Глава I. РЯДЫ

Числовые ряды

§ Основные понятия

Определение числового ряда	Пусть дана последовательность вещественных или комплексных чисел. **Числовым рядом** называется сумма всех членов числовой последовательности: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называют **членами ряда**. Функциональную зависимость члена ряда a_n от его номера n называют **общим членом ряда**: $a_n = f(n)$.

Определение n-й частичной суммы числового ряда и остатка ряда	Сумма n первых членов ряда называется его n**-й частичной суммой** и обозначается $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. **Остатком ряда** r_n называется разность суммы ряда S и его n –й частичной суммы: $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$, т.е. $S = S_n + r_n$.

Определение сходящегося ряда и расходящегося ряда	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, равный S, т.е. если $\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lvert S\rvert < \infty .$ Ряд называется **расходящимся,** если $\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \text{не существует}, \\ \infty. \end{cases}$

Теорема о сходимости ряда с комплексными членами	Пусть члены ряда a_n − комплексные числа: $a_n = \alpha_n + \beta_n i$ Для того чтобы ряд с комплексными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, составленные из действительной и мнимой частей ряда с комплексными членами.

§ Критерий Коши. Необходимый признак сходимости ряда

Критерий Коши	Для того, чтобы числовой ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы любой его отрезок можно было сделать сколь угодно малым по абсолютной величине: $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N=N(\varepsilon)): \forall n>N,\ \forall p\ge 1 \Rightarrow \left\|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}\right\|<\varepsilon$.

Необходимый признак сходимости ряда	**Если** ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**, то предел общего члена ряда a_n равен нулю: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ сходится \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие из необходимого признака сходимости (достаточный признак расходимости)	Если предел общего члена ряда **не равен нулю**, то ряд **расходится**: $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ расходится$.

§ Некоторые свойства сходящихся рядов

Свойство 1 (об остатке)	Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков, т.е. отбрасывание **конечного** числа членов ряда не влияет на его сходимость.

Свойство 2 (линейности)	Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к числам S и σ соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n$ также сходится, и его сумма равна $\alpha S+\beta\sigma$ (α и $\beta -$ произвольные константы).

Свойство 3 (коммутативности)	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и его сумма равна *S*, то члены этого ряда можно, **не переставляя**, объединять в одно слагаемое произвольным образом, причём сумма полученного ряда также будет равна *S*.

§ Абсолютная и условная сходимость

Определение абсолютной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$.

Определение условной сходимости	Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**, если ряд из модулей членов ряда расходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится), а исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема об абсолютной сходимости	Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. из абсолютной сходимости следует сходимость исходного ряда.

Теорема о коммутативности абсолютно сходящегося ряда	Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно ($\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ сходится), и его сумма равна S, то **при любой перестановке** его членов вновь полученный ряд сходится к той же сумме S.

Критерий абсолютной сходимости ряда с комплексными членами	Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ **сходился абсолютно**, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились абсолютно.

Критерий условной сходимости ряда с комплексными членами	Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ **сходился условно**, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились, причём хотя бы один из них условно.

Теорема Римана	Если ряд с вещественными членами сходится условно, то для любого вещественного числа L, конечного или нет, можно так переставить члены этого ряда, чтобы полученный ряд имел сумму, равную L.

§ Критерий абсолютной сходимости рядов

Для рядов с **положительными вещественными членами** понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Критерий абсолютной сходимости рядов	Для того чтобы ряд с положительными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена в совокупности, т.е. $\exists M : \forall n \Rightarrow S_n \le M$.

§ Достаточные признаки абсолютной сходимости рядов

Интегральный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Пусть неотрицательная на луче $[k,\infty)$ функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \to \infty$, и при целых $n = 1, 2, ...$ имеет место равенство $f(n) = \lvert a_n \rvert$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ сходится (абсолютно), если сходится интеграл $\int\limits_k^{\infty} f(x)dx$ и ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится, если расходится $\int\limits_k^{\infty} f(x)dx$.

Первая теорема сравнения рядов с положительными членами	Если для всех $n > n_0 \ge 1$ выполняется неравенство $\lvert a_n \rvert \le \lvert b_n \rvert$, то из (абсолютной) сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert b_n \rvert$ следует (абсолютная) сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ следует расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert b_n \rvert$.

Замечание 1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ либо расходится, либо сходится условно. Нужны дополнительные исследования.

