§ Комплексные числа, функции и действия над ними

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль

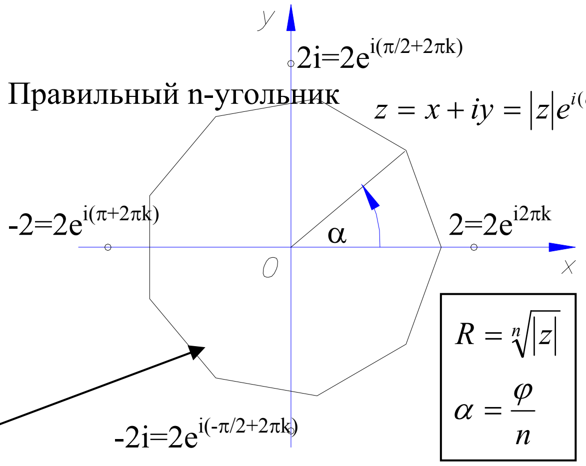
x=*Re z* – действительная часть *z* – действ. число,
y=Im z – мнимая часть *z* – **действительное число**

z=*x*+*iy* – алгебраическая форма записи компл. числа

Главное значение аргумента

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, I, IV \text{ четверть} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, II \text{ четверть} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, \text{III четверть} \end{cases}$$

$$-\pi < \varphi \le \pi \qquad Argz = \arg z + 2\pi k$$



$$R = \sqrt[n]{|z|}$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{n}$$

Показательная форма записи компл. числа
$z = |z|e^{i\varphi}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ k = 0,1,…, n-1}$$

Формула Эйлера
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$ch\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad sh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

$$shz = -i\sin iz$$
$$chz = \cos iz$$

$$Arc\sin z = w \to z = \sin w = \frac{e^{-iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \to e^{2iw} - 2ize^{wi} - 1 = 0 \to e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \to$$
$$\to w = Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

$$Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$
$$Arc\cos z = -iLn(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$
$$Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1 + iz}{1 - iz}$$
$$Arcctgz = \frac{i}{2}Ln\frac{z - i}{z + i}$$

$$Lnz = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)$$

$$z^n = e^{nLnz}$$
$$a^z = e^{zLna}$$

Глава 2. Преобразование Лапласа. Операторный метод решения дифференциальных уравнений

§ Основные понятия и определения преобразования Лапласа

Определение преобразования Лапласа	**Преобразованием (интегралом) Лапласа** функции $f(t), t \in R$, которая может принимать и комплексные значения, называется функция $F(P)$ комплексной переменной $P = \sigma + i\omega$, определяемая следующим равенством: $F(P) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$

Определение оригинала	Если функция $f(t)$ $(t \in R)$ удовлетворяет следующим условиям: $1. f(t)$ *интегрируема* $\forall t \in (0, \infty)$; $2. f(t) = 0, \forall t < 0$; $3. \lvert f(t) \rvert \le Me^{\sigma_0 t}$, $M = const, \sigma_0 = const$, то функция $f(t)$ $(t \in R)$ называется **оригиналом,** а интеграл Лапласа $F(P) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ сходится абсолютно и равномерно во всей полуплоскости $\operatorname{Re} P \ge \sigma > \sigma_0$.

Определение изображения по Лапласу	Функцию $F(P)$ называют **изображением** для оригинала $f(t)$ $(t \in R)$. Обозначают соответствие между оригиналом и изображением одним из следующих способов: $f(t) \to F(P), F(P) = L[f(t)],\ F(P) \risingdotseq f(t)$.

Определение единичной функции Хевисайда	**Единичной функцией Хевисайда** называется функция $1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1 \text{ } при \text{ } t \ge 0, \\ 0 \text{ } при \text{ } t < 0. \end{cases}$

§ Основные свойства преобразования Лапласа

Пусть функции $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, являются оригиналами, причём $f_k(t) \to F_k(P)$ для $\operatorname{Re} P > \sigma_k$. Тогда имеют место следующие свойства (теоремы):

1. Свойство линейности	Для любых постоянных $C_k, k = 1, 2, \dots, n$ $\sum\limits_{k=1}^n C_k f_k(t) \to \sum\limits_{k=1}^n C_k F_k(P), \quad \operatorname{Re} P > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$

2. Теорема подобия	Для любой постоянной ω > 0

	$f(\omega t) \to \frac{1}{\omega} F(\frac{P}{\omega}), \quad \operatorname{Re} P > \omega\sigma_0.$

3. Теорема смещения в области оригиналов (запаздывания)	Запаздыванию оригинала на τ соответствует умножение изображения на $e^{-P\tau}$: $f(t-\tau) \to e^{-P\tau} F(P), \ \operatorname{Re} P > \sigma_0.$

