ Здесь $F=2e^y-y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2e^y-2y$, $2e^y-2y=0$, т. е. $y=e^y$. Последнее уравнение не имеет даже числовых решений. ▲

Случай 7. Функция F имеет вид $F(x,\ y,\ y')=p(x)y'^2+q(x)y^2+2yf(x)$, где $p(x)>0$, $p'(x)$, $q(x)\geqslant 0$, $f(x)$ непрерывны на отрезке $[x_0, x_1]$. В этом случае экстремаль $y=y(x)$ функционала

$$J(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}(p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y)\,dx,$$

проходящая через две заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), удовлетворяет следующему уравнению Эйлера: $\frac{d}{dx}(py')-qy-f=0$.

1289. Найти экстремаль функционала

$$J(y(x))=\int_0^{\ln 2}(y'^2+2y^2+2y)\,e^{-x}\,dx;\quad y(0)=y(\ln 2)=0.$$

△ Здесь $F=(y'^2+2y^2+2y)\,e^{-x}$, $p(x)=e^{-x}$, $q(x)=2e^{-x}$, $f(x)=e^{-x}$. Уравнение Эйлера примет вид

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y')-2e^{-x}y-e^{-x}=0, \text{ или } y''-y'-2y=1,$$

откуда $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-1/2$. Используя граничные условия, получим $C_1+C_2=1/2$, $4C_1+(1/2)C_2=1/2$, т. е. $C_1=1/14$, $C_2=3/7$. Итак, экстремалью является кривая $y=(1/14)\,e^{2x}+(3/7)\,e^{-x}-1/2$. ▲

Найти экстремали заданных функционалов:

1290. $J(y)=\int_0^1(y\operatorname{sh}x-y^2\operatorname{ch}x)\,dx;\quad y(0)=1,\ y(1)=1.$

1291. $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}e^y(1+xy')\,dx;\quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1.$

1292. $J(y)=\int_0^1 y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=1.$

1293. $J(y)=\int_0^1(xy'-y'^2)\,dx;\quad y(0)=1,\ y(1)=1/4.$

1294. $J(y)=\int_{-1}^{2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx;\quad y(-1)=1,\ y(2)=4.$

1295. $J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+1)\,dx;\quad y(x_0)=y(x_1)=0.$

1296. $J(y)=\int_0^{3\pi/2}(y^2-2y'^2)\,e^{-x}\,dx;\quad y(0)=0,\ y(3\pi/2)=e^{3\pi/4}.$

1297. $J(y)=\int_1^2(x^2y'^2+12y^2)\,dx;\quad y(1)=1,\ y(2)=8.$

1298. $J(y)=\int_4^8(x-4y)^2\,dx;\quad y(4)=1,\ y(8)=2.$

1299. Найти кривую $y=y(x)$, по которой материальная точка перемещается из точки $M(0;\ 1)$ в точку $N(1;\ 2)$ со скоростью $v=x$ за минимальное время.

§ 4. ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Рассмотрим случай, когда интеграл содержит производные искомой функции $y=y(x)$ выше первого порядка:

$$J(y(x))=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx. \qquad (1)$$

При этом искомая функция $y(x)\in C^{(n)}[x_0, x_1]$, и удовлетворяет $2n$ граничным условиям:

$$\begin{gathered} y(x_0)=y_0; \quad y'(x_0)=y_0'; \ \ldots; \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}; \\ y(x_1)=y_1; \quad y'(x_1)=y_1', \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}, \end{gathered} \qquad (2)$$

а подынтегральная функция $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ дифференцируема $n+2$ раза по всем своим аргументам.

Тогда функция $y=y(x)$, реализующая экстремум функционала (1)—(2), должна удовлетворять *уравнению Эйлера—Пуассона*:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\ldots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

1300. Среди всех функций класса $C^{(2)}[0, \pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0$, $y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала $J(y(x))=$ $=\int_0^\pi (16y^2-y''^2+x^2)\,dx$.

△ Для данной задачи уравнение Эйлера—Пуассона имеет вид

$$32y+(-1)^2\frac{d^2}{dx^2}(-2y'')=0, \quad \text{или} \quad y^{(IV)}-16y=0.$$

Его общее решение таково:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x.$$

Используя граничные условия, получим $C_1=C_2=C_3=0$, $C_4=0{,}5$. Итак, $y=0{,}5\sin 2x$ — искомая функция. ▲

Найти экстремали заданных функционалов:

1301. $J(y)=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} y''^2\,dx$; $y(x_0)=y(x_1)=0$, $y'(x_0)=y'(x_1)=0$.

1302. $J(y)=\int_0^1 (y''^2+2y'^2+y^2)\,dx$; $y(0)=y(1)=0$, $y'(0)=1$, $y'(1)=-\operatorname{sh} 1$.

1303. $J(y)=\int_0^{\pi/2} (y''^2-y^2+x^2)\,dx$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y(\pi/2)=0$, $y'(\pi/2)=-1$.

§ 5. ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ДВУХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим функционал

$$J(y, z)=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx, \tag{1}$$

зависящий от двух функций $y, z \in C^{(1)}[x_0, x_1]$.

В этой вариационной задаче необходимо найти кривые $y=y(x)$, $z=z(x)$, удовлетворяющие граничным условиям

$$y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1, \quad z(x_0)=z_0, \quad z(x_1)=z_1. \tag{2}$$

Искомые экстремали являются решением системы дифференциальных уравнений второго порядка (системы уравнений Эйлера)

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0, \\ F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0. \end{cases}$$

Эта система уравнений относительно искомых функций $y(x)$ и $z(x)$ играет в поставленной задаче (1)—(2) ту же роль, что и уравнение Эйлера для одной неизвестной функции $y(x)$.

1304. Найти экстремали функционала

$$J=\int_0^{\pi}(y'^2-2y^2+2yz-z'^2)\,dx; \ \ y(0)=z(0)=0, \ \ y(\pi)=z(\pi)=1.$$

△ Система дифференциальных уравнений для данного функционала имеет вид $y''+2y-z=0$, $z''+y=0$. Исключая z, получим уравнение $y^{(IV)}+2y''+y=0$, общее решение которого

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x).$$

В силу граничных условий $C_1=0$, $C_3=-1/\pi$, т. е. $y=C_2\sin x+C_4 x\sin x-(x/\pi)\cos x$. Далее, имеем

$$z=C_2\sin x+C_4(2\cos x+x\sin x)+\frac{1}{\pi}(2\sin x-x\cos x).$$

Постоянные C_2 и C_4 находим, используя граничные условия для z: $C_4=0$, C_2 — произвольно. Следовательно, $z=C_2\sin x+(1/\pi)\cdot(2\sin x-x\cos x)$. Итак, семейство экстремалей имеет вид $y=C_2\sin x-(x/\pi)\cos x$, $z=C_2\sin x+(1/\pi)\times(2\sin x-x\cos x)$. ▲

Найти семейства экстремалей заданных функционалов:

1305. $J(y, z)=\int_{0,5}^{1}(y'^2-2xyz')\,dx$; $\quad y(0{,}5)=2$, $\quad z(0{,}5)=15$, $y(1)=z(1)=1$.

1306. $J(y, z)=\int_1^2(z'^2-xy'x)dx$; $\quad y(1)=z(1)=1$, $\quad y(2)=-1/6$; $z(2)=1/2$.

1307. $J(y, z) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} z'^2 - y'^2 + 2xy\right) dx;$ $y(-1) = 2,$ $y(1) = 0,$ $z(-1) = -1,$ $z(1) = 1.$

1308. $J(y, z) = \int\limits_{0}^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz)\, dx;$ $y(0) = 0,$ $y(\pi/2) = 1,$ $z(0) = 0,$ $z(\pi/2) = 1.$

§ 6. ФУНКЦИОНАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФУНКЦИЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функционал

$$J = \iint\limits_{D} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Обозначим $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$. Пусть $F(x, y, z, p, q)$ — функция, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в некоторой пространственной области R значений переменных x, y, z при всех конечных p и q. Далее, пусть Γ — замкнутая пространственная кривая, проекция которой на плоскость xOy есть простой замкнутый контур C, ограничивающий область D. Уравнение поверхности S, расположенной в области R и проходящей через кривую Γ, имеет вид $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Поставим задачу отыскания поверхности $z = f(x, y)$, для которой интеграл имеет наименьшее значение по сравнению с интегралами, взятыми по близким допустимым поверхностям.

Если такая поверхность существует, то ее уравнение $z = f(x, y)$ является решением *уравнения Эйлера — Остроградского*:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0.$$

1309 (Задача Плато). Найти поверхность с наименьшей площадью, проходящую через данную кривую Γ в пространстве.

△ Задача сводится к нахождению минимума интеграла

$$J = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Здесь $F = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Уравнение Эйлера — Остроградского для этого случая принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0.$$

Раскрывая это выражение, найдем

$$r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs = 0, \text{ где } r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Это уравнение в частных производных определяет минимальные поверхности, для которых сумма главных радиусов кривизны в каждой точке поверхности равна нулю, т. е.

$$R_1+R_2=\frac{(1+q^2)\,r+(1+p^2)\,t-2pqs}{rt-s^2}\sqrt{1+p^2+q^2}=0. \quad \blacktriangle$$

Записать уравнение Эйлера—Остроградского для функционалов:

1310. $J=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$

1311. $J=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\varphi(x, y)\right]dx\,dy.$

§ 7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим функционал

$$J=J_C=\int\limits_{t_0}^{t_1}F(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})\,dt, \tag{1}$$

где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ — производные от $x(t)$ и $y(t)$ по параметру t, а t_0 и t_1 — значения t на концах кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$. Если $F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y})=kF(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, где $k>0$, то функции $x(t)$ и $y(t)$, реализующие экстремум функционала J, при любом выборе параметра t должны удовлетворять системе уравнений Эйлера:

$$F_x-\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}})=0, \quad F_y-\frac{d}{dt}(F_{\dot{y}})=0.$$

Эти два уравнения можно свести к одному:

$$F_1(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})+F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}=0,$$

где

$$F_1(x,\ y,\ \dot{x},\ \dot{y})=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=\frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}}=\frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}, \text{ или } \frac{F_{x\dot{y}}-F_{y\dot{x}}}{F_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}=\frac{1}{R} \tag{2}$$

(R — радиус кривизны экстремали).

1312. Найти экстремали функционала

$$J=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-y\dot{x})\right]dt,$$

где a — некоторое положительное число.

