Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ Основные понятия и определения

Определение дифференциального уравнения	**Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и производные искомой функции $y', y'', \dots, y^{(n)}$: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Определение обыкновенного дифференциального уравнения	Если искомая функция $y = f(x)$ является функцией одного аргумента x, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным.**

Определение порядка дифференциального уравнения	**Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Определение решения дифференциального уравнения	**Решением** или **интегралом дифференциального уравнения** называется всякая функция $y = f(x)$, подстановка которой в дифференциальное уравнение обращает дифференциальное уравнение в тождество. График функции, являющейся решением дифференциального уравнения, называется **интегральной кривой.**

Определение общего решения дифференциального уравнения	**Общим решением** дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называется такое его решение $y = y(x, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$, которое содержит столько линейно независимых произвольных постоянных $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, каков порядок этого уравнения. Если общее решение записано в неявном виде $\Phi(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n) = 0$, то оно называется **общим интегралом.**

Определение частного решения дифференциального уравнения	Всякое решение дифференциального уравнения, которое получается из общего решения, если присвоить определённые числовые значения произвольным постоянным, в него входящим, называется **частным решением** этого дифференциального уравнения.

Правило проверки	Если в результате решения дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то *подставив* эту функцию в данное дифференциальное уравнение, можно проверить правильность решения: если **получится тождество**, то дифференциальное уравнение **решено правильно**.

Определение понятия задачи Коши	**Задачей Коши** называют задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего n заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

§ Дифференциальные уравнения первого порядка

Теорема существования и единственности решения задачи Коши	Если правая часть $f(x, y)$ уравнения $y' = f(x, y)$ и её частная производная по y, то есть $f'_y(x, y)$, определены и непрерывны в некоторой области D изменения переменных x и y, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) этой области, данное уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, принимающее при $x = x_0$ заданное значение $y = y_0$.

§ Дифференциальные уравнения первого порядка с разделёнными переменными

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Функция при dx зависит только от x, функция при dy зависит только от y.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении.	Общий интеграл $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$

§ Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ или $y' = f_1(x)f_2(y)$; $(y' = \frac{dy}{dx})$.	Функции при дифференциалах распадаются на произведения функций, зависящих только от одной из переменных.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.	Уравнение с разделенными переменными и общий интеграл: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$

§ Понятие об особых решениях

Определение особого решения	Решение, график которого таков, что через каждую его точку проходит по крайней мере ещё одна ***касающаяся*** его интегральная кривая, называется **особым решением** дифференциального уравнения.

Определение огибающей семейства кривых	**Огибающей** семейства кривых называется такая кривая, которая касается каждой кривой семейства и притом вся состоит из этих точек касания.

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения Клеро	$y = xy' + \psi(y')$	$\psi(y')$ - известная функция от y'.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
$y = cx + \psi(c)$	Общее решение

§ Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение однородной функции двух переменных степени однородности *m*.	Функция двух переменных $f\ (x,\ y)$ называется однородной функцией степени однородности m, где m – целое число, если при любом k выполняется равенство: $f(kx, ky) = k^m f(x, y)$

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Однородные уравнения	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ или $y' = f(\frac{y}{x})$.	Уравнение не изменяет своего вида при замене x и y на λx и λy.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
Сделать замену переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$, $dy = tdx + xdt$.	Уравнение с разделяющимися переменными $t'x = f(t) - t$.

§ Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к однородным

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения, приводящиеся к однородным	$y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$;	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.
Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	$y' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$;	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
$\begin{cases} x = u + x_{0,} \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0, \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	Однородное уравнение $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}$;
$z = a_1 x + b_1 y$ $z' = a_1 + b_1 y'$	Уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{z' - a_1}{b_1} = \dfrac{z + c_1}{kz + c_2}; k = \dfrac{a_2}{a_1}$

§ Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Линейные уравнения	$y' + p(x)y = q(x)$ $x' + p(y)x = q(y)$	Искомая функция и её производная входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2.Метод вариации произвольной постоянной $а) q(x) = 0, \quad y = y_0(c, x);$ $б)\ y = y_0(c(x), x), \quad q(x) \neq 0$	1. $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$ Система двух ДУ с разделяющимися переменными 2.ДУ с разделяющимися переменными

§ Дифференциальные уравнения Бернулли

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^m$ или $x' + p(y)x = q(y)x^m$.	Левая часть уравнения – такая же, как у линейного уравнения, а правая отличается на сомножитель: искомую функцию в степени m.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ 2. $z = y^{1-m}$, $z' = (1-m)y^{-m}y'$	1. Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases}$ 2. Линейное уравнение $z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$

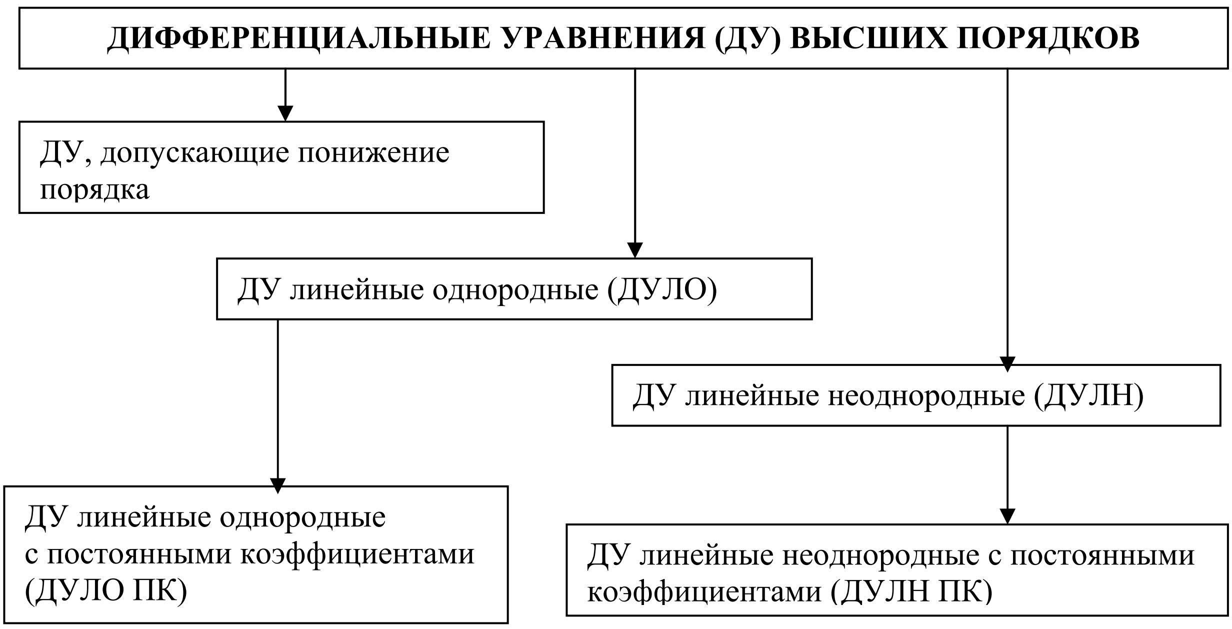
§ Дифференциальные уравнения первого порядка в полных дифференциалах

Теорема о полном дифференциале функции двух аргументов	Для того, чтобы дифференциальное выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ было **полным дифференциалом** некоторой функции $u(x, y)$ в некоторой области D, необходимо и достаточно, чтобы для *непрерывных частных производных* этой функции в области D выполнялось равенство: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Уравнения в полных дифференциалах	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	Условие полного дифференциала $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Метод решения уравнения	Результат применения метода
1. $\begin{cases} u = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = c, \\ (\int M(x,y)dx)'_y + \varphi'(y) = N(x,y) \end{cases}$.	Общий интеграл.
2. $u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = c \Big|_{x=const\neq x_0}$ или $u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx \Big|_{y=const\neq y_0} + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$	

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ



§ Геометрический смысл решений ДУВП, теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теорема существования и единственности решения задачи Коши	Если правая часть $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ и её частные производные по $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в некоторой области D изменения её аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, то какова бы ни была внутренняя точка $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in D$ этой области, найдётся такой интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$, на котором данное уравнение имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

§ Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение записано явно относительно старшей производной; в правой части уравнения функция зависит только от x.

Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Допускает понижение порядка	$y^{(n)} = f(x)$	Уравнение записано явно относительно старшей производной; в правой части уравнения функция зависит только от x.

Метод решения уравнения
Последовательное понижение порядка производной n-кратным интегрированием $y = \underbrace{\int\int...\int}_{n} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{n} + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n$

2. Уравнение не содержит явно искомой функции y и её первых производных до порядка k-1 включительно

Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Допускает понижение порядка	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ... y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно искомой функции y и её первых производных до порядка k-1 включительно

Пример. Найти уравнение кривой, по которой происходит провисание однородной нерастяжимой нити, подвешенной за два конца, под действием силы тяжести.

Метод решения уравнения
Понижение порядка уравнения на k единиц заменой переменной $y^{(k)} = p(x)$, $y^{(k+1)} = p^{/}(x), \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$.

3. Уравнение
не содержит явно независимой переменной x

Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Допускает понижение порядка	$F(y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно независимой переменной x

Метод решения уравнения
Понижение порядка уравнения на единицу заменой переменной $y' = p(y), \quad y'' = p\dfrac{dp}{dy}, \quad y''' = p(\dfrac{dp}{dy})^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$ и так далее.

§ Линейные ДУ высших порядков. Общие свойства решений

Определение линейного неоднородного дифференциального уравнения	Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (**ЛНДУ**) n – го порядка называется уравнение вида: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$, где $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x), f(x)$ − известные функции.

Определение линейного однородного дифференциального уравнения	Линейным однородным дифференциальным уравнением (**ЛОДУ**) n – го порядка называется уравнение вида: $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$, где $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ − известные функции.

Определение фундаментальной системы частных решений	Система n линейно независимых частных решений дифференциального уравнения n – го порядка называется фундаментальной системой частных решений (**ФСЧР**) этого дифференциального уравнения.

Теорема о необходимых и достаточных условиях линейной независимости системы функций	Для того, чтобы система функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ была **линейно независимой** для всех x из промежутка $[a,\ b]$ $(\forall x \in [a, b])$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского (вронскиан) **det*W***, составленный из этих функций, был **отличен от нуля** $(\det W \neq 0)$: $$\det W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{/} & y_2^{/} & \dots & y_n^{/} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Теорема о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости системы функций	Для того, чтобы система функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ была **линейно зависимой** для всех x из промежутка $[a,\ b]$ $(\forall x \in [a, b])$, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского (вронскиан) **detW**, составленный из этих функций, был **равен нулю** $(\det W = 0)$: $$\det W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1^{/} & y_2^{/} & \dots & y_n^{/} \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ)	Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – фундаментальная система частных решений (**ФСЧР**) линейного однородного дифференциального уравнения **(ЛОДУ),** то **общее решение *y*(*x*)** есть **линейная комбинация этих частных решений:** $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные постоянные.

Определение усечённого уравнения	Линейное однородное уравнение, левая часть которого совпадает с левой частью неоднородного уравнения, называется **соответствующим ему** однородным уравнением, или **усечённым** уравнением, или уравнением **без правой части.**

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ)	Если $y_н(x)$ − частное решение линейного неоднородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y^{/} + a_n(x) y = f(x)$, а $y_0(x)$ − общее решение соответствующего ему линейного однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y^{/} + a_n(x) y = 0$, то функция $y = y_н + y_0$ является **общим решением** неоднородного дифференциального уравнения.

