Функции комплексного переменного

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль z

x=*Re z* – действительная часть *z* – действ. число,
y=Im z – мнимая часть *z* – **действительное число**
i – мнимая единица, $i^2=-1$

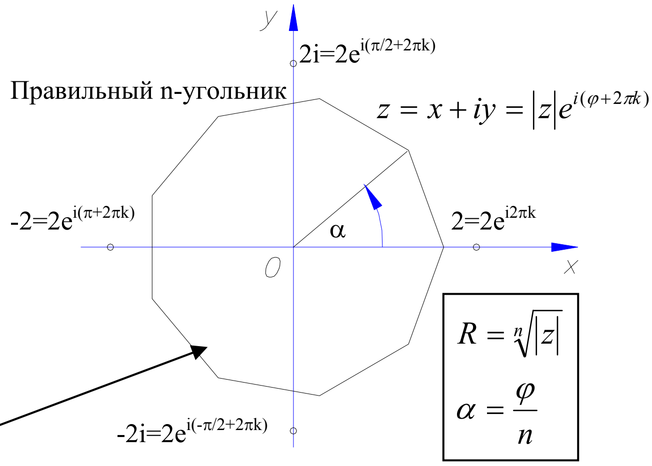
z=*x*+*iy* –
алгебраическая форма
записи компл. числа

Главное значение аргумента

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, I, IV \text{ четверть} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, II \text{ четверть} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, \text{III четверть} \end{cases}$$

$-\pi < \varphi \le \pi \qquad Argz = \arg z + 2\pi k$

Правильный n-угольник



$R = \sqrt[n]{|z|}$

$\alpha = \dfrac{\varphi}{n}$

Показательная форма
записи компл. числа
$z = |z|e^{i\varphi}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, k = 0,1,…, n-1

Формула Эйлера
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Тригонометрическая форма записи
комплексного числа
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

$ch\varphi = \dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad sh\varphi = \dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$

$shz = -i\sin iz$

$chz = \cos iz$

$$Arc\sin z = w \to z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}} \to e^{2iw} - 2ize^{wi} - 1 = 0 \to e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \to$$
$$\to w = Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

$Arc\sin z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$

$Arc\cos z = -iLn(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$

$Arctgz = -\dfrac{i}{2}Ln\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

$Arcctgz = \dfrac{i}{2}Ln\dfrac{z - i}{z + i}$

$Lnz = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k)$

$z^n = e^{nLnz}$

$a^z = e^{zLna}$

Производная функции комплексного переменного

$$\exists du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\exists dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$f(z) = u + iv$$

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$\exists f'(z)$ в точке z
и некоторой ее окрестности

$$\exists f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};\ x = \frac{z + \bar{z}}{2};\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}\cdot$$

Алгебраическими преобразованиями можно исключить $\bar{z}$

f(z) – аналитическая в точке z

u,v – гармонические функции

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

U – известна; $(x_0, y_0) \to (0,0)$, $(x_0, y_0) \to (1,0)$ и т.д.

$$V = \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dy + C = \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x}dy + C$$

$$x = const \neq x_0 \qquad y = const \neq y_0$$

V– известна

$$U = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x, y_0)}{\partial y}dx + \int_{y_0}^{y}\left(-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\right)dy + C = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}dx + \int_{y_0}^{y}\left(-\frac{\partial v(x_0, y)}{\partial x}\right)dy + C,$$

$$x = const \neq x_0 \qquad y = const \neq y_0$$

Геометрический смысл производной

Если в точке z_0 производная аналитической функции не равна нулю, то все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0, при отображении $\omega = f(z)$ *поворачиваются на* один и тот же *угол*, равный **аргументу производной**, и получают одно и то же *растяжение*, равное **модулю производной**.

Интегрирование ФКП

ТВТ©ТПУВМ05

$f(z)=u+iv$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad (x,y)\in G$$

нет

$f(z)$ – *неаналитическая в* G (*содержит* $|z|, \bar{z}, \mathrm{Im}\, z, \mathrm{Re}\, z$)

$$\int_{AB} f(z)dz=\int_{t_A}^{t_B} f(x(t)+iy(t))(x_t'+iy_t')dt$$

$$AB:\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$$

да

$f(z)$ – *аналитическая в* G

Интегральная формула Коши

$$\oint_{\forall L\subset G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

f(z) – аналитическая функция внутри D, ограниченной L⊂ G

Теорема Коши для односвязной области G

$$\oint_{\forall L\subset G} f(z)dz=0$$

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z_2)-F(z_1)$$

Теорема Коши для многосвязной области D

$$\oint_{\forall L\subset G} f(z)dz=\sum_{i=1}^{n}\oint_{\forall \gamma_i\subset G} f(z)dz$$

Интеграл по внешнему контуру *L* равен сумме интегралов по внутренним контурам γ_i, причем все контуры обходятся в одинаковом направлении.