△ Здесь $F=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+a^2(x\dot{y}-y\dot{x})$ — положительная однородная функция первой степени от $\dot{x}$ и $\dot{y}$. Имеем $F_{x\dot{y}}=a^2$, $F_{y\dot{x}}=-a^2$, $F_1=\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2}=$ $=\frac{1}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}$. Поэтому уравнение (2) принимает вид $1/R=2a^2$. Таким образом, экстремалями служат дуги окружностей с радиусом $1/(2a^2)$. ▲

Найти экстремали функционалов:

1313. $J_C = \int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,2)} \frac{\dot{y}^2 - 3\dot{x}^2 e^{\dot{y}/\dot{x}}}{\dot{x}}\,dt.$

1314. $J_C = \int\limits_{(0;\,0)}^{(\pi/2;\,2)} \frac{\dot{y}^2 - y^2\dot{x}^2}{\dot{x}}\,dt.$

§ 8. ПОНЯТИЕ О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА

До сих пор при рассмотрении задачи об экстремальном значении функционала $J = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx$ мы ограничивались нахождением лишь необходимых условий экстремума.

Одним из типов достаточных условий экстремума являются *усиленные условия Лежандра*: если на экстремали $y = y(x)$ выполняется неравенство $F_{y'y'} > 0$ ($F_{y'y'} < 0$), то в совокупности с некоторыми другими условиями это условие обеспечивает слабый минимум (слабый максимум) данного функционала. Если же $F_{y'y'} \geqslant 0$ ($F_{y'y'} \leqslant 0$) при произвольных значениях y', то данная экстремаль реализует сильный минимум (сильный максимум).

1315. Исследовать на экстремум функционал

$$J(y(x)) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx; \quad y(0) = 0,\ y(x_1) = y_1.$$

△ В задаче 1287 было показано, что экстремалями являются циклоиды $x = C_1(t - \sin t) + C_2$, $y = C_1(1 - \cos t)$. Пучок циклоид $x = C_1(t - \sin t)$, $y = C_1(1 - \cos t)$ с центром в начале координат образует центральное поле, включающее экстремаль $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где параметр a определяется из условия прохождения циклоиды через вторую граничную точку $B(x_1;\ y_1)$. Если $x_1 < 2\pi a$, то

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'}}, \quad F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{3/2}} > 0.$$

при любых y'. Следовательно, при $x_1 < 2\pi a$ на циклоиде реализуется сильный минимум. ▲

Используя достаточные условия экстремума, исследовать на экстремум следующие функционалы:

1316. $J(y) = \int\limits_0^2 y'^3\,dx; \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 3.$

1317. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (4y^2 - y'^2 + 8y)\,dx; \quad y(0) = -1,\ y(\pi/4) = 0.$

1318. $J(y) = \int\limits_1^2 (x^2y'^2 + 12y^2)\,dx; \quad y(1) = 1,\ y(2) = 8.$

ОТВЕТЫ

Глава I

6. $(e-1)(e^{\pi}-1)$. **7.** 5. **8.** 244/21. **10.** $\pi a^2/2$. **11.** $112\frac{8}{105}$. **12.** $5(2\ln 2-1)/8$. **13.** $(\pi+1-2\sqrt{2})/4$. **14.** —432/169. **15.** 1. **16.** 26. **17.** $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y)\,dx$. **18.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\,dx$. **19.** $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\,dy$. **20.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} f(x, y)\,dx$. **21.** $\int\limits_{0}^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$. **22.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\,dx$. **23.** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{4x/3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\,dy$. **24.** $\int\limits_{0}^{3/4} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy$. **25.** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y^2+2} f(x, y)\,dx$. **30.** $2\pi^3$. **31.** $0{,}5\pi\ln 2$. **32.** $3\pi a^4/2$. **33.** 3π. **34.** $14\pi a^3/3$. **35.** 1/2. **36.** 0,5 ln 3. **41.** 1/6 кв. ед. **42.** 64/3 кв. ед. **43.** $2\pi - 16/3$ кв. ед. **44.** 5 кв. ед. **45.** 125/18 кв. ед. **46.** 1/2 кв. ед. **47.** 27/2 кв. ед. **48.** 4/3 кв. ед. **49.** $8-\pi$ кв. ед. **50.** 5π кв. ед. **51.** $2\pi - 8/3$ кв. ед. **55.** $8\pi - 32\sqrt{2}/3$ куб. ед. **56.** 17/5 куб. ед. **57.** $\pi/4$ куб. ед. **58.** 88/105 куб. ед. **59.** 40/3 куб. ед. **60.** 32/9 куб. ед. **61.** 90 куб. ед. **62.** 12 куб. ед. **63.** 79/60 куб. ед. **64.** 4 куб. ед. **65.** $a^2b/3$. **70.** $\pi(5\sqrt{5}-1)/24$ кв. ед. **71.** $16\pi/3$ кв. ед. **72.** $2\pi\sqrt{2}$ кв. ед. **73.** $5/6+(\sqrt{2}/4)\ln(3+2\sqrt{2})$ кв. ед. **74.** π кв. ед. **75.** 32 кв. ед. **76.** $20\sqrt{2}/3$ кв. ед. **81.** $C\,(45/28;\ 279/70)$. **82.** $\bar{x}=(5/6)\,a$, $\bar{y}=0$. **83.** $\bar{x}=(3/5)\,a$, $\bar{y}=(3/8)\,a$. **84.** $\bar{x}=\bar{y}= 128a/(105\pi)$. **85.** $\bar{x}=\bar{y}=9/20$. **86.** $\bar{x}=(6/5)\,p$, $\bar{y}=0$. **87.** $\bar{x}=1$, $\bar{y}=4/(3\pi)$. **88.** 2,4. **89.** 8/3. **90.** 4096/105. **91.** $\pi ab^3/4$. **92.** $(2/3)\,a^4k$, где k — коэффициент пропорциональности. **93.** $2\pi r^2\delta$. **94.** $ab^3/12$. **101.** $abc\,(a^2+b^2+c^2)/3$. **102.** 1/48. **103.** 1/364. **104.** $ab^2(10b-3a)/12$. **105.** 4π. **106.** 4. **107.** $3\pi/2$. **108.** $(1/5)\,\pi a^5 \times (18\sqrt{3}-97/6)$. **109.** $16\pi/3$. **110.** $4\pi r^3/3$. **111.** $8\pi(2\sqrt{2}-1)/9$. **114.** $\pi/6$ куб. ед. **115.** $8(3\pi-4)/9$ куб. ед. **116.** $3a^4/2$. **117.** $\bar{x}=\bar{y}=2/5$, $\bar{z}=7/30$. **118.** $\bar{x}=\bar{y}=3$, $\bar{z}=45/32$. **119.** (6/5; 12/5; 8/5). **120.** $2a^5/3$. **128.** $(\pi/2)\ln(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})$. **129.** $(\pi/2)\ln(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})$. **130.** $(\pi/2)\ln(1+\lambda)$. **131.** $\pi\alpha$. **132.** $\ln(\beta/\alpha)$. **133.** $(\pi/2)\ln(1+\lambda)$. **134.** $\ln(\lambda+1)/(\mu+1)$. **135.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. **136.** $\pi(\sqrt{1-\lambda^2}-1)$. **145.** 1,1645. **146.** —4,5781. **147.** 2,4240. **148.** $15\sqrt{\pi}/8$. **149.** 0,1225. **150.** 0,8934. **151.** ∞. **152.** $-2\pi\sqrt{3}/7$. **153.** $\pi\sqrt{3}/5$. **154.** $-4\pi\sqrt{2}$. **155.** $4\pi\sqrt{2}/5$. **162.** 1/24. **163.** $3\pi/16$. **164.** 8/105. **165.** $9\pi/4096$. **166.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{a}\right)}$. **167.** $\dfrac{(2n-1)!!\,\pi}{2\,(2n+2)!!}\,a^{2n+2}$. **168.** $\dfrac{5\pi}{256}$.

169. $\dfrac{\pi}{b\sin(a\pi/b)}$. **170.** $\pi/\sin a\pi$. **171.** $2\pi/\sqrt{3}$. **172.** $5\pi/32$. **173.** π. **174.** $1/364$.

175. $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\cdot\Gamma(m)}{k\cdot\Gamma\left(\frac{n}{k}+m\right)}$. **176.** $\pi/\sqrt{2}$. **177.** $\dfrac{\pi}{n\sin(\pi/n)}$. **178.** $\pi/(2\sqrt{2})$. **179.** $\pi/(2\sin n\pi)$.

180. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$.

Глава II

186. $67/6$. **187.** $136/3$. **188.** $2152/45$. **189.** 4. **190.** 12. **191.** 17,5. **192.** π. **193.** $6/35$. **194.** 2. **195.** $\bar{x}=(3\ln 2-1)/3$, $\bar{y}=(16\ln 2+15)/24$. **196.** $\bar{x}=2/5$, $\bar{y}=-1/5$, $\bar{z}=1/2$. **197.** $2a^2$. **198.** $\left(\sqrt{a^2+b^2}/ab\right)\operatorname{arctg}(2\pi b/a)$. **199.** $\sqrt{2}\left[\pi\sqrt{1+4\pi^2}+0{,}5\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right]$. **200.** $1/6$. **206.** $U=e^{x+y}+\sin(x-y)+2y+C$. **207.** $U=x-e^{x-y}+\sin x+\sin y+C$. **208.** $U=(1/3)\,x^3-x^2y^2+3x+(1/3)\,y^3+3y+C$. **209.** $U=x^2+y^2-(3/2)\,x^2y^2+2xy+C$. **210.** $U=\operatorname{ch}x+x\operatorname{ch}y+y+C$. **211.** $U=x\arcsin x-y\arcsin y+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}-(1/2)\,x^2\ln y+C$. **212.** $x^2\sin y+y\sin x+x^2+\cos y-y^3=C$. **213.** $ye^{x^2}+x\ln y+e^y=C$. **214.** π^2 (во всех случаях). **215.** 0 (в обоих случаях). **218.** $\iint\limits_D\dfrac{2y(x-1)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$. **219.** 8. **222.** $1/3$ кв. ед. **223.** πab. **224.** $45/2$ кв. ед. **225.** $25/6$ кв. ед. **226.** $6\pi r^2$. **232.** $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=\left(307-15\sqrt{5}\right)/310$. **233.** $4\pi\left(1+6\sqrt{3}\right)/15$. **234.** $\left(125\sqrt{5}-1\right)/420$. **251.** 0. **252.** $12\pi a^5/5$. **253.** 0. **254.** $4\pi abc$. **255.** $6\pi a^2h$. **256.** $0{,}1\pi R^2h\,(3R^2+2h^2)$. **257.** $1/2$. **258.** 6π. **259.** πR^2h. **260.** 1. **261.** 2π. **262.** πab. **263.** $3u$. **264.** $x+y+z$. **265.** $(z-y)\,\mathbf{i}+(x-z)\,\mathbf{j}+(y-x)\,\mathbf{k}$. **266.** $2\,(\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