§ Метод **Лагранжа (вариации произвольных постоянных)** решения ЛНДУ **с произвольной правой частью**

<table>
<tr><td>Метод решения линейного неоднородного ДУ с произвольной правой частью</td></tr>
<tr><td>Метод вариации произвольных постоянных. Интегрируются решения алгебраической системы линейных уравнений (АСЛУ) с неизвестными функциями $c_1'(x), c_2'(x), ... c_n'(x)$ и фундаментальной системой частных решений ЛОДУ $y_1, y_2 ..., y_n$, (f(x)=0). Решения АСЛУ можно найти, например, методом Крамера:
$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + ... + c_n' y_n = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + ... + c_n' y_n' = 0, \\ .... = 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + ... + c_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \Rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & ... & y_n \\ 0 & y_2' & ... & y_n' \\ 0 & ... & ... & ... \\ f(x) & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}};$$
$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & ... & y_n \\ y_1' & 0 & ... & y_n' \\ .... & 0 & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & f(x) & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}; \ldots, c_n' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & 0 \\ y_1' & y_2' & ... & 0 \\ .... & ... & ... & 0 \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}.$$
Общее решение ЛНДУ: $y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + ... + c_n(x) y_n$.</td></tr>
</table>

§ Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения
Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициента ми (ЛОДУ)	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$	Искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются; правая часть уравнения равна нулю.

Метод решения уравнения
Решение ЛОДУ ищут в виде функции $y = e^{kx}$. Находят корни характеристического уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} +,,, + a_{n-1} k + a_n = 0$. Каждому действительному корню k кратности r характеристического уравнения соответствует r линейно независимых частных решений ЛОДУ: $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, ..., y_r = x^{r-1} e^{kx}$ Каждой паре комплексных корней $k = \alpha \pm i\beta$ кратности s характеристического уравнения соответствует $2s$ линейно независимых Ч.Р. ЛОДУ: $e^{\alpha x} \cos\beta x, xe^{\alpha x} \cos\beta x, ..., x^{s-1} e^{\alpha x} \cos\beta x,$ $e^{\alpha x} \sin\beta x, xe^{\alpha x} \sin\beta x, ..., x^{s-1} e^{\alpha x} \sin\beta x,$ ОР ЛОДУ $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$. (Если $s = 1$, то $y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$).

§ Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Правая часть $f(x)$ − специального вида

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$	**1. Правая часть $f(x)$ − специального вида** $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$

Метод неопределенных коэффициентов
. Общее решение ЛНДУ получают как сумму общего решения y_0 соответствующего ЛОДУ и частного решения $y_н$ ЛНДУ: $y = y_0 + y_н = y_0 + x^s e^{\alpha x}(U_w(x)\cos\beta x + V_w(x)\sin\beta x)$: $w = \max(m, l)$; *s − кратность корня $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения.*

2. Правая часть $f(x)$ − произвольного вида

Метод **Лагранжа (вариации произвольных постоянных)** решения ЛНДУ **с произвольной правой частью**

Теорема о сумме частных решений ЛНДУ	Если $y_{1н}$ −частное решение ДУ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x)$, а $y_{2н}$ − частное решение ДУ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f_2(x)$ с одной и той же левой частью, то сумма $y_{1н} + y_{2н}$ является частным решением уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f_1(x) + f_2(x)$.

§ Алгоритм решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений *n* – го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{/} + a_n y = f(x)$$

1. Найти фундаментальную систему ***n*** частных решений $y_1, y_2 \ldots, y_n$ усечённого ($f(x)=0$) линейного ДУ (см. ЛОДУ).

Составить общее решение усечённого линейного ДУ: $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

2.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_{m}(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$$

нет

См. метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных).