Если же ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ содержат лишь **положительные вещественные члены**, то из расходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Вторая теорема сравнения рядов с положительными членами	Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert a_n\rvert}{\lvert b_n\rvert}=q$. Если $q\in[0,\infty)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ сходится (абсолютно), то сходится (абсолютно) и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$. Если $q>0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$.

Замечание 2. Если $q=\infty$, то тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert b_n\rvert}{\lvert a_n\rvert}=0$, то из сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$.

Замечание 3. Если $q\neq 0$ и $q\neq\infty$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert b_n\rvert$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся.

Для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ требуются дополнительные исследования. Каждый из них, независимо от другого, может либо сходиться условно, либо расходиться.

Если же члены этих рядов вещественны и положительны, то при $q\neq 0$**,** $q\neq\infty$ **ряды** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **и** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ **или оба сходятся, или оба расходятся.**

Признак Даламбера абсолютной сходимости рядов	Если существует предел отношения модулей последующего члена ряда к предыдущему, т.е.: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}=q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ сходится (абсолютно) при $q<1$ и расходится при $q>1$. (При $q=1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).

Радикальный признак Коши абсолютной сходимости рядов	Если существует предел корня n-й из модуля общего члена ряда, т.е.: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert}=q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ сходится (абсолютно) при $q<1$ и расходится при $q>1$. (При $q=1$ никакого вывода о сходимости ряда сделать нельзя, требуются дополнительные исследования).

Рекомендации по применению достаточных признаков сходимости рядов.

1. **Признак Даламбера** применяют, если общий член ряда содержит **показательные** функции a^n или **факториалы** $n!$. Если же общий член ряда содержит только степенные функции n^k, где k − любое конечное вещественное число, признак Даламбера, как правило, ответа не даёт.
2. **Интегральный** признак Коши применяют, если легко найти **первообразную** общего члена ряда.
3. **Радикальный** признак Коши применяют, если легко извлекается **корень** n-й степени из общего члена ряда. При этом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1$, где k − любое конечное вещественное число. Также полезной бывает **формула Стирлинга**:
$$n!\sim\frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}\ \text{при}\ n\to\infty.$$
4. **Признаки сравнения** применяют, когда легко подобрать для сравнения **эталонные ряды,** используя при этом сравнение бесконечно малых функций.

$\alpha(x)\to 0$ при x $\to a$			
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6а	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
4	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7а	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x)$

Следует иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $n\to\infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(n)=a^n$; степенная функция $f(n)=n^k$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(n)=\log_a n$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:
$$\log_a n<<n^k<<a^n,\quad \text{при}\ n\to\infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

1. **Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.**
2. **Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).**
3. **Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).**
4. **Если б. м. ф. $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ при $x \to a$, A=const $\neq 0$, то $A + \alpha(x) \sim A + \alpha_1(x)$ при $x \to a$.**

§ Признаки Лейбница и Дирихле

Определение знакочередующегося ряда	Ряд с вещественными членами называется **знакочередующимся**, если два любых его соседних члена имеют противоположные знаки: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ ($\forall a_n \in R$, т.е. вещественны и $\forall a_n > 0$).

Признак Лейбница	Если члены знакочередующегося ряда 1) убывают по абсолютной величине, т.е. $a_{n+1} < a_n$ и 2) стремятся к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ сходится, его остаток не превышает первого члена остатка, а по знаку совпадает со знаком первого члена остатка.

Признак Дирихле	Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ ограничена, а числовая последовательность $\{\lvert b_n \rvert\}$ монотонная и бесконечно малая, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lvert a_n b_n \rvert$ сходится.

Рекомендации по применению достаточных признаков сходимости рядов.

5. **Признак Даламбера** применяют, если общий член ряда содержит **показательные** функции a^n или **факториалы** $n!$. Если же общий член ряда содержит только степенные функции n^k, где k − любое конечное вещественное число, признак Даламбера, как правило, ответа не даёт.
6. **Интегральный** признак Коши применяют, если легко найти **первообразную** общего члена ряда.
7. **Радикальный** признак Коши применяют, если легко извлекается **корень** n-й степени из общего члена ряда. При этом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k} = 1$, где k − любое конечное вещественное число. Также полезной бывает **формула Стирлинга**:
$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n} \text{ при } n\to\infty.$$
8. **Признаки сравнения** применяют, когда легко подобрать для сравнения **эталонные ряды,** используя при этом сравнение бесконечно малых функций.