Глава III

294. $\dfrac{1}{11}+\dfrac{2}{102}+\dfrac{3}{1003}+\dfrac{4}{10004}+\ldots$. **295.** $\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{1111}+\dfrac{1}{111111}+\dfrac{1}{11111111}+\ldots$. **296.** 1. **297.** 1. **298.** $1/12$. **299.** m. **301.** Расходится. **302.** Сходится. **303.** Сходится. **304.** Расходится. **305.** Сходится. **306.** Расходится. **307.** Сходится. **308.** Расходится. **309.** Сходится. **310.** Расходится. **311.** Расходится. **312.** Расходится. **313.** Сходится условно. **314.** Сходится абсолютно. **315.** Расходится. **316.** Расходится. **317.** Расходится. **318.** Сходится. **319.** Сходится условно. **320.** Сходится условно. **321.** Сходится абсолютно. **322.** Расходится. **323.** Расходится (сравнить с рядом предыдущего примера). **324.** Сходится. **325.** Расходится. **326.** Сходится. **327.** Сходится. **328.** Расходится. **329.** Сходится. **330.** Сходится абсолютно. **331.** Расходится. **332.** Сходится абсолютно. **333.** Расходится. **334.** Сходится абсолютно. **335.** Сходится условно. **336.** $1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{81}+\dfrac{1}{729}+\ldots$. **337.** $1-\dfrac{4}{1!}+\dfrac{4^2}{2!}-\dfrac{4^3}{3!}+\ldots$. **345.** В точках $x=1$ и $x=2$ расходится, в точке $x=3$ сходится. **346.** В точке $x=1$ расходится, в точке $x=2$ сходится. **347.** $0<x<+\infty$. **348.** $1<x<+\infty$. **349.** $-\infty<x<+\infty$. **353.** Сходится равномерно. **354.** Да. **355.** Да. **356.** Нет, ряд расходится при любом значении x. **368.** $-\infty<x<+\infty$. **369.** $3\leqslant x<5$. **370.** $1<x<3$. **371.** Ряд сходится только в точке $x=0$. **372.** Ряд сходится при любом значении x. **373.** $-1<x<1$. **374.** $-2\leqslant x<2$. **375.** $-3<x<3$. **376.** $-1<x<3$.

377. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **378.** $a/(a-x)^2$. **379.** $a \ln a/(a-x)-x$. **380.** $2a/(a-x)^3$. **381.** $-2x/(1+x^2)^2$. **390.** $1+x\ln 3+\frac{x^2 \ln^2 2}{2!}+\frac{x^3 \ln^3 3}{3!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$.

391. $1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^3}{3!}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$. **392.** $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-$ $-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$. **393.** $\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6+\frac{2^7}{8!}x^8+\ldots$ $(-\infty<x<+\infty)$. **394.** $\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\ldots\ (-a<x\leqslant a)$.

395. $\sqrt{a}\left[1+\frac{x}{2a}-\frac{x^2}{(2a)^2\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3\cdot x^3}{(2a)^3\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^4}{(2a)^4\cdot 4!}+\ldots\right] (-a<x\leqslant a)$. **396.** $1+$ $+\frac{2}{2!}\cdot x^4+\frac{2^3}{4!}\cdot x^8+\frac{2^5}{6!}\cdot x^{12}+\frac{2^7}{8!}\cdot x^{16}+\ldots\ (-\infty<x<+\infty)$. **397.** $f(x, y)=$ $=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+(x-2)^3-2(y-1)^3$. **398.** $f(x, y)=-4+13(x-1)+5(y+1)+11(x-1)^2+2(x-1)(y+1)-(y+1)^2+$ $+4(x-1)^3$. **399.** $f(x, y)=4+8(x-1)-15(y+1)+5(x-1)^2+9(y+1)^2$. **400.** $f(x, y)=-1+(x+1)+(y-1)-(x+1)(y-1)-(y-1)^2+(1/3)(x+1)(y-1)^2+$ $+(y-1)^3+\ldots$. **401.** $f(x, y)=1+(x-1)-y-$ $-(x-1)y+(1/2)y^2+\ldots$. **402.** $f(x, y)=-1+(x+1)+$ $+y^2-(x+1)y^2+\ldots$. **415.** 2,71828. **416.** 0,60653. **417.** 0,1564. **418.** 1,0453. **419.** 1,0196. **420.** 5,196. **421.** —0,0202. **422.** 0,0953. **423.** 1,0986. **424.** 2,3026. **425.** 0,4636. **426.** 3,142. **432.** 1/3. **433.** 1. **434.** 0,1996. **435.** 0,102. **436.** 0,015. **445.** 2, —2, $2\sqrt{2}$, $-\pi/4$. **446.** $z=13(\cos 157°23'+$ $+i\sin 157°23')$. **447.** i. **448.** 1. **449.** $2\cos 10°(\cos 10°+i\sin 10°)$. **450.** $-46+9i$. **451.** $(249/1025)-(68/1025)i$. **452.** $(5/169)+(12/169)i$. **453.** $5{,}831[\cos(-30°58')+$ $+i\sin(-30°58')]$. **454.** $\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)$. **455.** $(\sqrt{2}/2)+(\sqrt{2}/2)i$. **456.** $\cos(-150°)+i\sin(-150°)=-(\sqrt{3}/2)-(1/2)i$. **457.** $\cos 22°30'+i\sin 22°30'=$ $=0{,}9239+0{,}3827i$; $\cos 112°30'+i\sin 112°30'=-0{,}3827+0{,}9239i$; $\cos 202°30'+$ $+i\sin 202°30'=-0{,}9239-0{,}3827i$; $\cos 292°30'+i\sin 292°30'=0{,}3827-0{,}9239i$. **458.** $w_0=2(\cos 15°+i\sin 15°)=1{,}9318+0{,}5176i$; $w_1=2(\cos 135°+i\sin 135°)=$ $=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $w_2=2(\cos 255°+i\sin 255°)=-0{,}5176-1{,}9318i$. **459.** $\cos 4\varphi=$ $=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi$, $\sin 4\varphi=4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi$. **461.** Окружность радиуса R с центром в точке $z=c$. **462.** 1) Множество точек круга, ограниченного окружностью $|z-c|=R$; 2) множество точек плоскости, расположенных вне окружности $|z-c|=R$. **463.** 1) Множество точек полуплоскости, расположенной справа от мнимой оси; 2) множество точек полуплоскости, расположенной под действительной осью. **469.** $S=(1/4)-i$. **470.** Сходится. **471.** Расходится. **473.** Ряд сходится на всей плоскости. **474.** Ряд сходится только в точке $z=1+i$. **479.** $2e^{\pi i/6}$. **480.** $e^{-\pi i/2}$. **481.** —1. **483.** $(3/4)\sin x-(1/4)\sin 3x$. **484.** $i^i=e^{-\pi/2+2k\pi}$ $(k\in\mathbf{Z})$. **489.** $f(x)=$ $=-2\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mx}{m}$. **490.** $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. **491.** $f(x)=$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi\cdot\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m^2+1}(\cos mx-m\sin mx)\right].$$

492. $f(x)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\times$ $\times\left(\frac{12}{m^3}-\frac{2\pi^2}{m}\right)\sin mx$. **493.** 1) $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$; 2) $f(x)=$ $=2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2mx}{m}$. **494.** $f(x)=\frac{4h}{\pi}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}$. **495.** $f(x)=\frac{5\pi}{4}-\frac{10}{\pi}\times$

$\times\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)+\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)$. **496.** $f(x)=$ $=2\pi\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right)-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3}+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\ldots\right)$. **497.** $\frac{\pi}{4}-$ $-\frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\cdot\frac{\sin mx}{m}$. **498.** $-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{2^2-1}+\frac{3\sin 3x}{2^2-3^2}+\right.$ $\left.+\frac{5\sin 5x}{2^2-5^2}+\ldots\right]$. **499.** $\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin m\pi x}{m}$. **500.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\times$ $\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2}$. **504.** $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{4}{1-4z^2}\cos\pi z$. **505.** $F(z)=$ $=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{ze-\sin z-z\cos z}{e(1+z^2)}$. **506.** $f_c(z)=\frac{\sin z-\sin(z/2)}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $f_s(z)=$ $=\frac{\cos(z/2)-\cos z}{z}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Глава IV