Формула для производной аналитической в G функции f(z)

$$\oint_{\forall L\subset G}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$\underset{z=z_0}{res} f(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz$$

$z_0\in D$, *огр.L*; z_0 – *единств. и.о.т.*

Основная теорема теории вычетов

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\underset{z=z_i}{res} f(z)$$

Устранимая и.о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=const$	$\underset{z=z_0}{res} f(z)=0$
Простой полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=const\neq 0$	$\underset{z=z_0}{res} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$; $\underset{z=z_0}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
m-кратный полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m=const\neq 0$	$\underset{z=z_0}{res} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$
Существенно о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *не существует*	$\underset{z=z_0}{res} f(z)=c_{-1}$ *из разложения* $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$; $\underset{z=\infty}{res} f(z)=-c_{-1}, f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n z^n, \lvert z\rvert>R$

Вычисление некоторых интегралов при помощи вычетов

	Интеграл	Условия	Вычисление
1	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 2,$ R(z) ─ непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)$ z_k ─ все полюсы функции $R(z)$ в верхней полуплоскости
2	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 1,$ R(z) ─ непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\lambda x dx = \mathrm{Re}(2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)e^{i\lambda z}),\quad \lambda>0$ z_k ─ все полюсы функции $R(z)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости
3	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 1,$ $R(z)$ ─ непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}(2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)e^{i\lambda z}),\quad \lambda>0$ z_k ─ все полюсы функции $R(z)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости
4	$\int_{0}^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$	$R(x)$ ─ непрерывна внутри промежутка интегрирования	$z=e^{ix}, \sin x=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \cos x=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), dx=\frac{dz}{iz},\quad \int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx=\oint_{\lvert z\rvert=1} F(z)dz$

Некоторые разложения в степенные ряды

1	$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+...+\frac{z^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$e^z=e^{(z-z_0)+z_0}=e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}, \lvert z-z_0\rvert<\infty$
2	$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...+\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$\cos z=\cos((z-z_0)+z_0)=\cos(z-z_0)\cos z_0-\sin(z-z_0)\sin z_0=$ $=\cos z_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^{2n}}{(2n)!}-\sin z_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-z_0)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \lvert z-z_0\rvert<\infty$
3	$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\quad chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \lvert z\rvert<\infty$	$\frac{Mz+N}{z^2+bz+c}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2}=\frac{A}{(z-z_0)+(z_0-z_1)}+\frac{B}{(z-z_0)+(z_0-z_2)}=$ $=\frac{A}{(z-z_0)(1+\frac{z_0-z_1}{z-z_0})}+\frac{B}{(z_0-z_2)(1+\frac{z-z_0}{z_0-z_2})}=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n A(z_0-z_1)^n}{(z-z_0)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B(z-z_0)^n}{(z_0-z_2)^{n+1}},$ $r=\lvert z_0-z_1\rvert<\lvert z-z_0\rvert<\lvert z_0-z_2\rvert=R$
4	$\frac{b}{1-q(z)}=b\sum_{n=0}^{\infty}(q(z))^n,\quad \lvert q(z)\rvert<1$	
5	$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+...+\frac{(-1)^n z^n}{n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},\quad \lvert z\rvert<1,\ z=1$	
6	$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}z^n+...=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}z^n, \lvert z\rvert<1$	$(\ln(1+z))'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \lvert z\rvert<1$

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

$f(t)-$ *оригинал*: 1. $f(t)$ *интегрируема* $\forall t\in(0,\infty)$; 2. $f(t)=0, \forall t<0$; 3. $\lvert f(t)\rvert \le Me^{\sigma_0 t}, M=const, \sigma_0=const$	$F(P)-$ *изображение оригинала:* $F(P)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
дифференцирование оригинала $f'(t)\to PF(P)-f(0);\ f''(t)\to P^2F(P)-Pf(0)-f'(0);$ $f^{(n)}(t)\to P^nF(P)-P^{n-1}f(0)-P^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$	*дифференцирование изображения* $F'(P)\leftarrow -tf(t);$ $F^{(n)}(P)\leftarrow(-1)^n t^n f(t)$
интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\to\frac{F(P)}{P}$	*интегрирование изображения* $\int\limits_P^\infty F(P)dP\leftarrow\frac{f(t)}{t}$
смещение в области оригиналов $f(t-\tau)\to e^{-P\tau}F(P), \tau>0$	*смещение в области изображений* $F(P-P_0)\leftarrow e^{P_0t}f(t)$
теорема подобия $f(\omega t)\to\frac{1}{\omega}F(\frac{P}{\omega}), \quad \varpi>0$	*теорема о свертке оригиналов* $F_1(P)F_2(P)\leftarrow\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t)$

формула разложения

$$f(t)=\sum_k \underset{P=P_k}{res}F(P)e^{Pt}$$

табличные соотношения

$$1\to\frac{1}{P};\quad e^{\alpha t}\to\frac{1}{P-\alpha};\quad \sin\omega t\to\frac{\omega}{P^2+\omega^2};\quad \cos\omega t\to\frac{P}{P^2+\omega^2};\quad t^n\to\frac{n!}{P^{n+1}};\quad sh\omega t\to\frac{\omega}{P^2-\omega^2};\quad ch\omega t\to\frac{P}{P^2-\omega^2}$$

изображение кусочно – линейной функции

$$F(P)=\sum_k e^{-P\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{P}+\frac{\beta_k}{P^2}\right),$$

τ_k – *точки разрыва* $f(t)$ *или* $f'(t)$,

$\alpha_k=a_{k(справа)}-b_{k(слева)}$ – *скачки* $f(t)$,

$\beta_k=tg\gamma_{k(справа)}-tg\delta_{k(слева)}$ – *скачки* $f'(t)$

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений формулами Дюамеля

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...a_nx(t)=f(t);\quad x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0.$$

$$а)\ a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...a_nx(t)=1\Rightarrow x_1(t);$$

$$б)\ x(t)=\int\limits_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau,\quad или\quad x(t)=\int\limits_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau,\quad или$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau,\quad или\quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau$$

Устранимая и.о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=const$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=0$
Простой полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=const\ne0$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)$; $\quad \underset{z=z_0}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
m-кратный полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)^m=const\ne0$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$
Существенно о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ *не существует*	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=c_{-1}$ *из разложения* $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$; $\underset{z=\infty}{res}f(z)=-c_{-1}, f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_nz^n, \lvert z\rvert>R$