4. Теорема смещения в области изображений	Умножению оригинала на $e^{P_0 t}$ соответствует запаздывание изображения на P_0 : $F(P-P_0) \leftarrow e^{P_0 t} f(t), \quad \operatorname{Re}(P-P_0) > \sigma_0.$

5. Теорема дифференцирования оригинала	Если $f(t)$ и её производные $f^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются оригиналами, то для любого n = 1, 2, … имеют место соответствия: $f^{/}(t) \to PF(P) - f(0);$ $f^{//}(t) \to P^2 F(P) - Pf(0) - f^{/}(0);$ $f^{(n)}(t) \to P^n F(P) - P^{n-1} f(0) - P^{n-2} f^{/}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$

6. Теорема дифференцирования изображения	Умножению оригинала $f(t)$ на множитель $(-t)$ соответствует дифференцирование изображения $F(P)$ по его аргументу *P*: $F^{/}(P) \leftarrow -tf(t);$ ....; $F^{(n)}(P) \leftarrow (-1)^n t^n f(t).$

7. Теорема интегрирования оригинала	Интегрирование оригинала $f(t)$ по промежутку (0; t) приводит к делению изображения подынтегральной функции $F(P)$ на *P*: $\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(P)}{P}, \quad \operatorname{Re} P > \sigma_0.$

8. Теорема интегрирования изображения	Если $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом, то: $\int_P^{\infty} F(P)dP \leftarrow \frac{f(t)}{t}.$ То есть, интегрирование изображения $F(P)$ по промежутку

	(P,∞) приводит к делению на t оригинала $f(t)$ подынтегральной функции.

9. Теорема об изображении периодического оригинала	Если $f_0(t)\to F_0(P)$, где $f_0(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ f(t), & 0\le t<T,\\ 0, & t>T,\end{cases}$ причём функция $f(t)$ при $t>T$ периодическая с периодом T, то $f(t)\to \dfrac{F_0(P)}{1-e^{-TP}}$.

10. Дифференцирование и интегрирование по параметру	Если $f(t,\alpha)\to F(P,\alpha)$, и функции $\dfrac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}$ и $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)d\alpha$ как функции аргумента t являются оригиналами, то $\dfrac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}\to\dfrac{\partial F(P,\alpha)}{\partial\alpha}$ и $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)d\alpha\to\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(P,\alpha)d\alpha$.

11. Теоремы о связи начальных и конечных значений оригинала и изображения	Если $f(t)\to F(P)$, то а) $f(0)=\lim\limits_{P\to\infty} PF(P)$ и (если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=f(+\infty)$) б) $f(+\infty)=\lim\limits_{P\to 0} PF(P)$.

§ Таблица основных изображений

№	$f(t)\to F(P)$	№	$f(t)\to F(P)$
1	$1 \to \dfrac{1}{P}$	7	$e^{\alpha t}\cos\omega t\to\dfrac{P-\alpha}{(P-\alpha)^2+\omega^2}$
2	$e^{\alpha t}\to\dfrac{1}{P-\alpha}$	8	$e^{\alpha t}\sin\omega t\to\dfrac{\omega}{(P-\alpha)^2+\omega^2}$
3	$\sin\omega t\to\dfrac{\omega}{P^2+\omega^2}$	9	$sh\omega t\to\dfrac{\omega}{P^2-\omega^2}$
4	$\cos\omega t\to\dfrac{P}{P^2+\omega^2}$;	10	$ch\omega t\to\dfrac{P}{P^2-\omega^2}$
5	$t^n\to\dfrac{n!}{P^{n+1}}$	11	$\dfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}\to\dfrac{1}{(P-\alpha)^{n+1}}$

6	$t^n \cos\omega t \to \dfrac{n!\operatorname{Re}((P+i\omega)^{n+1})}{(P^2+\omega^2)^{n+1}}$	**12**	$t^n \sin\omega t \to \dfrac{n!\operatorname{Im}((P+i\omega)^{n+1})}{(P^2+\omega^2)^{n+1}}$

§ Отыскание оригинала по изображению

Первый способ. Разложение дроби, соответствующей изображению, на сумму простых дробей и использование свойств оригиналов, изображений и таблицы основных изображений.

Второй способ. По формулам обращения.

Первая теорема разложения	Если изображение $F(P)$ является аналитической функцией в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки, и её разложение в ряд по степеням $\dfrac{1}{P}$ имеет вид: $F(P)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{P^{n+1}}$, то функция $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{t^n}{n!},\quad t>0\quad (f(t)=0\ при\ t<0)$ является оригиналом, имеющим изображение $F(P)$, то есть справедлива формула обращения: $F(P)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{P^{n+1}} \longleftarrow f(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{t^n}{n!},\quad t>0\quad (f(t)=0\ при\ t<0)$.