515. $y=\arccos e^{Cx}$. **516.** $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$. **517.** $(1+e^x)^3\operatorname{tg} y=8$. **518.** $2\ln|\sin y|=e^{(x-1)^2}-1$. **519.** $y^3/3+\pi/4=\operatorname{arctg} e^x$. **520.** $\ln|\operatorname{tg} y|=$ $=4(1-\cos x)$. **521.** $2^x-2^y=3/32$. **522.** $y=e^{\pm 1/\left(2\sqrt[4]{x+1}\right)}$. **523.** $2(x-2)=\ln^2 y$. **524.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$. **525.** $(1-\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-y^2})=Cxy$. **526.** $2\sin x+$ $+\ln|\operatorname{tg}(y/2)|=C$. **527.** $x^2+y\sin y+\cos y=C$. **528.** $y=\ln\operatorname{tg}(e^x+\pi/4-1)$. **529.** $y=\ln\operatorname{tg}(\operatorname{ch} x+C)$. **530.** $y=a\sin(\arcsin(x/a)+C)$; ответ можно записать также в виде $y\sqrt{a^2-x^2}-x\sqrt{a^2-y^2}=C_1$. **531.** $x+y+2\ln x-\ln y=2$. **532.** $3\operatorname{arctg} x^2+2\operatorname{arctg} y^3=\pi/2$. **533.** $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln\left|(\sqrt{x}+1)\times\right.$ $\left.\times(\sqrt{y}-1)\right|=C$. **534.** $\sqrt{2}\sin x+\sin y-\cos y=0$. **535.** $\operatorname{tg}(y/2)=C[\operatorname{tg}(y/2)+1]\times$ $\times[1-\operatorname{tg}(x/2)]$. **536.** $(3/2)\ln(y^2+4)+\operatorname{arctg}(y/2)=\sqrt{x^2+4x+13}-\ln(x+2+$ $+\sqrt{x^2+4x+13})+C$. **537.** $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=1$. **538.** $y=\operatorname{arctg} C(1-e^x)^5$. **539.** $y=C/x$. **540.** $A_t=A_0e^{-kt}$. **541.** 1) $\approx 56{,}5$ г; 2) $\approx 7{,}84$ ч. **542.** $\approx 18{,}4$ мин. **543.** $t=$ $=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha(H^{5/2}-h^{5/2})/(5\sigma\omega\sqrt{2g})$; $T=2\pi\operatorname{tg}^2\alpha H^{5/2}/(5\sigma\omega\sqrt{2g})\approx 844$ с $\approx 14{,}1$ мин. **544.** $\approx 4{,}6$ мин. **550.** $Cx=e^{\cos(y/x)}$. **551.** $y^2=Cxe^{-y/x}$. **552.** $\ln x=(y/x)\times$ $\times[\ln(y/x)-1]+C$. **553.** $y^2=4x^2\ln Cx$. **554.** $y=x\arcsin x$. **555.** $1+\sin(y/x)=$ $=Cx\cos(y/x)$. **556.** $\operatorname{arctg}(0{,}5y/x)-2\ln|x|=\pi/4$. **557.** $y^2=x^2\ln Cx^2$. **558.** $\operatorname{arctg}(y/x)=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **559.** $y=-x\ln|1-\ln x|$. **560.** $(y/x)\cdot\operatorname{arctg}(y/x)=$ $=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$. **561.** $x^5+10x^3y^2+5xy^4=1$. **562.** $16xy=(y+4x-Cx^2)^2$. **563.** $\ln|y|-\cos(3x/y)=C$. **564.** $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$. **565.** $y-1=C(x-1)$. **568.** $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$. **569.** $x^2+xy-y^2-x+3y=C$. **570.** x^2+ $+2xy-y^2-4x+8y=C$. **571.** $x^2-y^2+2xy-4x+8y-6=0$. **575.** $(1/2)x^2+$ $+x\sin y-\cos y=C$. **576.** $xy+e^x\sin y=C$. **577.** $(1/2)x^2y+x\sin y=C$. **578.** $(1/3)x^3+xy^2+xy+e^y=1$. **579.** $ye^{x^2}+x\ln y=1$. **580.** $(1+x)\sin y+$ $+(1-y)\sin x=C$. **581.** $x^2\ln y+2y(x+1)=C$. **582.** $x^3+3y+3x\sin y=C$. **583.** $ye^x+(1/2)y^2=C$. **584.** $x^2+y^2+2e^x\sin y=C$. **585.** $x\ln y+y^2\cos 5x=e^2$. **586.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+x^2y+y\operatorname{arctg} y-(1/2)\ln(1+y^2)+y=C$. **587.** x^3y- $-\cos x-\sin y=C$. **588.** $e^{x+y}+x^3+y^4=1$. **589.** $x\operatorname{tg} y+y\operatorname{ctg} x=C$. **590.** $\operatorname{arctg}(x/y)-xy+e^y=C$. **591.** $y=Cx-\ln x-1$; $\mu=1/x^2$. **592.** $y=$ $=x(C-\sin x)$; $\mu=1/x^2$. **593.** $x=y(C+y)$; $\mu=1/y^2$. **594.** $xy-\sqrt{1-y^2}=C$; $\mu=1/\sqrt{1-y^2}$. **603.** $y=x(\sin x+C)$. **604.** $y=e^{-x^2}(x^2/2+C)$. **605.** $\cos x(x+C)/(1+\sin x)$. **606.** $y=a(x-1)/x^n$. **607.** $y=\operatorname{arctg} x-1+$

$+Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. **608.** $y=e^{-\arcsin x}+\arcsin x-1$. **609.** $y=\operatorname{tg}(x/2)[(1/2)x+(1/4)\sin 2x+C]$. **610.** $y=(1/2)x^2\ln x$. **611.** $y=-\cos x$. **612.** $x=Cy+y^2$. **613.** $y=\cos 3x[1-(2/3)\cos 3x]$. **614.** $x=Cy^2-1/y$. **615.** $x=Cy^2+y^4/2$. **616.** $y^{-1/3}=Cx^{2/3}-(3/7)x^3$. **617.** $y=(x-1)/(C-x)$. **618.** $y^{-1/2}-\operatorname{tg} x=(\ln\cos x+C)/x$. **619.** $y^{-4}=x^3(e^x+C)$. **620.** $y=e^{-x}[(1/2)e^x+1]^2$. **621.** $y=\sec x/(x^3+1)$. **622.** $x=1/[y(y+C)]$. **623.** $y=\sec^2 x/(\operatorname{tg} x-x+C)$. **624.** $x^2+y^2=e^{-y}$. **628.** $x=p\sin p$, $y=(p^2-1)\sin p+p\cos p+C$. **629.** $x=e^p+C$, $y=e^p(p-1)$, или $y=(x-C)[\ln(x-C)-1]$. **630.** $x=2(\ln p-p)$, $y=2p-p^2+C$. **631.** $x=\ln\left[\left(\sqrt{1+p^2}-1\right)/p\right]+p/\sqrt{1+p^2}+C$, $y=p/\sqrt{1+p^2}$. **632.** $x=2p+3p^2$, $y=2p^3+p^2+C$. **633.** $x=p(1+e^p)$, $y=0{,}5p^2+(p^2-p+1)e^p+C$. **634.** $x=e^{2p}(2p^2-2p+1)$, $y=e^{2p}(2p^3-3p^2+3p-1{,}5)+C$. **635.** $x=0{,}5\ln^2 p+\ln p+C$, $y=p\ln p$. **638.** Общее решение $y=Cx+\sqrt{b^2+a^2C^2}$; особое решение $\begin{cases} x=-a^2p/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \\ y=b^2/\sqrt{b^2+a^2p^2}, \end{cases}$ или $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **639.** Общее решение $y=Cx-1/C$; особое решение $\begin{cases} x=-1/p^2, \\ y=-2/p, \end{cases}$ или $y^2=-4x$. **640.** Общее решение $y=Cx+C(1-C)$; особое решение $\begin{cases} x=2p-1, \\ y=p^2, \end{cases}$ или $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$. **641.** Общее решение $y=Cx+C^2+1$; особое решение $\begin{cases} x=-2p, \\ y=1-p^2, \end{cases}$ или $y=1-\dfrac{x^2}{4}$. **642.** Общее решение $\begin{cases} x=C(p+1), \\ y=Cp^2/2, \end{cases}$ или $y=\dfrac{(x-C)^2}{2C}$; особые решения $y=0$, $y=-2x$. **644.** $y=(1/48)x^4+(1/8)x^2+(1/32)\cos 2x$. **645.** $y=x\cos x-3\sin x+x^2+2x$. **646.** $y=\ln\sin x+C_1x^2+C_2x+C_3$. **647.** $y=(1/3)\sin^3 x+C_1x+C_2$. **648.** $y=-(x+3)e^{-x}+(3/2)x^2+3$. **651.** $y=(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8)/24$. **652.** $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2$. **653.** $y=\pm 4\left[(C_1x+a^2)^{5/2}+C_2x+C_3\right]/\left(15C_1^2\right)$. **654.** $y=\left(1+C_1^{-2}\right)\ln(1+C_1x)-C_1^{-1}x+C_2$. **655.** $y=(x^3-3x^2+6x+4)/6$. **659.** $0{,}5\ln(2y+3)=C_1x+C_2$. **660.** $y=e^{2x}$. **661.** $\pm(x+C_2)=a\ln\left[\left(y+C_1+\sqrt{(y+C_1)^2-a^2}\right)/a\right]$, или $y+C_1=\pm a\operatorname{ch}(x+C_2)/a$. **662.** $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. **663.** $y=e^{(x+C_2)/(x+C_1)}$. **664.** $\ln[C_1(y+1)-1]=C_1(x+C_2)$. **665.** $x=\sqrt{y}-0{,}5C_1\ln\left(2\sqrt{y}+C_1\right)+C_2$. **668.** $y=C_2e^{C_1x}$. **669.** $y\sqrt{y^2+C_1^2}+C_1^2\ln\left(y+\sqrt{y^2+C_1^2}\right)=\pm\left(-y^2+2C_1^2x+3C_2\right)$. **670.** $y=C_2x+C_3\pm 4(C_1x+a^2)^{5/2}/(15C_1^2)$. **671.** $y=-\ln|1-x|$. **672.** $y'=\pm\sqrt{k(y^2-1)/(2y)}$. **673.** $y=-a\ln\cos(x/a)$. **674.** $y=1+\ln\sec x$. **675.** $s=\dfrac{m^2g}{k^2}\left(e^{-kt/m}-1\right)+\dfrac{mgt}{k}$. **678.** $y=C_2+(C_1-C_2x)\operatorname{ctg} x$. **679.** $y=(1/2)x\ln^2 x+C_1x\ln x+C_2x$. **680.** $y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x$. **683.** Да. **684.** Да. **685.** Нет. **686.** Да. **687.** Да. **688.** Нет. **696.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$. **697.** $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$. **698.** $y=C_1+C_2e^x$. **699.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **700.** $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x$. **701.** $y=\left(C_1e^{xa\sqrt{2}/2}+C_2e^{-xa\sqrt{2}/2}\right)\cos\left(xa\sqrt{2}/2\right)+\left(C_3e^{xa\sqrt{2}/2}+C_4e^{-xa\sqrt{2}/2}\right)\sin\left(xa\sqrt{2}/2\right)$. **702.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$. **703.** $y=4e^{-3x}-3e^{-2x}$. **704.** $y=xe^{5x}$. **705.** $y=-(1/3)e^x\cos 3x$. **706.** $y=2\sin(x/3)$. **707.** $y=(5-2e^{-3x})/3$. **708.** $y=\sqrt{2}\sin 3x$. **709.** $y=\sin x+\left(1/\sqrt{3}\right)\cos x$. **710.** $x=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t$, или $x=A\sin(\varphi_0+\beta t)$, $\beta=\sqrt{a/m}$. **721.** $y=(e^{5x}+22e^{3x}+e^x)/8$. **722.** $y=0{,}5x(x+2)e^{4x}$. **723.** $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+(14\cos x+5\sin x)/102$. **724.** $y=-(11/8)\cos x+4\sin x-(1/8)\cos 3x$. **725.** $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+(24x^2+52x+41)/64$. **726.** $y=4e^{x/2}-x-4$. **727.** $y=(1/8)\sin 2x-(1/4)(x\cos 2x-1)$. **728.** $y=C_1+C_2e^{4x}-(1/6)\cdot(2\operatorname{ch} 2x+\operatorname{sh} 2x)$. **729.** $y=(1/16)(4x-\pi)\sin 2x$. **730.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-5x}+(1/144)(1-12x)e^{-2x}$. **731.** $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}+x(ae^{\alpha x}-be^{\beta x})/(\alpha-\beta)$. **732.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x})-(1/2)x-(1/10)x\cos 2x+(2/25)\sin 2x$. **733.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}-(x^3/3+x^2+2x)e^{4x}$. **734.** $y=x\operatorname{ch} x$. **735.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+(1/4)x\operatorname{sh} 2x$. **736.** $y=$