$\alpha(x)\to 0$ при x $\to a$			
1	$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6	$\log_a(1+\alpha(x))\sim\dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
2	$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	6а	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
3	$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
4	$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	7а	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
5	$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	8	$(1+\alpha(x))^{\mu}-1\sim\mu\alpha(x)$

Следует иметь в виду, что при вычислении пределов отношений конечного числа б. б. складываемых функций слагаемые более низкого порядка роста можно отбрасывать, а сумму заменять слагаемым **самого высокого порядка роста**.

При $n\to\infty$ **самый высокий** порядок **роста** имеет **показательная** функция $f(n)=a^n$; степенная функция $f(n)=n^k$ имеет порядок роста, более низкий по сравнению с показательной функцией, но более высокий по сравнению с логарифмической; логарифмическая функция $f(n)=\log_a n$ имеет самый низкий порядок роста по сравнению и с показательной функцией, и со степенной. Это обозначают так:
$$\log_a n << n^k << a^n, \quad \text{при } n\to\infty.$$

Очень эффективным при вычислении пределов оказывается применение следующих **правил**:

5. **Предел отношения б. м. ф. (б. б. ф.) не изменится, если заменить эти функции эквивалентными.**
6. **Разность эквивалентных б. м. ф. (б. б. ф.) есть б. м. ф. (б. б. ф.) более высокого порядка малости (роста) по сравнению с уменьшаемой и вычитаемой б. м. ф. (б. б. ф.).**
7. **Сумма конечного числа б. м. (б. б.) слагаемых разного порядка малости (роста) эквивалентна слагаемому самого низкого (высокого) порядка малости (роста).**
8. **Если б. м. ф. $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ при $x\to a$, A=const $\neq 0$, то $A+\alpha(x)\sim A+\alpha_1(x)$ при $x\to a$.**

Функциональные ряды

§ Функциональный ряд, его сумма и область сходимости

Определение функционального ряда	Пусть в области Δ вещественных или комплексных чисел дана последовательность функций $\{f_k(z)\},\quad k=1,2,\dots$. **Функциональным рядом** называется сумма всех членов функциональной последовательности: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$.

Определение области поточечной сходимости функционального ряда	Множество $D \subset \Delta$ всех точек, в которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется **областью поточечной сходимости** этого ряда.

Определение суммы функционального ряда	Функция $S(z)$ такая, что для любой точки $z_0 \in D$ число $S(z_0)$ является суммой числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$, называется **суммой функционального ряда**. То есть $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)$.

§ Равномерная и поточечная сходимость

Определение равномерной и поточечной сходимости функционального ряда	Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D к функции $S(z)$, и $H \subseteq D$ − некоторое множество. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется **равномерно сходящимся на множестве** $H \subseteq D$, если $(\forall \varepsilon > 0)\quad (\exists N(\varepsilon) > 0)\,(\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow \lvert S(z) - S_n(z)\rvert < \varepsilon)$, или: $(\forall \varepsilon > 0)\quad (\exists N(\varepsilon) > 0)\,(\forall n > N, \forall z \in H \Rightarrow \lvert r_n(z)\rvert < \varepsilon)$. Если такой номер N зависит не только от $\varepsilon > 0$, но и от $z \in D$, т.е. $(\forall \varepsilon > 0)\quad (\exists N(\varepsilon, z) > 0)\,(\forall n > N \Rightarrow \lvert r_n(z)\rvert < \varepsilon)$, то ряд называется **сходящимся поточечно (неравномерно)** в D.

Признак Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости)	Если при любом $z \in D$ выполняется неравенство $\lvert f_n(z)\rvert \le c_n,\quad n = 1,2,\dots$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в области D **равномерно.**

§ Свойства равномерно сходящихся рядов

Свойство 1 (о непрерывности суммы ряда**)**	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны в области D, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в этой области, то его сумма $S(z)$ **непрерывна** в D.

Свойство 2 (о почленном интегрировании ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ непрерывны на некоторой дуге L, и ряд сходится равномерно на этой дуге к функции $S(z)$, то ряд можно почленно интегрировать вдоль этой дуги, т.е. $\int_L S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L f_n(z)dz$

Определение аналитической функции	Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке**, если она дифференцируема в точке и некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется **аналитической в области**, если она аналитическая в каждой точке этой области.

Свойство 3 (об аналитичности суммы ряда)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими в области D функциями и ряд в этой области сходится равномерно, то его сумма $S(z)$ в области D является функцией аналитической.

