§ Интеграл от функции комплексного переменного

Определение интеграла от ФКП	**Предел интегральной суммы Римана** $\sigma_n = \sum_{m=1}^{n} f(t_m)\Delta z_m$ для функции $f(z)$ по кривой AB, если он не зависит ни от способа разбиения кривой AB на элементарные дуги , ни от способа выбора точек t_m на каждой элементарной дуге, при условии, что $n \to \infty$, $\lambda = \max\lvert\Delta z_m\rvert \to 0$, **называют интегралом** от функции $f(z)$ по кривой AB и обозначают $\int\limits_{AB} f(z)dz$.

Теорема о связи криволинейных интегралов и интеграла от ФКП	Если действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывны на кусочно-гладкой кривой AB, то интеграл от функции $f(z)$ по кривой AB равен сумме двух криволинейных интегралов второго рода от действительных функций: $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{AB} udx - vdy + i\int\limits_{AB} vdx + udy$

Следствие	Если кривая AB задана **параметрически** дифференцируемыми функциями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 < t < t_2$, **то** $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$.

§ Интеграл от аналитических функций

1. Теорема Коши для односвязной области. Независимость интеграла от пути интегрирования

Теорема Коши для односвязной области	Если функция $f(z)$ **аналитична** в односвязной области D, то **интеграл** от этой функции вдоль всякого **замкнутого контура** C, целиком лежащего в D, равен **нулю**.

Следствие	Если функция $f(z)$ **аналитична** в односвязной области D, то интеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$ **не зависит от формы пути интегрировани**я AB для любых точек A и B из D.

2. Существование первообразной для аналитической функции. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема существования первообразной ФКП	Всякая **аналитическая** в односвязной области D функция $f(z)$ **имеет** в этой области **первообразную** функцию $F(z)$: $F'(z) = f(z)$.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница)	Если $f(z)$ − **аналитическая** в односвязной области D функция, то для любых точек z_1 и z_2 этой области справедлива **формула Ньютона-Лейбница**: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$, где $F(z)$ − любая первообразная для $f(z)$, а интегрирование ведётся по любой кривой, целиком лежащей в области D и соединяющей точки z_1 и z_2.

3. Теорема Коши для многосвязной области

Теорема Коши для многосвязной области	Пусть C − замкнутый кусочно-гладкий контур и $C_1, C_2, ..., C_n$ − контуры, расположенные внутри C и вне каждого из них. Если $f(z)$ аналитична в области, заключённой между контуром C, контурами $C_1, C_2, ..., C_n$, и на всех этих контурах, то $\oint_C f(z)dz = \sum_{m=1}^{n} \oint_{C_m} f(z)dz$, причём контуры обходятся в одинаковом направлении (например, против хода часовой стрелки – положительном).

§ Следствия теоремы Коши для многосвязной области (интегральная формула Коши, производные высших порядков от аналитической функции)

Теорема (интегральная формула Коши)	Пусть область D ограничена кусочно-гладким контуром C. Если $f(z)$ аналитична в области D и на контуре C, то имеет место интегральная формула Коши $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0}$, где z_0 − любая точка внутри области D.

Определение интеграла типа Коши	Пусть дана кусочно-гладкая кривая C и на ней задана непрерывная функция $f(z)$. Интеграл вида $F(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(z)dz}{z-z_0}$, где z_0 − любая точка вне кривой C, называется интегралом типа Коши.

Теорема (существования производных всех порядков аналитической функции)	Функция $F(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(z)dz}{z-z_0}$, определённая интегралом типа Коши, аналитична в любой конечной точке z_0, не лежащей на кривой C. Она обладает производными всех порядков, причём $F^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$.

Следствие	Любая аналитическая в замкнутой области D функция $f(z)$ обладает внутри этой области производными всех порядков, причём эти производные можно представить формулой $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где C − граница области D.

§ Нули аналитической функции (НАФ)

Определение НАФ	Точка z_0 называется **нулём** функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Определение НАФ кратности m	Точка z_0 называется **нулём кратности** m функции $f(z)$, если $f(z_0)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ − аналитическая в точке z_0 функция, причём $\varphi(z_0)\neq 0$.

Теорема о ряде Тейлора в окрестности НАФ кратности m	Точка z_0 является нулём кратности m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда ряд Тейлора в окрестности этой точки имеет вид: $f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\ldots \quad , \quad a_m\neq 0$.