$= e^{x\cos\varphi}[C_1\cos(x\sin\varphi)+C_2\sin(x\sin\varphi)]+\cos x$. **737.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)-$ $-0{,}5xe^x\cos x$. **738.** $y=(1/8)\cos x-(1/8)\cos 3x-(1/6)x\sin 3x+(\pi/12)\sin 3x$. **739.** $y=e^{2x}(5\cos 2x-\sin 2x+6\sin x-5\cos x)$. **742.** $m\ddot{x}+ax=$ $=A\sin\omega t$, $x=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t+[A/(a-m\omega^2)]\cdot\sin\omega t$, если $\omega\neq\beta=$ $=\sqrt{a/m}$, и $x=C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t-[At/(2\beta m)]\cdot\cos\beta t$, если $\omega=\beta=\sqrt{a/m}$. **743.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\left(1/\sqrt{2}\right)\cos x\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2 x-1/2}\right|+$ $+\left(1/\sqrt{2}\right)\sin x\arcsin\left(\sqrt{2}\sin x\right)$. **744.** $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+$ $+(1/2)e^{-2x}\ln(1+e^{2x})-e^{-2x}+e^{-3x}\operatorname{arctg}e^x$. **745.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+$ $+(1/4)\sin 2x\ln\operatorname{tg}2x$. **746.** $y=C_1\cos(x/2)+C_2\sin(x/2)+2x\sin(x/2)+$ $+4\cos(x/2)\ln\cos(x/2)$. **747.** $t=\left(3/\sqrt{g}\right)\ln\left(17+12\sqrt{2}\right)$ с. **751.** $y=$ $=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)$. **752.** $y=C_1x+C_2x^3+(1/9)\cdot(9\ln^2 x+24\ln x+26)$. **753.** $y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x-(1/3)\sin 2\ln x$. **754.** $y=(\ln^2 x+2\ln x+2)/(2x)$. **755.** $y=(1/2)x^3-[1/(\ln 2)]x^2\ln x$. **757.** $y=C_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots\right)=$ $=C_0e^{-x^2/2}$ (решение существует на всей числовой оси). **758.** $y=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^n}{4\cdot n!}=$ $=\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}+\frac{x}{2}$ (решение существует на всей числовой оси). **759.** $y=$ $=C_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}+C_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)}$ (решение существует на всей числовой оси). **760.** $y=C_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}+C_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2\cdot 4\ldots 2n}$ (решение существует на всей числовой оси). **761.** $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\ldots 4n\,(4n+1)}$ (решение существует на всей числовой оси). **764.** $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{3x^2}{2!}+\frac{17x^3}{3!}+\ldots$ **765.** $y=\frac{x^2}{2!}+\frac{12x^5}{5!}+\ldots$. **766.** $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{4x^4}{4!}+\ldots$. **767.** $y=$ $=4\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)+2(x-1)=4e^{-x}+2(x-1)$. **768.** $y=1+$ $+x+\frac{3x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{34x^4}{4!}+\ldots$. **769.** $y=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{24}x^4-\frac{1}{24}x^5-\ldots$ (последовательные производные при $x=0$ связаны рекуррентным соотношением $y_0^{(n+2)}=-y_0^{(n)}+2ny_0^{(n-1)}$). **772.** $J_1(x)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 4}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}-\ldots\right)$. **773.** $y=$ $=\frac{2}{3\sqrt{x}}\left[C_1x^{3/2}\left(1-\frac{x^2}{2\cdot 5}+\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}-\ldots\right)+C_2x^{-3/2}\left(1+\frac{x^2}{2\cdot 1}-\frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 1}+\ldots\right)\right]$. **774.** $y=C_1\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}+k+1\right)}+C_2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{2}{3}+k+1\right)}$. **778.** $x=2e^{3t}-e^t$, $y=2e^{3t}+e^t$. **779.** $x=C_1+C_2e^{7t}-(3/49)t(7t+2)$, $y=-(2/3)C_1+$ $+(1/2)C_2e^{7t}+(1/49)(14t^2-3t-1)$. **780.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+(1/8)e^{3t}$, $y=-C_1e^t+$ $+C_2e^{-t}+(5/8)e^{3t}$. **781.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\operatorname{sh}x$, $z=C_1\sin x-C_2\cos x+\operatorname{sh}x$. **782.** $x=(1/4)(3e^t+5e^{-t})+(1/2)te^t-1$, $y=(5/4)(e^t-e^{-t})+(1/2)te^t-t$. **783.** $x=$ $=(1/3)t+2$, $y=(2/3)t+4$. **784.** $x=(C_1+C_2t)e^t+(1/2)\cos t$, $y=[C_2(1-t)-C_1]\times$ $\times e^t-2\cos t-(1/2)\sin t$. **785.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$, $y=3C_1e^{2t}-C_2e^{-2t}$. **786.** $x=$ $=t/3+C_2/t^2$, $y=C_1e^t-t/3-2C_2/t^3$. **787.** $x=-[(1+C_1)t+C_2]^{-1}$, $y=$ $=-C_1[(1+C_1)t+C_2]^{-1}$. **788.** $x=C_1e^{-6t}+e^{2t}-(3/7)e^t$, $y=C_2e^{-t}-(4/5)\times$

$\times C_1 e^{-6t} + (9/14)\, e^t$. **789.** $x = e^{tm\cdot\sqrt{2}/2}\,[C_1 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_2 \sin(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2}\,[C_3 \cos(tm\sqrt{2}/2) + C_4 \sin(tm\sqrt{2}/2)]$, $y = e^{tm\sqrt{2}/2} \times [C_1 \sin(tm\sqrt{2}/2) - C_2 \cos(tm\sqrt{2}/2)] + e^{-tm\sqrt{2}/2}\,[C_4 \cos(tm\sqrt{2}/2) - C_3 \sin(tm\sqrt{2}/2)]$. **790.** $x^2 = C_1^2\,(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $y^2 = C_2^2\,(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$, $z^2 = C_3^2\,(2t + C_1)/(1 + C_2^2 + C_3^2)$. **796.** $x_1 = C_1 e^{at} + C_2 e^{-at}$, $x_2 = C_2 e^{-at} - C_1 e^{at}$. **797.** $x_1 = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}$, $x_2 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. **798.** $x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$, $x_2 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}$, $x_3 = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}$. **799.** $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$, $x_2 = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}$, $x_3 = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}$. **800.** $x_1 = e^{12t}\,(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$, $x_2 = e^{12t}\,(-C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t)$. **801.** $x_1 = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t$, $x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t$. **802.** $x_1 = 2C_1 e^{-t} + 2\,(4C_3 + C_2)\cos t - 2\,(4C_2 - C_3)\sin t$, $x_2 = -2C_1 e^{-t} + 3\,(5C_2 + 3C_3)\cos t + 3\,(5C_3 - 3C_2)\sin t$, $x_3 = C_1 e^{-t} + (7C_2 + 11C_3)\cos t + (7C_3 - 11C_2)\sin t$. **803.** $x = e^{at}\,(C_1 t + C_2)$, $y = e^{at}\,(C_1 t + C_2 - C_1)$. **804.** $x = -2e^t\,(C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t)$, $y = e^t\,(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$. **805.** $x = e^t\,(C_1 t + C_2)$, $y = e^t\,(C_1 - 2C_2 - 2C_1 t)$.

Глава V

811. $P(A) = 0$ (событие невозможно). **812.** 1/4. **813.** 1) 1; 2) 1/5; 3) 3/5. **814.** 499/1998. **815.** 1/406. **819.** $(r/R)^2$. **820.** $(3\sqrt{3})/(4\pi) \approx 0{,}41$. **821.** 0,5. **830.** 1) $a/(a+b+c)$; 2) $b/(a+b+c)$; 3) $c/(a+b+c)$; 4) $(a+b)/(a+b+c)$; 5) $(a+c)/(a+b+c)$; 6) $(b+c)/(a+b+c)$. **831.** $bd\,(a+b)^{-1}\,(c+d)^{-1}$. **832.** $p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$. **833.** $1 - 3\alpha$. **834.** 1/3. **835.** $\approx 0{,}88$. **836.** 1) 22/145; 2) 51/145; 3) 72/145. **837.** 0,7. **838.** 0,375. **843.** 7/64. **844.** 21/32. **845.** 4/9. **846.** 27/128. **850.** 15. **852.** Нет, задача всегда имеет решение, так как $(m_0 + q)/p - (m_0 - p)/p = (p + q)/p = 1/p > 1$. **853.** Первый — 114 изделий, второй — 112 изделий. **854.** 60. **859.** 1/3. **866.**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

867.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

868. 1) $a = 1/\pi$; 2) $P\,(a/2 < X < a) = 1/3$. **869.** $P\,(\pi < X < \infty) = 1/4$. **870.** $a = 5$; $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 0{,}5\,(1 - \cos x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$

871. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 5/6 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$ **874.**

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

$M(X) = 3{,}00$; $D(X) = 1{,}20$. **875.** $\lambda = 1/4$; $M(X) = 16/15$; $\sigma_x = \sqrt{44/225} = 0{,}44$. **878.** $\overline{M} = 20$. **879.** $a = 0{,}75$; $\overline{M} = \mu = 3$. **882.** $P\,(3 < X < 5) = (5 - 3)\cdot(1/6) = 1/3$. **883.** 2/5. **886.** 0,000055. **887.** $M(X) = m/n = p$; $D(X) = pq/n$. **898.** $M(X) = 0{,}4$, $D(X) = 0{,}16$, $\sigma(X) = 0{,}4$. **899.** $P\,(0{,}15 < X < 0{,}6) = 0{,}3349$. **900.** $M(X) = 4$. **901.** $P\,(0{,}3 < T < \infty) = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231$. **902.** а) $F(24) = 0{,}3812$; б) $R(24) = 0{,}6188$. **903.** $R(1000) = e^{-2} \approx 0{,}1359$. **906.** 4,4%; полученный результат не зависит от числового значения m. **907.** 0,34; 0,14; 0,02. **909.** 0,424. **910.** 0,9876. **911.** 0,7328. **915.** 0,018. **916.** 0,156. **919.** $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = 20$; $\alpha_3 = 116{,}8$; $\alpha_4 = 752$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 4$; $\mu_3 = 4{,}8$; $\mu_4 = 35{,}2$; $S_k = 0{,}6$; $E_x = -0{,}8$. **920.** $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 7/6$; $\alpha_3 = 3/2$; $\alpha_4 = 31/15$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1/6$; $\mu_3 = 0$; $\mu_4 = 1/15$; $S_k = 0$; $E_x = -0{,}6$. **921.** $\lambda = 1/2$; $E_x = 3$. **926.** $P\left(\left|\dfrac{m}{10\,000} - \dfrac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geqslant \dfrac{31}{36}$. **927.** $P\left(\left|\dfrac{m}{50} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{5}\right) \geqslant \dfrac{7}{8}$. **928.** 3/4. **931.** 0,954. **932.** 61. **940.** 1) $\lambda = 1/20$; 2) $m_x = 22$, $m_y = 41$; 3) $\sigma_x^2 = 56$, $\sigma_y^2 = 259$; 4) $r_{xy} = 0{,}56$. **941.** 1) $a = 24$; 2) $m_x = m_y = 2/5$; 3) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1/25$;