Свойство 4 (о почленном дифференцировании ряда с комплексными членами)	Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ являются аналитическими в области D функциями и ряд в этой области сходится равномерно, то этот ряд можно дифференцировать почленно в области D любое число раз, т.е. $S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(m)}(z)$.

Свойство 4а (о почленном дифференцировании ряда с вещественными членами)	Пусть дан ряд с вещественными членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого на отрезке $[a,b]$ непрерывны вместе со своими производными. Если на $[a,b]$ данный ряд сходится к функции $S(x)$, а ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то функция $S(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и при этом $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

§ Степенные ряды

Определение степенного ряда	Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ называется **степенным рядом**, где a_n – комплексные числа, не зависящие от z, называются коэффициентами степенного ряда; z_0 – фиксированное комплексное число, называется центром сходимости степенного ряда. Если $z_0 = 0$, то степенной ряд имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. .

Теорема Абеля	Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z, удовлетворяющем неравенству: $\lvert z \rvert < \lvert z_1 \rvert$; при этом он сходится равномерно в любом круге $\lvert z \rvert \le \rho < \lvert z_1 \rvert$. Если ряд в точке $z_1 \neq 0$ расходится, то он расходится во всех точках z, для которых $\lvert z \rvert > \lvert z_1 \rvert$

Теорема (о радиусе сходимости степенного ряда)	Для всякого степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ существует неотрицательное число R такое, что при $\lvert z \rvert < R$ (если $R > 0$) ряд сходится и притом абсолютно, а при $\lvert z \rvert > R$ (если $R \neq \infty$) ряд расходится. Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а круг $\lvert z \rvert < R$ – его **кругом сходимости**.

Теорема (о свойствах степенного ряда)	**Сумма** степенного ряда является функцией **аналитической** в его круге сходимости. Степенной ряд можно **почленно дифференцировать** любое число раз, при этом радиус сходимости рядов не изменяется. Степенной ряд можно **почленно интегрировать** по любой кривой, расположенной в его круге сходимости.

§ Ряды Тейлора

Теорема (о ряде Тейлора)	Если функция $f(z)$ аналитична в круге $\lvert z-z_0\rvert<R$, то в этом круге функция $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, который называется **рядом Тейлора** для функции $f(z)$.

Теорема (единственности ряда Тейлора)	Любой сходящийся в круге $\lvert z-z_0\rvert<R$ к функции $f(z)$ степенной ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ является **рядом Тейлора** для своей суммы $f(z)$.

§ Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

Определение ряда Маклорена	Рядом Маклорена называют ряд Тейлора с центром сходимости в точке ноль: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$.

$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	
$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$shz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$
$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$chz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$
$\frac{b}{1-q(z)}=b\sum\limits_{n=0}^{\infty}(q(z))^n,\quad \lvert q(z)\rvert<1$	
$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n z^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},\quad \lvert z\rvert<1,\ z=1$	
$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n,\quad \lvert z\rvert<1$	
$arctgz=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1},\quad \lvert z\rvert<1$	

Рекомендации по разложению функции в ряд Тейлора

1. Найти формулу для производной n-го порядка в точке z_0, записать ряд Тейлора $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. Найти область сходимости полученного ряда.
2. Воспользоваться известными разложениями функций и тождественными преобразованиями данной функции привести её к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.
3. Дробные рациональные функции разложить на простые дроби. Простые дроби преобразовать тождественными преобразованиями к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Найти область сходимости полученного ряда.
4. Воспользоваться почленным дифференцированием или почленным интегрированием, чтобы привести данную функцию к известному разложению. Найти область сходимости полученного ряда.

§ Применение рядов Тейлора

Оценка остатка ряда Тейлора	Остаток $r_n(x)$ ряда Тейлора $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x)$ вещественной функции вещественной переменной $f(x)$ может быть представлен остаточным членом **в форме Лагранжа**: $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, точка c расположена между x и x_0; **Пеано:** $r_{n+1}(x)=o((x-x_0)^{n+1})$**;** **Коши:** $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}$, $0\le\theta\le 1$. **Для знакочередующегося ряда** $\lvert r_n(x)\rvert<\left\lvert\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right\rvert$**.**

Ряды Тейлора применяются
для приближённого вычисления **значений функции, определённых интегралов,**
нахождения первообразных неберущихся интегралов,
значений иррациональных чисел,
интегрирования дифференциальных уравнений,
для вычисления пределов, значений производных функции в точке
и во многих других случаях.