Вторая теорема разложения	Если изображение $F(P)$ является однозначной функцией и имеет лишь конечное число изолированных особых точек $P_1, P_2, \dots, P_k$, лежащих в конечной части плоскости, то имеет место формула обращения: $f(t)=\sum\limits_k \underset{P=P_k}{res} F(P)e^{Pt}$, то есть оригинал равен сумме вычетов функции $F(P)e^{Pt}$ во всех её изолированных особых точках $P_1, P_2, \dots, P_k$.

Формула обращения $f(t)=\sum\limits_k \underset{P=P_k}{res} F(P)e^{Pt}$	
Тип изолированной особой точки	Формула вычисления вычета $\underset{P=P_k}{res}\ F(P)e^{Pt}$
Простой полюс P_K: $\lim\limits_{P\to P_k}F(P)(P-P_k)=const\neq 0$	1. $\underset{P=P_K}{res}\ F(P)e^{Pt}=\lim\limits_{P\to P_k}F(P)e^{Pt}(P-P_k)$; 2. $\underset{P=P_k}{res}\dfrac{\varphi(P)e^{Pt}}{\psi(P)}=\dfrac{\varphi(P_k)e^{P_k t}}{\psi'(P_k)}$
m-кратный полюс P_K: $\lim\limits_{P\to P_k}F(P)(P-P_k)^m=const\neq 0$	$\underset{P=P_K}{res}\ F(P)e^{Pt}=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{P\to P_k}\dfrac{d^{m-1}}{dP^{m-1}}(F(P)e^{Pt}(P-P_k)^m)$

Замечание. Тип изолированной особой точки легко определить по степени m скобки $(P-P_k)^m$ в представлении знаменателя функции $F(P)$ в виде произведения линейных сомножителей: если $m=1$, то полюс P_k − первого порядка (простой полюс), если $m>1$, то полюс P_k является m – *кратным.*

Вторая теорема разложения (другая формулировка)	Если изображение $F(P)$ является правильной несократимой рациональной дробью, т.е. $F(P)=\dfrac{A_w(P)}{B_n(P)}, \quad w<n$, и если знаменатель дроби имеет корни $P_1, P_2, \dots, P_s$ соответственно кратности $m_1, m_2, \dots m_s \quad (m_1+m_2+\dots+m_s=n)$, то оригинал $f(t)$ определяется по формуле: $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{1}{(m_k-1)!}\lim\limits_{P\to P_k}\dfrac{d^{m_k-1}}{dP^{m_k-1}}\left(\dfrac{A_w(P)}{B_n(P)}e^{Pt}(P-P_k)^{m_k}\right)$.

§ Свёртка оригиналов. Интеграл Дюамеля

Теорема умножения изображений (Бореля) (о свёртке оригиналов)	**Произведению изображений** соответствует **свёртка** их оригиналов: $F_1(P)F_2(P)\leftarrow\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t)$ где интегралы $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ называют **свёрткой оригиналов,** которую обозначают**:** $f_1(t)*f_2(t)$

Интеграл Дюамеля	Если $f(t)\to F(P)$ и $g(t)\to G(P)$, то $PF(P)G(P)\leftarrow f(0)g(t)+f_t^{/}*g=g(0)f(t)+g_t^{/}*f$.

§ Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Правые части ДУ − произвольного вида, начальные условия – нулевые:

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений формулами Дюамеля

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\dots a_nx(t)=f(t); \quad x(0)=x^{/}(0)=\dots=x^{(n-1)}(0)=0.$$

$$а)\; a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\dots a_nx(t)=1 \quad \Rightarrow x_1(t);$$

$$б)\; x(t)=\int\limits_0^t x_1^{/}(\tau)f(t-\tau)d\tau, \quad или \quad x(t)=\int\limits_0^t x_1^{/}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad или$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f^{/}(\tau)x_1(t-\tau)d\tau, \quad или \quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f^{/}(t-\tau)x_1(\tau)d\tau$$

2. Правые части ДУ – табличные, начальные условия − произвольные:

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\dots a_nx(t)=f(t); \quad x(0)=x_0, \quad x^{/}(0)=x_1, \quad x^{(n-1)}(0)=x_{n-1}.$$

$$F(P)(a_0P^n + a_1P^{n-1} + \ldots + a_n) = \Phi(P) + a_0(P^{n-1}x_0 + P^{n-2}x_1 + \ldots + x_{n-1}) + a_1(P^{n-2}x_0 + \ldots + x_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}x_0.$$

Откуда $$F(P) = \frac{\Phi(P)}{\varphi_n(P)} + \frac{\Psi_{n-1}(P)}{\varphi_n(P)},$$

где $x(t) \to F(P)$; $\varphi_n(P) = (a_0P^n + a_1P^{n-1} + \ldots a_n)$; $f(t) \to \Phi(P)$;

$$\Psi_{n-1}(P) = a_0(P^{n-1}x_0 + P^{n-2}x_1 + \ldots + x_{n-1}) + a_1(P^{n-2}x_0 + \ldots + x_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}x_0.$$