4) $r_{xy}=-2/3$. **942.** 1) $a=\sqrt[4]{2/\pi}$; 2) $m_x=m_y=0$; 3) $\sigma_x^2=\sigma_y^2=1/(3\sqrt{2\pi})$; 4) $r_{xy}=0$. **945.** $r_{xy}=0{,}664$; $\overline{y}_x=3{,}64x-0{,}15$; $\overline{x}_y=0{,}12y+1{,}24$. **946.** $r_{xy}=0{,}321$; $\overline{y}_x=1{,}21x-2{,}45$; $\overline{x}_y=0{,}085y+10{,}58$. **953.** $\overline{x}=10{,}005$; $D(X)=0{,}010475$; $\sigma(X)=0{,}1023$. **954.** $\overline{y}=10{,}64$; $D(Y)=34{,}97$. **958.** $\alpha_1=6{,}32$; $\alpha_2=44{,}64$; $\alpha_3=340{,}16$; $\alpha_4=2743{,}68$; $\mu_1=0$; $\mu_2=4{,}6976$; $\mu_3=-1{,}3425$; $\mu_4=56{,}422$; $S_k(X)=-0{,}132$; $E(X)=-0{,}442$. **960.** $M(X)=4{,}13$; $D(X)=9{,}07$; $f(x)=$
$=\begin{cases} 0 & \text{при } x<-1{,}09, \\ 0{,}096 & \text{при } -1{,}09\leqslant x\leqslant 9{,}35, \\ 0 & \text{при } x>9{,}35. \end{cases}$ **962.** $M(X)=5{,}06$; $D(X)=5{,}01$. **964.** $M(X)=$
$=8{,}02$, $D(X)=8{,}23$, $\sigma(X)\approx 2{,}87$, $f(x)=1/(2{,}87\sqrt{2\pi})\,e^{-(x-8{,}02)^2/(2\cdot 2{,}87^2)}$.

Глава VI

976. $z=xy+\varphi(x)+\psi(y)$. **977.** $z=x\varphi_1(x)+\varphi_2(y)+y\varphi_3(x)+\varphi_4(x)$. **981.** $\operatorname{tg}(z/2)=\operatorname{tg}(x/2)\cdot\psi\left(\dfrac{\operatorname{tg} y/2}{\operatorname{tg} x/2}\right)$. **982.** $z^2=x^2+\psi(y^2-x^2)$. **983.** Параболоид вращения $z=x^2+y^2$. **987.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0$, $\xi=y/x$, $\eta=y$. **988.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}-\dfrac{\partial z}{\partial\xi}=0$, $\xi=x+y$, $\eta=3x+y$. **989.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\xi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\xi}+\dfrac{1}{\eta}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\eta}\right)=0$, $\xi=y^2$, $\eta=x^2$. **993.** $u=x(1-t)$. **994.** $u=(\cos x\sin at)/a$. **995.** $u=-\sin x$. **999.** $u(x,\ t)=$
$=-(0{,}9/\pi^2)\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1/k^2)\cdot\sin(2\pi k/3)\cdot\sin(k\pi x/3)\cdot\cos(k\pi at/3)$. **1000.** $u=(96h/\pi^5)\times$
$\times\sum\limits_{k=0}^{\infty}1/[(2k+1)^5]\cos(2k+1)\,\pi at\cdot\sin(2k+1)\,\pi x$. **1001.** $u(x,\ t)=$
$=\dfrac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{\sin(\pi k/2)\cos(k\pi h/l)}{l^2-k^2h^2}\sin(k\pi x/l)\cdot\sin(k\pi at/l)$. **1005.** $u(x,\ t)=$
$=\dfrac{1}{2}\left[\left(1+\dfrac{x}{l}\right)\Phi\left(\dfrac{x+l}{2\sqrt{t}}\right)-2\cdot\dfrac{x}{l}\cdot\Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\Phi\left(\dfrac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$
$+\dfrac{1}{l}\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\left[e^{-(x+l)^2/(4t)}-2e^{-x^2/(4t)}+e^{-(x-l)^2/(4t)}\right]$. **1006.** $u(x,\ t)=\dfrac{u_0}{2}\times$
$\times\left[\Phi\left(\dfrac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\dfrac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$. **1007.** $u(x,\ t)=\dfrac{8c}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\times$
$\times e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/l^2}\cdot\sin\dfrac{(2n+1)\,\pi x}{l}$. **1009.** $u=u_a+(u_b-u_a)\cdot[\ln(r/a):\ln(b/a)]$. **1011.** $u(r,\ \Theta)=(8/3)\operatorname{sh}(\ln r)\cdot\sin\Theta$.

Глава VII

1018. 1) $w=i$; 2) $w=-e^{\pi}$; 3) $w=ei$. **1019.** $(1+i)/2$, i, $(3-2i)/13$. **1021.** $(1/2)\ln 2+(2k\pi-\pi/4)\,i$, $k\in\mathbf{Z}$. **1023.** $z=\pm i\ln(2+\sqrt{3})$. **1024.** $i\ln(1\pm\sqrt{2})$. **1025.** $1{,}1752i$. **1026.** $0{,}772+1{,}018i$. **1027.** 1) $e^{\cos 1}\times$ $\times[\cos(\sin 1)+i\sin(\sin 1)]$; 2) $\cos e+i\sin e$. **1033.** Нет. **1034.** $f'(z)=3z^2$. **1035.** $f'(z)=\cos z$. **1036.** $\varphi(y)=ay+C_1$, $\psi(x)=-ax+C_2$, $f(z)=Az+C$, $A=-ai$, $C=C_1+C_2$. **1037.** $\lambda=-1$, $f(z)=-iz$. **1038.** $a=0$. **1039.** $f(z)=2^z+C$. **1040.** $f(z)=-\cos z+C$. **1047.** $u=4-v^2/16$, $u=v^2/4-1$. **1048.** $v=(u^2-1)/2$. **1049.** $u=1$, $v=0$. **1050.** $u=x\cos\varphi-y\sin\varphi$; $v=x\sin\varphi+y\cos\varphi$ — преобразование координат при повороте осей. **1051.** $u=(v/2)^{2/3}-(v/2)^{4/3}$. **1053.** $\alpha=-\pi/2$, $k=6$. **1054.** $\alpha=0$, $k=1/4$. **1055.** $\alpha=0$, $k=e$. **1056.** $|z|=1/2$. **1057.** $|z-1|=1/2$. **1058.** $\operatorname{Re} z=0$. **1059.** $\arg z=-\pi/2$. **1067.** $1+i$. **1068.** $-(1+i)/3$. **1069.** 0. **1070.** 0. **1071.** $2\pi i$. **1072.** $2\pi i(a+b)$. **1081.** Область сходимости $1<|z|<2$.

1082. Ряд расходится во всех точках плоскости. **1083.** 1) $f(z)=-z^2-z^3-z^4-\ldots$; 2) $f(z)=z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots$. **1084.** $\frac{1}{3!z^2}+\frac{1}{5!}+\frac{z^2}{7!}+\frac{z^4}{9!}+\ldots$. **1085.** ± 1 — полюсы первого порядка; $\pm i$ — полюсы второго порядка. **1086.** $f(z)=1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\ldots$; область сходимости $|z-1|<1$. **1087.** $f(z)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\ldots$; ряд сходится на всей плоскости. **1088.** $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}(z^n+z^{-n})$. **1098.** $2i$. **1099.** 1; -1. **1100.** -1. **1101.** 1. **1102.** $2\pi a^2$. **1103.** $2\pi i$. **1104.** 0. **1105.** $2\pi/(3-i)$. **1106.** $3\pi/8$.

Глава VIII

1112. $\overline{f}(p)=\frac{2}{p(p^2+4)}$. **1113.** $\overline{f}(p)=\frac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$. **1114.** $\overline{f}(p)=\frac{p}{p^2-b^2}$. **1115.** $\overline{f}(p)=\frac{a(p^2-a^2-b^2)}{p[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$. **1116.** $\overline{f}(p)=\frac{b(p^2+a^2-b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$. **1117.** $\overline{f}(p)=\frac{p(p^2-a^2+b^2)}{[(p-a)^2+b^2][(p+a)^2+b^2]}$. **1118.** $\overline{f}(p)=\frac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$. **1124.** $f(t)=1/4-(1/3)\cos t+(1/12)\cos 2t$. **1125.** $f(t)=-(1/3)e^t+(1/4)e^{2t}+(1/12)e^{-2t}$. **1126.** $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$. **1127.** $f(t)=1/4-(1/3)\operatorname{ch} t+(1/12)\operatorname{ch} 2t$. **1128.** $f(t)=\frac{t^k}{k!}-\frac{a^k\cdot t^{2k}}{(2k)!}+\frac{a^{2k}\cdot t^{3k}}{(3k)!}-\ldots$. **1132.** $1-\cos t \leftarrow\!\!\!\div \frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$. **1133.** $f(t)=\int\limits_0^t\cos(t-\tau)\cos\tau\,d\tau=\frac{1}{2}(\sin t+t\cos t)$. **1134.** $(1-2p)\cdot\overline{y}(p)$. **1135.** $(p^3-p^2+2p-2)\cdot\overline{y}(p)-p-1$. **1136.** $\frac{\overline{y}(p)}{p}\cdot(p^2-1)$. **1143.** $y=e^{2t}$. **1144.** $y=\operatorname{sh} t$. **1145.** $y=0$. **1146.** $y=(1/3)te^t-(7/9)e^t-(2/9)e^{-2t}$. **1147.** $y=-(5/2)e^t+4e^{2t}-(3/2)e^{3t}$. **1148.** $x=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$, $y=(5/2)e^{2t}-(1/2)e^{-2t}$. **1149.** $x=(6/5)e^{5t}-(1/5)e^{-5t}$, $y=(3/5)e^{5t}+(2/5)e^{-5t}$. **1150.** $y(t)=1$. **1151.** $y(t)=t$. **1154.** $2e^t-4t-3$. **1155.** $-1/6+(1/2)e^t-(1/2)e^{2t}+(1/6)e^{3t}$. **1156.** $(1/8)(2t^2-6t+3)e^t-(1/24)e^{-t}+(2/3)\sin\left(t\sqrt{3}/2+\pi/6\right)$. **1161.** $u(x,t)=A\cos(n\pi at/l)\cos(n\pi x/l)$. **1162.** $u(x,t)=B\sin(n\pi at/l)\sin(n\pi x/l)$. **1163.** $u(x,t)=A\operatorname{Erf}\left(\alpha x/(2\sqrt{t}\right)$.