§ Ортогональные системы вещественных функций

Определение ортогональных функций	Две интегрируемые функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются **ортогональными** на промежутке $[a, b]$, если $\int\limits_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$.

Определение ортогональной системы вещественных функций	Система функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной на $[a, b]$, если эти функции попарно ортогональны на $[a, b]$, то есть $\int\limits_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0$, если $i \neq j$, $\int\limits_a^b \varphi_i^{\,2}(x) dx > 0$.

§ Ряд Фурье по ортогональной системе вещественных функций

Определение ряда по ортогональной системе функций	Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система вещественных функций на $[a, b]$. Рядом по ортогональной системе вещественных функций называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, где c_n – вещественные коэффициенты.

Теорема о коэффициентах ряда Фурье	Пусть ряд по ортогональной системе вещественных функций равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$. Тогда коэффициенты этого ряда c_n имеют вид $c_n = \dfrac{\int\limits_a^b f(x) \varphi_n(x) dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x) dx}$ и называются коэффициентами Фурье.

§ Тригонометрический ряд Фурье

Определение тригонометрического ряда Фурье	Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\dfrac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\dfrac{\pi n x}{\ell}$, *где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам* $a_n = \dfrac{1}{\ell} \int\limits_a^{a+2\ell} f(x) \cos\dfrac{\pi n x}{\ell} dx$, $\quad$ ($T = 2\ell$ – *период функции* $f(x)$) $b_n = \dfrac{1}{\ell} \int\limits_a^{a+2\ell} f(x) \sin\dfrac{\pi n x}{\ell} dx.$

Теорема Дирихле (достаточные условия представимости функции в виде суммы своего ряда Фурье)	Пусть функция $f(x)$ 1. периодическая, с периодом $T=2\ell$; 2. кусочно-непрерывная на любом конечном промежутке $[x_1, x_2]$ и может иметь разрывы только I рода; 3. кусочно-монотонная. Тогда ряд Фурье, составленный для этой функции, сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности и к среднему арифметическому односторонних пределов в точках разрыва первого рода: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = \begin{cases} f(x) - \textit{в точках непрерывности}, \\ \dfrac{f(x-x_0)+f(x+x_0)}{2} \end{cases}$ (x_0 - точки разрыва I-го рода).

§ Ряд Фурье для чётной и нечётной функции, для функций, заданных на интервале $[0, l]$ и непериодических функций

Лемма 1	Если $f(x)$ – чётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Лемма 2	Если $f(x)$ – нечётная функция на промежутке $[-a, a]$, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Пример. Разложение функций в ряд Фурье.