да

Проверяемое число $\alpha \pm \beta i$ – *корень кратности* s *характеристического уравнения*

($s = 0$, *если числа нет среди корней характеристического уравнения*).

$$y_н = x^s e^{\alpha x}(U_w(x)\cos\beta x + V_w(x)\sin\beta x),$$

где $y_н$ – частное решение ЛНДУ,

такого же вида, что и $f(x)$, но многочлены $U_w(x)$ и $V_w(x)$ имеют степень $w = \max(m, l)$:

$U_w(x) = A_w x^w + A_{w-1} x^{w-1} + \cdots + A_0$,

$V_w(x) = B_w x^w + B_{w-1} x^{w-1} + \cdots + B_0$,

неопределённые коэффициенты которых A_i, B_i $(i = 0, \ldots, n)$

подлежат нахождению приравниванием коэффициентов при одинаковых выражениях в правой и левой частях ЛНДУ после подстановки в него $y_н(x)$.

Общее решение ЛНДУ:

$$y = y_0 + y_н$$

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (СДУ)

§ Основные понятия. Нормальные системы

Определение системы дифференциальных уравнений	**Системой дифференциальных уравнений** называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимая переменная, искомые функции и их производные. Всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций.

Например, система двух дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}) = 0, \\ f_2(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений состоит в нахождении функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$, удовлетворяющих обоим уравнениям системы.

Определение нормальной системы дифференциальных уравнений (НСДУ)	**Нормальной системой дифференциальных уравнений** называется система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной: $\begin{cases} y_1^{/} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ y_2^{/} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n); \\ \quad .... \\ y_n^{/} = f(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$ где x – независимая переменная, $y_1(x),\ y_2(x), ... , y_n(x)$ − неизвестные функции.

Определение решения системы дифференциальных уравнений	**Решением** системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $y_1(x),\ y_2(x), ... , y_n(x)$, удовлетворяющих каждому уравнению этой системы.

Определение частного решения системы дифференциальных уравнений	**Частным решением СДУ** называется решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, ... , y_n(x_0) = y_{n0}$, где $y_{10},\ y_{20}, ... , y_{n0}$ – заданные постоянные числа.

§ Метод исключения неизвестных решения НСДУ

Теорема 1 о связи дифференциального уравнения *n*-го порядка с нормальной СДУ	Одно дифференциальное уравнение ***n***-го порядка, разрешённое относительно старшей производной: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$, всегда можно свести к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Теорема 2 о связи дифференциального уравнения *n*-го порядка с нормальной СДУ	Нормальную систему дифференциальных уравнений можно привести **методом исключения неизвестных** к одному уравнению, порядок которого меньше или равен числу уравнений нормальной системы дифференциальных уравнений.

Алгоритм применения метода исключения неизвестных

Дифференцируем первое уравнение системы по переменной *x*:

$$y_1'' = (f_1)'_x + (f_1)'_{y1} \cdot y_1' + (f_1)_{y2} \cdot y_2' + ... + (f_1)'_{yn} \cdot y_n'.$$

Производные $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правой части этого равенства заменяем их выражениями из НСДУ.

Получим уравнение $y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$

↓

$$y_1''' = (y_1'')'_x = (F_2)'_x + (F_2)'_{y1} \cdot y_1' + (F_2)'_{y2} \cdot y_2' + ... + (F_2)'_{yn} \cdot y_n'.$$

Производные $y_1', y_2', ..., y_n'$ в правой части этого равенства заменяем их выражениями из НСДУ.

Получим уравнение $y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n)$

↓

…….. И так далее …….

↓

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

↓

Полученные таким образом дифференциальные уравнения объединяем в систему:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ .... \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases}$$

↓

Первые *n* − 1 уравнений решаем относительно переменных $y_1, y_2, ..., y_n$, выражая их через переменные $x, y_1, y_1', y_1'', ... y_1^{(n-1)}$.

Подставляя полученные выражения в последнее уравнение системы, придём к уравнению порядка *n* относительно одной неизвестной y_1.

Замечание. Порядок последнего уравнения может быть меньше n, если при его получении были использованы не все уравнения системы.