Глава IX

1169.]0, 1[,]2, 3[,]6, 7[. **1170.**]—4, —3[,]0, 1[,]3, 4[. **1171.** 1,94. **1172.** 2,09. **1173.** 0,33; 1,30. **1174.** —1,15. **1175.** 1,11. **1176.** 0,42. **1177.** 3,62. **1178.** —0,56. **1179.** 1,27. **1185.** $\xi=1{,}70997$. **1186.** $\xi=1{,}23429$. **1189.** 2,214. **1190.** 1,37973. **1191.** —1,4142. **1194.** $y=-(2x^3-15x^2+25x-9)/3$. **1195.** $y=0{,}2(x^3-13x^2+69x-92)$. **1196.** $y=2x-1$.

1199.

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
$\lg x$	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

1200. 39,0625.

1201. $f(x)=x^3+x^2+x+1$. **1206.** 0,5000. **1207.** 1,16912; $\delta_S=-0{,}000004$; точное значение интеграла есть $4\left(\sqrt{2}-1\right)-2\ln\left[(2\sqrt{2}+1)/3\right]\approx 1{,}16912\ldots$.

1208. $|\delta_т| \leqslant (h^2/12)\cdot(b-a)\cdot M_1 \approx 0{,}007$ (M_1— наибольшее значение $|f''(x)|$ на интервале интегрирования). Поэтому вычисление надо вести с тремя знаками после запятой (чтобы получить два верных знака): $I\approx 1{,}35$. **1209.** 0,69. **1210.** 0,24. **1211.** 0,75. **1212.** 0,67. **1218.** 183; 552. **1224.** Точное значение $I=62{,}572$; 1) $I=62{,}673$; $\delta=0{,}12\%$; 2) $I=62{,}730$; $\delta=0{,}03\%$; 3) $I=66{,}509$; $\delta=5{,}99\%$. **1225.** Точное значение $I=0{,}747$; 1) $I=0{,}746$; $\delta=0{,}13\%$; 2) $I=0{,}800$; $\delta=7{,}1\%$.

1229.

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

1230.

x	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0,001	0,005	0,014

1231.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	4	5,8	9,44	18,78	54,86

1232.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27	1,24

1233.

t	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
x	1	1	1,07	1,17	1,30	1,45
y	1	1,4	1,8	2,21	2,63	3,06

1236.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	
y	—1	—0,975	—0,949	—0,921	—0,888	
x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	—0,842	—0,802	—0,744	—0,675	—0,593	—0,495

1237.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,75	1,89	2,03

1239. 1,78. **1240.** 0,02. **1243.** $y_1=(1/3)\,x^3$, $y_2=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7$, $y_3=(1/3)\,x^3+(1/63)\,x^7+(2/2079)\,x^{11}+(1/59535)\,x^{15}$. **1244.** $y=e^{-\operatorname{sh} x}$. **1245.** $y_n=1-x+2\times\left[\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}\right]+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \ldots)$; двусторонняя последовательность. **1246.** $y_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{\sin^m x}{m!}$; истинное решение $y(x)=e^{\sin x}$; последовательность нижних функций. **1247.** $y_n(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{\sin^m (x^2)}{m!}$; истинное решение $y(x)=e^{\sin (x^2)}$; последовательность нижних функций. **1250.** $y=0{,}279x+71{,}14$. **1251.** $S=11{,}58e^{0{,}2398t}$. **1253.** $y=111{,}7+1{,}663x+0{,}00437x^2$. **1254.** $S=33{,}02t^{1{,}065}$. **1258.** 1) $y=3{,}023x-1{,}08$; 2) $y=0{,}992x-0{,}909$; 3) $y=-1{,}802x+2{,}958$. **1259.** 1) $y=-0{,}145x^2+3{,}324x-12{,}794$; 2) $y=1{,}009x^2-4{,}043y+5{,}045$; 3) $y=-0{,}102x^2+0{,}200x+0{,}806$. **1260.** $S=5{,}7t^{1{,}97}$. **1261.** 1) $S=92e^{-0{,}15t}$; 2) $S=0{,}49e^{0{,}44t}$. **1263.** $\varphi(x)=-0{,}2723x^2+0{,}5003x+1{,}3424$. **1264.** $\varphi(x)=0{,}670x^3-0{,}728x^2-0{,}350x+0{,}943$.

1268. $$\varphi(x)=\begin{cases} 1{,}4907x+0{,}1708, & x\in[-\pi/4,\ -\pi/8];\\ 1{,}0558x, & x\in[-\pi/8,\ 0];\\ 1{,}0558x, & x\in[0,\ \pi/8];\\ 1{,}4907x-0{,}1708, & x\in[\pi/8,\ \pi/4].\end{cases}$$

1269. $\varphi(x)=\begin{cases} 0{,}2776x+2{,}0096, & x\in[-1;\ -0{,}5];\\ 0{,}2584x+2, & x\in[-0{,}5;\ 0];\\ 0{,}2426x+2, & x\in[0;\ 0{,}5];\\ 0{,}2296x+2{,}0065, & x\in[0{,}5;\ 1]. \end{cases}$

1270. $\varphi(x)=\begin{cases} -0{,}4155x+0{,}7131, & x\in[-1;\ -0{,}5];\\ -0{,}2552x+1, & x\in[-0{,}5;\ 0];\\ 0{,}2552x+1, & x\in[0;\ 0{,}5];\\ 0{,}8310x+0{,}7121, & x\in[0{,}5;\ 1]. \end{cases}$

1271. $\varphi(x)=\begin{cases} 0{,}1373\,(x+1)^3+0{,}3799x+0{,}8799, & x\in[-1;\ -0{,}5];\\ 0{,}1160\,(x+0{,}5)^3-0{,}1373x^3+0{,}5911x+0{,}9810, & x\in[-0{,}5;\ 0];\\ 0{,}0145\,(1-2x)^3+0{,}1901x^3+0{,}7399x+0{,}9855, & x\in[0;\ 0{,}5];\\ 0{,}1901\,(1-x)^3+1{,}2191x+0{,}7809, & x\in[0{,}5;\ 1]. \end{cases}$

1272. $\varphi(x)=\begin{cases} -1{,}1571\,(x+1)^3+0{,}8501(x+1), & x\in[-1;\ -0{,}5];\\ 0{,}0711x^3-0{,}1290x^2+0{,}4932x+0{,}6926, & x\in[-0{,}5;\ 0];\\ 0{,}0393x^3-0{,}1290x^2+0{,}5012x+0{,}6930, & x\in[0;\ 0{,}5];\\ -0{,}0467\,(1-x)^3+1{,}8443\,(1-x)+2{,}1972\,(x-0{,}5), & x\in[0{,}5;\ 1]. \end{cases}$

Глава X

1275. $e-1$. **1276.** 2. **1279.** $\Delta I=3\alpha+e\alpha^2/(e-1)$, $\delta I=3\alpha$. **1280.** $\Delta I=4\alpha^2/3$, $\delta I\equiv 0$. **1290.** Нет решения. **1291.** Нет решения. **1292.** $y=x$. **1293.** $y=(1/4)\,x^2-x+1$. **1294.** $y=\sqrt{8+6x-x^2}$. **1295.** $y=0$. **1296.** $y=\sqrt{2}\,e^{x/2}\sin(x/2)$. **1297.** $y=x^3$. **1298.** $y=x/4$. **1299.** Окружность $x^2+(y-2)^2=1$. **1301.** $y(x)\equiv 0$. **1302.** $y=(1-x)\operatorname{sh}x$. **1303.** $y=\cos x$. **1305.** $y=1/x$, $z=2/x^3-1$. **1306.** $y=4/(3x^3)-1/3$, $z=1/x$. **1307.** $y=-(x^3+5x-6)/6$, $z=x$. **1308.** $y=\sin x$, $z=\sin x$. **1310.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **1311.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varphi(x,\ y)$. **1313.** $y=2x$. **1314.** $y=2\sin x$. **1316.** $y=(3/2)\,x$ реализует слабый минимум. **1317.** $y=\sin 2x-1$ реализует сильный максимум. **1318.** $y=x^3$ реализует сильный минимум.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения гамма-функции $\Gamma(p)$ (при $1 \leqslant p \leqslant 2$)

p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$	p	$\Gamma(p)$
1,00	1,0000	1,25	0,9064	1,50	0,8862	1,75	0,9191
1,01	0,9943	1,26	9044	1,51	8866	1,76	9214
1,02	9888	1,27	9025	1,52	8870	1,77	9238
1,03	9835	1,28	9007	1,53	8876	1,78	9262
1,04	9784	1,29	8990	1,54	8882	1,79	9288
1,05	9735	1,30	8975	1,55	8889	1,80	9314
1,06	9687	1,31	8960	1,56	8896	1,81	9341
1,07	9642	1,32	8946	1,57	8905	1,82	9368
1,08	9597	1,33	8934	1,58	8914	1,83	9397
1,09	9555	1,34	8922	1,59	8924	1,84	9426
1,10	9514	1,35	8912	1,60	8935	1,85	9456
1,11	9474	1,36	8902	1,61	8947	1,86	9487
1,12	9436	1,37	8893	1,62	8959	1,87	9518
1,13	9399	1,38	8885	1,63	8972	1,88	9551
1,14	9364	1,39	8879	1,64	8986	1,89	9584
1,15	9330	1,40	8873	1,65	9001	1,90	9618
1,16	9298	1,41	8868	1,66	9017	1,91	9652
1,17	9267	1,42	8864	1,67	9033	1,92	9688
1,18	9237	1,43	8860	1,68	9050	1,93	9724
1,19	9209	1,44	8858	1,69	9068	1,94	9761
1,20	9182	1,45	8857	1,70	9086	1,95	9799
1,21	9156	1,46	8856	1,71	9106	1,96	9837
1,22	9131	1,47	8856	1,72	9126	1,97	9877
1,23	9108	1,48	8857	1,73	9147	1,98	9917
1,24	9085	1,49	8859	1,74	9168	1,99	9958
						2,00	1,0000