$$f(x) := \mathrm{if}(x < 0, -1, 0) + \mathrm{if}(x \ge 0, 1, 0)$$

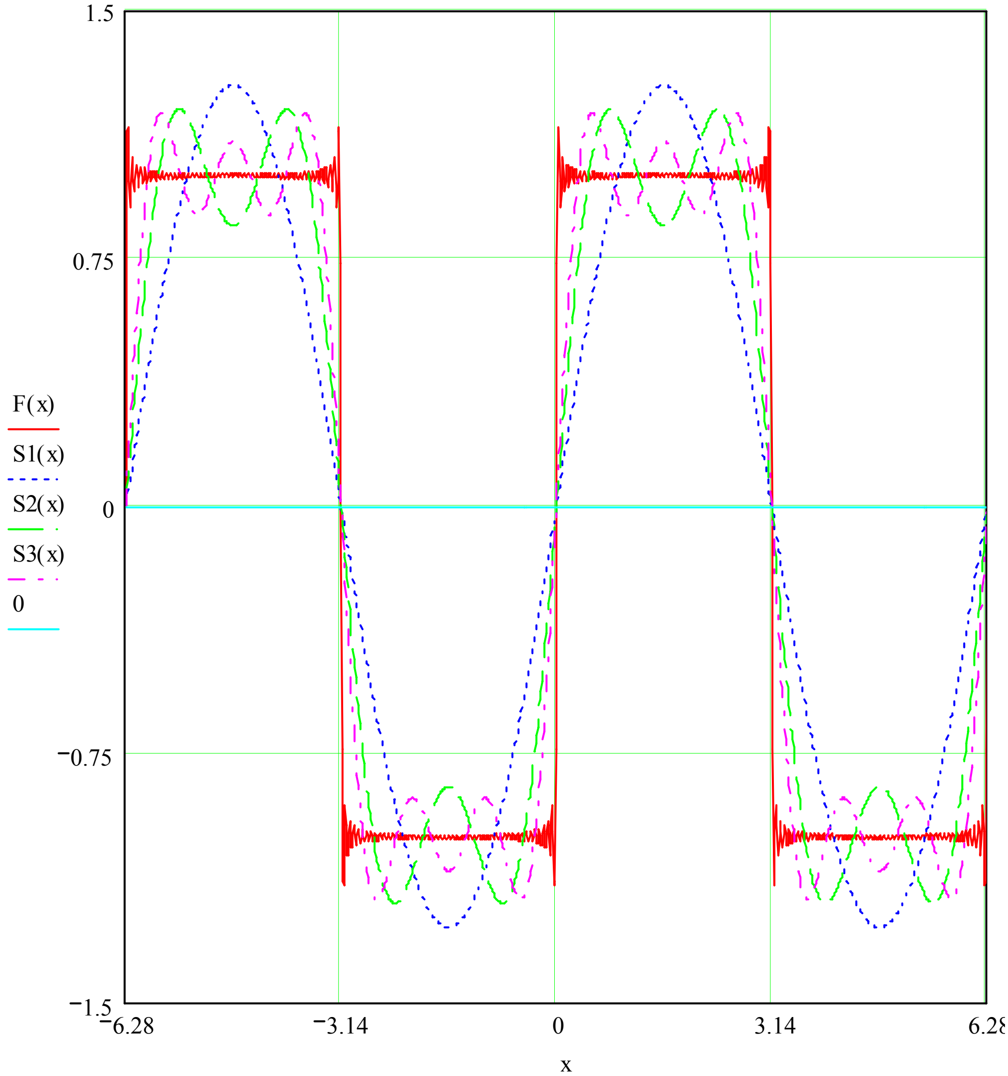
$$L := \pi \qquad N := 10($$

$$n := 0..\,N$$

$$a_0 := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad a_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx \qquad b_n := \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)dx$$

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{L}\right)$$

$$S1(x) := \frac{4\cdot\sin(x)}{\pi} \qquad S2(x) := S1(x) + \frac{4\cdot\sin(3\cdot x)}{3\cdot\pi} \qquad S3(x) := S2(x) + \frac{4\cdot\sin(5\cdot x)}{\pi\cdot 5}$$



Разложение функций в ряд Фурье в интервале $[0, l]$	Функцию, заданную на интервале $[0, l]$ доопределяют на интервал $[-l, 0]$ чётным образом, если $f(0) \neq 0$ и нечётным образом, если $f(0) = 0$. Вне интервала $[-l, l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.

Разложение функций в ряд Фурье непериодических функций	Функцию, заданную на интервале $[a, a+2l]$, вне интервала $[a, a+2l]$ продолжают периодическим образом. Проверяют выполнение условий Дирихле для полученной функции, вычисляют коэффициенты Фурье по соответствующим формулам и записывают ряд Фурье.

§ **Ряд Фурье в комплексной форме**

Определение ортогональной системы комплексных функций	Пусть дана система комплексных функций вещественных переменных: $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$ Эта система называется ортогональной на промежутке $[a, b]$, если при $i \neq j$: $\int\limits_a^b \varphi_i(t)\overline{\varphi_j}(t)dt = 0$, при этом $\int\limits_a^b \varphi_i(t)\overline{\varphi_i}(t)dt = \int\limits_a^b \left\|\varphi_i(t)\right\|^2 dt \neq 0$.

Определение ряда Фурье в комплексной форме	Рядом Фурье в комплексной форме для функции $f(t)$, имеющей период $T = 2l$, по ортогональной системе функций $e^{i\frac{\pi n t}{l}}$ называется ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n t}{l}}$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_a^{a+2l} f(t) e^{-i\frac{\pi n t}{l}} dt$.

Достаточные условия Дирихле сходимости ряда Фурье к порождающей его функции	Ряд Фурье в комплексной форме сходится к функции, порождающей этот ряд, если действительная и мнимая часть функции $f(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле.

§ **Связь ряда Фурье в комплексной форме с тригонометрическим рядом Фурье**

Теорема о связи рядов Фурье	Если вещественная функция удовлетворяет условиям Дирихле, то между её тригонометрическим рядом Фурье и рядом Фурье в комплексной форме существует связь. Один ряд может быть получен из другого, если воспользоваться следующей зависимостью между коэффициентами: $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$; $c_0 = \frac{a_0}{2}$.