§ Метод выделения интегрируемых комбинаций

Получают из системы такие уравнения, которые можно проинтегрировать и найти первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов НСДУ, то их совокупность дает общий интеграл этой системы. Для выделения интегрируемых комбинаций из НСДУ её записывают в так называемой симметрической форме: $\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dx}{1}$ и используют следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = ... = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ имеет место соотношение $\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n} = \gamma$ (*). Значения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ подбираются таким образом, чтобы числитель в (*) был полным дифференциалом знаменателя или же числитель и знаменатель были равны нулю.

§ Нормальная линейная однородная система n-го порядка (НЛОС).

Тип системы	Вид системы	Признак системы
Нормальная линейная однородная система n-го порядка (НЛОС).	$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n, \\ .... \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n. \end{cases}$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций зависят от аргумента x.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.

Метод решения системы
Метод исключения неизвестных (см. НСДУ). Фундаментальной системой решений НЛОС называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $Y_k(x) = (y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), ..., y_n^{(k)}(x)), \quad k = 1,2,...,n$. Если $Y_k(x), \quad k = 1,2,...,n,$ − фундаментальная система частных решений ЛОС, то общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x)$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ − произвольные постоянные.

§ Нормальная линейная однородная система n -го порядка с постоянными коэффициентами

Тип системы	Вид системы	Признак системы
Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами	$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_{n,}. \end{cases}$ Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ A – матрица из коэффициентов при искомых функциях.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.

Метод решения системы
Матричный метод. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $Y^{(\lambda)}(x)$. Общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$. При этом, если **а)** $\lambda -$ действительный корень кратности 1 (один), то $Y^{(\lambda)}(x) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda)} \\ \xi_2^{(\lambda)} \\ \ldots \\ \xi_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda x},$ где $Y^{(\lambda)} -$ собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то есть $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)} \neq 0$ Если **б)** $\lambda -$ комплексный корень кратности 1 (один), тогда корнем характеристического уравнения является также сопряженное с λ число $\overline{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\overline{\lambda})}(x)$ следует взять действительные частные решения $Y_1^{(\lambda)}(x) = \mathrm{Re}\, Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\lambda)}(x) = \mathrm{Im}\, Y^{(\lambda)}(x)$.

Если **в)** $\lambda -$ корень кратности $r \geq 2$, то соответствующее этому корню решение системы ищут в виде вектора $Y^{(\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}x + ... + \alpha_1^{(r)}x^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}x + ... + \alpha_2^{(r)}x^{r-1} \\ \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}x + ... + \alpha_n^{(r)}x^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}$ (**), коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}, i = 1,...,n,\ j = 1,...,r$ определяются из системы линейных уравнений, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x
в результате подстановки вектора (**) в исходную систему.

План решения нормальной линейной однородной системы дифференциальных уравнений (НЛО СДУ) с постоянными коэффициентами

1. Составить характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$;

2. Найти собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и соответствующие им собственные векторы $Y_1, Y_2, ..., Y_s$;

3. Составить фундаментальную систему частных решений

$$Y^{(\lambda_i)}(x) = Y_i^{(\lambda_i)} e^{\lambda_i x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda_i)} \\ \xi_2^{(\lambda_i)} \\ ... \\ \xi_n^{(\lambda_i)} \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}, i = 1, 2, ..., n;$$

4. Составить общее решение

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$$

5. Для решения задачи Коши использовать данные начальные условия, в соответствии с которыми найти значения произвольных постоянных C_k, $k = 1, 2, ... , n$;

6. Записать частное решение, подставив в общее решение найденные значения произвольных постоянных.

Определение нормальной линейной неоднородной СДУ	Нормальной линейной неоднородной СДУ называется система ДУ называется система, где по крайней мере одна из функций $f_k(x)$ не равна тождественно нулю ($k = 1, 2, ..., n$): $\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ .... \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_{n,} + f_n(x). \end{cases}$

Замечание. В силу теорем о связи нормальных систем ДУ с линейными ДУ n – го порядка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, о структуре общего решения однородных и неоднородных ДУ остаются справедливыми и для нормальных систем дифференциальных уравнений.