Таблица II

Значения функции e^{-x}

x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}	x	e^{-x}
0,00	1,0000	0,31	0,7334	0,61	0,5433	0,91	0,4025	1,21	0,2982
01	0,9900	32	7261	62	5379	92	3985	22	2952
02	9802	33	7189	63	5326	93	3946	23	2923
03	9704	34	7118	64	5273	94	3906	24	2894
04	9608	35	7047	65	5221	95	3867	25	2865
05	9512								
0,06	0,9418	0,36	0,6977	0,66	0,5166	0,96	0,3829	1,26	0,2836
07	9324	37	6907	67	5117	97	3791	27	2808
08	9231	38	6839	68	5066	98	3753	28	2780
09	9139	39	6777	69	5016	99	3716	29	2753
10	9048	40	6703	70	4966	1,00	3679	30	2725
0,11	0,8958	0,41	0,6636	0,71	0,4916	1,01	0,3642	1,31	0,2692
12	8860	42	6571	72	4868	02	3606	32	2671
13	8781	43	6505	73	4819	03	3570	33	2645
14	8694	44	6440	74	4771	04	3534	34	2618
15	8607	45	6376	75	4724	05	3499	35	2592
0,16	0,8521	0,46	0,6313	0,76	0,4677	1,06	0,3465	1,36	0,2567
17	8437	47	6250	77	4630	07	3430	37	2541
18	8353	48	6188	78	4584	08	3396	38	2516
19	8270	49	6126	79	4538	09	3362	39	2491
20	8187	50	6065	80	4493	10	3329	40	2466
0,21	0,8106	0,51	0,6005	0,81	0,4449	1,11	0,3296	1,41	0,2441
22	8025	52	5945	82	4404	12	3263	42	2417
23	7945	53	5886	83	4361	13	3230	43	2393
24	7866	54	5827	84	4317	14	3198	44	2369
25	7781	55	5769	85	4274	15	3166	45	2346
0,26	0,7711	0,56	0,5712	0,86	0,4232	1,16	0,3135	1,46	0,2322
27	7634	57	5655	87	4189	17	3104	47	2299
28	7558	58	5599	88	4148	18	3073	48	2276
29	7483	59	5543	89	4107	19	3042	49	2254
30	7408	60	5486	90	4066	20	3012	1,50	0,2231

Таблица III

Значения функций

$$\Phi(x) = \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\Phi(x)$	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,0000	0,60	0,6039	0,2257	1,20	0,9103	0,3849	1,80	0,9891	0,4641
02	0226	0080	62	6194	2324	22	9155	3888	82	9899	4656
04	0451	0160	64	6346	2389	24	9205	3925	84	9907	4671
06	0676	0239	66	6494	2454	26	9252	3962	86	9915	4686
08	0901	0319	68	6638	2517	28	9297	3997	88	9922	4699
0,10	1125	0398	0,70	6778	2580	1,30	9340	4032	1,90	9928	4713
12	1348	0478	72	6914	2642	32	9381	4066	92	9934	4726
14	1569	0557	74	7047	2703	34	9419	4099	94	9939	4738
16	1790	0636	76	7175	2764	36	9456	4131	96	9944	4750
18	2009	0714	78	7300	2823	38	9490	4162	98	9949	4761
0,20	2227	0793	0,80	7421	2881	1,40	9523	4192	2,00	9953	4772
22	2443	0871	82	7538	2939	42	9554	4222	05	9963	4798
24	2657	0948	84	7651	2995	44	9583	4251	10	9970	4821
26	2869	1026	86	7761	3051	46	9610	4279	15	9976	4842
28	3079	1103	88	7867	3106	48	9636	4306	20	9981	4860
0,30	3286	1179	0,90	7969	3159	1,50	9661	4332	2,25	9985	4877
32	3491	1255	92	8068	3212	52	9684	4357	30	9988	4892
34	3694	1331	94	8163	3264	54	9706	4382	35	9991	4906
36	3893	1406	96	8254	3315	56	9726	4406	40	9993	4918
38	4090	1480	98	8342	3365	58	9745	4429	45	9995	4928
0,40	4284	1554	1,00	8427	3413	1,60	9763	4452	2,50	9996	4938
42	4475	1628	02	8508	3461	62	9780	4474	60	9998	4953
44	4662	1700	04	8586	3508	64	9796	4495	70	9999	4965
46	4847	1772	06	8661	3554	66	9811	4515	80	9999	4974
48	5027	1844	08	8733	3599	68	9825	4535	2,90	0,9999	4981
0,50	5205	1915	1,10	8802	3643	1,70	9838	4554	3,00	1,0000	4986
52	5379	1985	12	8868	3686	72	9850	4573	20	1,0000	4993
54	5549	2054	14	8931	3729	74	9861	4591	40	1,0000	4996
56	5716	2123	16	8991	3770	76	9872	4608	60	1,0000	4998
0,58	0,5879	0,2190	1,18	0,9048	0,3810	1,78	0,9882	0,4625	3,80	1,0000	0,4999

Значения функции $z_u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034

Таблица V

Значения вероятностей для критерия χ^2

χ^2 \ r	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3173	0,6065	0,8013	0,9098	0,9626	0,9856	0,9948	0,9982
2	1574	3679	5724	7358	8491	9197	9598	9810
3	0833	2231	3916	5578	7000	8088	8850	9344
4	0455	1353	2615	4060	5494	6767	7798	8571
5	0254	0821	1718	2873	4159	5438	6600	7576
6	0143	0498	1116	1991	3062	4232	5398	6472
7	0081	0302	0719	1359	2206	3208	4289	5366
8	0047	0183	0460	0916	1562	2381	3326	4335
9	0027	0111	0293	0611	1091	1736	2527	3423
10	0016	0067	0186	0404	0752	1247	1886	2650
11	0009	0041	0117	0266	0514	0884	1386	2017
12	0005	0025	0074	0174	0348	0620	1006	1512
13	0003	0015	0046	0113	0234	0430	0721	1119
14	0002	0009	0029	0073	0156	0296	0512	0818
15	0001	0006	0018	0047	0104	0203	0360	0591
16	0001	0003	0011	0030	0068	0138	0251	0424
17	0000	0002	0007	0019	0045	0093	0174	0301
18		0001	0004	0012	0029	0062	0120	0212
19		0001	0003	0008	0019	0042	0082	0149
20		0000	0002	0005	0013	0028	0056	0103
21			0001	0003	0008	0018	0038	0071
22			0001	0002	0005	0012	0025	0049
23			0000	0001	0003	0008	0017	0034
24				0001	0002	0005	0011	0023
25				0001	0001	0003	0008	0016
26				0000	0001	0002	0005	0010
27					0001	0001	0003	0007
28					0000	0001	0002	0005
29						0001	0001	0003
30						0000	0001	0002

χ^2 \ r	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,9994	0,9998	0,9899	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	9915	9963	9985	9994	9998	9999	1,0000	1,0000
3	9643	9814	9907	9955	9979	9991	0,9896	0,9998
4	9114	9473	9699	9834	9912	9955	9977	9989
5	8343	8913	9312	9580	9752	9858	9921	9958
6	7399	8153	8734	9161	9462	9665	9797	9881
7	6371	7254	7991	8576	9022	9347	9576	9733
8	5341	6288	7133	7851	8436	8893	9238	9489
9	4373	5321	6219	7029	7729	8311	8775	9134
10	3505	4405	5304	6160	6939	7622	8197	8666
11	2757	3575	4433	5289	6108	6860	7526	8095
12	2133	2851	3626	4457	5276	6063	6790	7440
13	1626	2237	2933	3690	4478	5265	6023	6728
14	1223	1730	2330	3007	3738	4497	5255	5987
15	0909	1321	1825	2414	3074	3782	4514	5246
16	0669	0996	1411	1912	2491	3134	3821	4530
17	0487	0744	1079	1496	1993	2562	3189	3856
18	0352	0550	0816	1157	1575	2068	2627	3239
19	0252	0403	0611	0885	1231	1649	2137	2687
20	0179	0293	0453	0671	0952	1301	1719	2202
21	0126	0211	0334	0504	0729	1016	1368	1785
22	0089	0151	0244	0375	0554	0786	1078	1432
23	0062	0107	0177	0277	0417	0603	0841	1137
24	0043	0076	0127	0203	0311	0458	0651	0895
25	0030	0053	0091	0148	0231	0346	0499	0698
26	0020	0037	0065	0107	0170	0259	0380	0540
27	0014	0026	0046	0077	0154	0193	0287	0415
28	0010	0018	0032	0055	0090	0142	0216	0316
29	0006	0012	0023	0039	0065	0104	0161	0239
30	0004	0009	0016	0028	0047	0076	0119	0180

Таблица VI

Значения функции $P(\lambda)=1-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^{j}e^{-2j^2\lambda^2}$

λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,00	1,0000	0,45	0,9874	0,90	0,3927	1,70	0,0062
0,05	1,0000	0,50	9639	0,95	3275	1,80	0032
0,10	1,0000	0,55	9228	1,00	2700	1,90	0015
0,15	1,0000	0,60	8643	1,10	1777	2,00	0007
0,20	1,0000	0,65	7920	1,20	1122	2,10	0003
0,25	1,0000	0,70	7112	1,30	0681	2,20	0001
0,30	1,0000	0,75	6272	1,40	0397	2,30	0,0001
0,35	0,9997	0,80	5441	1,50	0222	2,40	0,0000
0,40	0,9972	0,85	4653	1,60	0120	2,50	0,0000

Таблица VII

Значения случайных чисел

8574	9005	1894	3523	3393	5407	9659	5868
4575	4518	7032	7293	9108	0469	7435	2574
4999	3186	1426	1027	7891	7805	8928	6291
7627	7982	4865	2229	9085	7294	7239	7866
4315	1114	2339	1882	2638	5480	6189	3150
6987	9333	4247	2059	1313	1017	9391	7082
0387	1998	2910	5626	3897	0858	0575	4977
5581	1837	4781	8516	4380	8396	2414	0248
6531	4216	6454	6476	1618	7813	4959	0228
5735	3384	5146	5685	4858	2712	7675	7509
6092	1047	8196	0206	5354	7141	7078	0361
1791	1900	0649	0517	0905	2418	2220	9142
9746	1508	8704	6493	1420	5230	7110	1995
0118	4493	2560	1798	3218	3517	9851	3834
0986	3203	3476	8965	9697	0319	6272	5697
8057	1656	1515	4534	0912	7526	0460	9908
5161	6171	9125	5460	4636	5172	9737	3621
2961	3698	1913	9197	2515	2023	3619	7302
1494	0692	2594	6917	5964	3632	0602	6722
8153	2484	0961	1558	7848	0761	3853	8582
0703	9602	0190	1810	5192	7016	8483	7998
6928	6521	8548	2737	8438	8805	6029	9199
6961	3678	1935	8762	8166	2064	8760	6554
2030	1683	7322	6906	6158	4213	2720	0777
3503	2614	2532	4940	6061	0806	1913	3769

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: 1980, 1984, 1987.

2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: 1980, 1984.

3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: 1980, 1984.

4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: 1981, 1985.

5. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Задачник. — М.: 1982, 1987.

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — М.: 1988, 1989, т. I — III.

7. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. — М.: 1978, 1987.

8. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. — М.: 1970, 1985, т. 1, 2.

9. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — М.: 1986, 1987, ч. I—IV.

10. *Шипачев В. С.* Сборник задач по высшей математике. — М.: 1993, 1994.

П. Е. ДАНКО, А. Г. ПОПОВ, Т. Я. КОЖЕВНИКОВА

Высшая математика

в упражнениях и задачах

Часть 2

с решениями