ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

$f(t)-$ *оригинал*: 1. $f(t)$ *интегрируема* $\forall t\in(0,\infty)$; 2. $f(t)=0, \forall t<0$; 3. $\lvert f(t)\rvert\le Me^{\sigma_0 t}, M=const, \sigma_0=const$	$F(P)-$ *изображение оригинала:* $F(P)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$
дифференцирование оригинала $f'(t)\to PF(P)-f(0);\ f''(t)\to P^2F(P)-Pf(0)-f'(0);$ $f^{(n)}(t)\to P^nF(P)-P^{n-1}f(0)-P^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$	*дифференцирование изображения* $F'(P)\leftarrow -tf(t);$ $F^{(n)}(P)\leftarrow(-1)^n t^n f(t)$
интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\to\dfrac{F(P)}{P}$	*интегрирование изображения* $\int\limits_P^\infty F(P)dP\leftarrow\dfrac{f(t)}{t}$
смещение в области оригиналов $f(t-\tau)\to e^{-P\tau}F(P),\ \tau>0$	*смещение в области изображений* $F(P-P_0)\leftarrow e^{P_0t}f(t)$
теорема подобия $f(\omega t)\to\dfrac{1}{\omega}F(\dfrac{P}{\omega}),\quad \varpi>0$	*теорема о свертке оригиналов* $F_1(P)F_2(P)\leftarrow\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=f_1(t)*f_2(t)$

формула разложения

$$f(t)=\sum_k \underset{P=P_k}{res}F(P)e^{Pt}$$

табличные соотношения

$$1\to\frac{1}{P};\quad e^{\alpha t}\to\frac{1}{P-\alpha};\quad \sin\omega t\to\frac{\omega}{P^2+\omega^2};\quad \cos\omega t\to\frac{P}{P^2+\omega^2};\quad t^n\to\frac{n!}{P^{n+1}};\quad sh\omega t\to\frac{\omega}{P^2-\omega^2};\quad ch\omega t\to\frac{P}{P^2-\omega^2}$$

изображение кусочно – линейной функции

$$F(P)=\sum_k e^{-P\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{P}+\frac{\beta_k}{P^2}\right),$$

τ_k – *точки разрыва* $f(t)$ *или* $f'(t)$,

$\alpha_k=a_{k(справа)}-b_{k(слева)}$ – *скачки* $f(t)$,

$\beta_k=tg\gamma_{k(справа)}-tg\delta_{k(слева)}$ – *скачки* $f'(t)$

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений формулами Дюамеля

$$a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...a_nx(t)=f(t);\quad x(0)=x'(0)=...=x^{(n-1)}(0)=0.$$

$$а)\ a_0x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+...a_nx(t)=1\Rightarrow x_1(t);$$

$$б)\ x(t)=\int\limits_0^t x_1'(\tau)f(t-\tau)d\tau,\quad или\quad x(t)=\int\limits_0^t x_1'(t-\tau)f(\tau)d\tau,\quad или$$

$$x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)d\tau,\quad или\quad x(t)=f(0)x_1(t)+\int\limits_0^t f'(t-\tau)x_1(\tau)d\tau$$

Устранимая и.о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=const$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=0$
Простой полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)=const\ne0$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)$; $\quad\underset{z=z_0}{res}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$
m-кратный полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)^m=const\ne0$	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-z_0)^m)$
Существенно о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ *не существует*	$\underset{z=z_0}{res}f(z)=c_{-1}$ *из разложения* $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$; $\underset{z=\infty}{res}f(z)=-c_{-1}, f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_nz^n, \lvert z\rvert>R$