§ Понятие функции комплексного переменного
Предел и непрерывность ФКП

Определение функции комплексного переменного	Пусть дано два множества комплексных чисел D и Δ, и каждому числу $z \in D$ поставлено в соответствие число $\omega \in \Delta$, которое обозначается через $f(z)$. Тогда говорят, что на множестве D задана функция f со значениями в Δ, и пишут $\omega = f(z)$. Если $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, то $\omega = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Определение предела ФКП	Число $\omega_0 \in \Delta$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если $(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\forall z \in D : 0 < \lvert z - z_0 \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(z) - \omega_0 \rvert < \varepsilon)$

Теорема о пределе функции в алгебраической форме записи	Число $\omega_0 = u_0 + iv_0$ является пределом функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ при $z = x + iy \to z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0,\, y \to y_0} u(x, y) = u_0$, $\lim\limits_{x \to x_0,\, y \to y_0} v(x, y) = v_0$.

Теорема о пределе функции в показательной форме записи	Пусть $z = re^{i\varphi}$, $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, $\omega = \rho(r,\varphi) e^{i\theta(r,\varphi)}$, $\omega_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$. Если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$, то при соответствующем выборе аргументов необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{r \to r_0, \varphi \to \varphi_0} \rho(r,\varphi) = \rho_0$, $\lim\limits_{r \to r_0, \varphi \to \varphi_0} \theta(r,\varphi) = \theta_0$.

Определение функции, непрерывной в точке	Функция $\omega = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в этой точка, и предел функции при $z \to z_0$ равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Теорема о непрерывности действительной и мнимой части непрерывной функции	Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то функции $u(x, y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Справедливо и обратное утверждение.

Теорема об ограниченности непрерывной функции	Функция $f(z)$, непрерывная на ограниченном (множество можно накрыть кругом конечного радиуса) замкнутом множестве (точки границы принадлежат множеству), является ограниченной на этом множестве: $\exists M > 0$, такое, что $\lvert f(z) \rvert < M$.

Теорема о существовании наибольшего и наименьшего значений функции	Функция $f(z)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, достигает на этом множестве своего наибольшего и наименьшего значений.

§ Производная ФКП

Определение производной ФКП	Пусть дана непрерывная в точке z_0 функция $\omega = f(z)$. Если существует конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$ к приращению аргумента Δz при $\Delta z \to 0$: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, то он называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $\dfrac{df}{dz} = f'(z_0)$, то есть: $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{df}{dz} = f'(z_0)$.

Определение дифференцируемой в точке ФКП	Функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\cdot \Delta z$, где $A = const$ в точке z_0, $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Теорема о критерии дифференцируемости ФКП	Для того, чтобы функция $\omega = f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала конечная производная функции $f'(z_0)$.

Определение дифференциала ФКП в точке	Главную часть приращения дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$, линейную относительно приращения аргумента Δz, называют дифференциалом ФКП в точке z_0 и обозначают $df = f'(z_0)dz$, то есть $A\Delta z = df = f'(z_0)dz$.

§ Условия дифференцируемости ФКП

Теорема об условиях дифференцируемости ФКП	Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0); 2) в точке (x_0, y_0) выполнялись условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Теорема об эквивалентности условий Коши-Римана и условия $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$	Условия Коши Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ и условие $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ **эквивалентны.**

§ Простейшие свойства аналитических функций

Определение области	**Областью** на комплексной плоскости **называется открытое** (каждая точка принадлежит множеству вместе с некоторой своей окрестностью) **связное множество** (две любые точки множества можно соединить линией, целиком состоящей из точек этого множества).

Определение аналитической функции	Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке**, если она дифференцируема в точке и во всех точках некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется **аналитической в области**, если она аналитическая в каждой точке этой области.

Свойство 1 (аналитичность арифметических действий)	Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в области D, то их **сумма** и **произведение** также аналитичны в D, а **частное** $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ аналитично всюду в области D, где $f_2(z) \neq 0$.

Свойство 2 (аналитичность сложной функции)	Если $\omega = f(z)$ аналитическая в области D функция, а в области её значений определена аналитическая функция $t = \varphi(\omega)$, то функция $t = \varphi(f(z))$ аналитическая в области D.

Свойство 3 (аналитичность обратной функции)	Если в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ определена аналитическая функция $f(z)$ такая, что $f'(z_0) \neq 0$, то **в окрестности точки** $\omega_0 = f(z_0)$ определена единственная обратная функция $z = \varphi(\omega)$, аналитическая в этой окрестности, причём $\varphi'(\omega_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

Свойство 4 (принцип максимума модуля)	Если $f(z)$ аналитична в области D и не постоянна в D, то $\lvert f(z)\rvert$ не достигает в D наименьшего значения. Если $f(z)$ в D не обращается в нуль, то $\lvert f(z)\rvert$ не достигает в D наибольшего значения. Если при этом $f(z)$ непрерывна на границе области D, то $\lvert f(z)\rvert$ достигает наибольшего и наименьшего значения на границе (принцип максимума модуля).

Свойство 5 (теорема Лиувилля)	Если $\omega = f(z)$ аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости функция, то $f(z) = const$.

§ Восстановление аналитической функции по её мнимой или действительной части

Определение уравнения Лапласа и гармонической функции	Уравнения вида $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ называются **уравнениями Лапласа**, а непрерывные в области D функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные второго порядка, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются **гармоническими** в области D.

Определение сопряжённых гармонических функций	Две гармонические функции, связанные условиями Коши-Римана, называются **сопряжёнными**.

Теорема (о связи аналитических и гармонических сопряжённых функций)	**Действительная и мнимая части** аналитической в области D функции являются **сопряжёнными гармоническими** в этой области. И обратно, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ − **гармонические сопряжённые** в области D, то функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ **аналитична** в D.

Определение односвязной области	Область D называется **односвязной**, если любую замкнутую кривую можно стянуть в точку, не выходя из области. (Односвязная область не содержит «дырок» из точек, не принадлежащих области).

Теорема (о восстановлении аналитической функции)	Пусть задана в односвязной области D гармоническая функция $u(x,y)$, тогда можно однозначно восстановить полный дифференциал её сопряжённой гармонической функции $v(x,y)$: $dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$, а затем с точностью до постоянного слагаемого и саму функцию. Если область D многосвязная, то восстановленная функция $v(x,y)$ может быть многозначной.

§ Некоторые свойства основных элементарных ФКП

(e^z, $Ln\,z$, $\sin z$, $\cos z$, $sh\,z$, $ch\,z$, $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, z^n, $az+b$)

Определение конформного отображения	Отображение, обладающее свойством сохранения углов и свойством сохранения коэффициента растяжения в точке z_0, называется **конформным в этой точке**.

§ Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Геометрический смысл модуля и аргумента производной	Если в точке z_0 производная аналитической функции не равна нулю, то все бесконечно малые дуги, выходящие из точки z_0, при отображении $\omega=f(z)$ *поворачиваются на* один и тот же *угол*, равный **аргументу производной**, и получают одно и то же *растяжение*, равное **модулю производной**.