Следствие	Если $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0, \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$, то точка z_0 является нулём кратности m функции $f(z)$.

Теорема об изолированности нулей	Если точка z_0 является нулём кратности m **аналитической** функции $f(z)$, то существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z)$ не имеет других нулей.

Определение ИОТ и правильной точки	Точка z_0 называется **особой** для функции $f(z)$, если **функция** в этой точке **не является аналитической**. Точка z_0 называется **изолированной особой,** если эта точка – **единственная особая** в некоторой окрестности точки z_0. Точка, в которой функция **аналитична**, называется **правильной.**

Теорема о радиусе сходимости ряда Тейлора	**Радиус сходимости** ряда Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ для функции $f(z)$ равен **расстоянию** от центра сходимости z_0 **до ближайшей изолированной особой точки** функции $f(z)$.

§ Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана

Определение ряда Лорана	Рядом Лорана называется ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n =$ $= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, где ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ называют **правильной частью** ряда Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$ называют **главной частью** ряда Лорана.

Теорема о представлении функции рядом Лорана	Всякая функция, аналитическая в кольце $r < \lvert z-z_0 \rvert < R$, может быть представлена в этом кольце рядом Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, коэффициенты a_n которого вычисляются по формулам $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\gamma} \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, причём C_γ − любая окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце $r < \lvert z-z_0 \rvert < R$.

Теорема единственности	Если ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ сходится в кольце $r < \lvert z-z_0 \rvert < R$, то его коэффициенты a_n находятся единственным образом по формулам $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где C_γ − любая окружность с центром в точке z_0, лежащая в кольце $r < \lvert z-z_0 \rvert < R$.

§ Ряд Лорана в окрестности бесконечно удалённо точки

Определение ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённо точки	Ряд Лорана по степеням z: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, сходящийся к функции $f(z)$ в кольце $R < \lvert z \rvert < \infty$, называется рядом Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$ называют **правильной частью** ряда Лорана, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ называют **главной частью** ряда Лорана.

§ Классификация изолированных особых точек (ИОТ)

Классификация ИОТ	Изолированная особая точка z_0, $(\lvert z_0 \rvert < \infty)$ функции $f(z)$ называется **устранимой** особой точкой, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = A, \quad \lvert A \rvert < \infty$, **полюсом**, если $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, **существенно особой** точкой, если $\lim_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Классификация изолированных бесконечно удалённых точек БУТ	Точка ∞ называется **ИОТ** для функции $f(z)$, если существует внешность круга $\lvert z \rvert > R$, в котором функция $f(z)$ не имеет других особых точек. При этом БУТ ∞ называется **устранимой особой точкой**, если $\lim_{z \to \infty} f(z) = A, \quad \lvert A \rvert < \infty$, **полюсом**, если $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$, **существенно особой** точкой, если $\lim_{z \to \infty} f(z)$ не существует.

§ Ряд Лорана в окрестности устранимой особой точки (УОТ)

Критерий для УОТ	Для того, чтобы точка z_0 была **устранимой** особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана в окрестности этой точки **не содержал главной части**, т.е. ряд Лорана имел вид: $f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$. (Для БУТ ∞: $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$).

Замечание. Устранимую особую точку можно «устранить», доопределив функцию $f(z)$ по непрерывности, положив $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

§ Ряд Лорана в окрестности полюса

Теорема (о связи нулей и полюсов функций)	Функция $f(z)$, аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0: $0 < \lvert z - z_0 \rvert < \delta$, имеет в точке z_0 полюс тогда и только тогда, когда функция $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$, не равна тождественно нулю в этой окрестности, аналитична в точке z_0 и имеет в этой точке ноль: $g(z_0) = 0$.
Определение порядка полюса	**Порядок нуля** функции $g(z)$ называется **порядком полюса** функции $f(z)$.

Теорема об *m* – кратном полюсе	Точка z_0 является m –кратном полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\psi(z)$ – аналитическая в точке z_0 функция, и $\psi(z_0) \neq 0$.

Теорема о ряде Лорана в окрестности полюса	Для того, чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была **полюсом**, необходимо и достаточно, чтобы **главная часть ряда Лорана** функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала лишь **конечное число членов**, т.е. ряд Лорана имел вид: $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, причём старшая отрицательная степень $(z-z_0)$, входящая в это разложение, совпадает с порядком полюса m. (Для БУТ ∞: $f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$).

§ Ряд Лорана в окрестности существенно особой точки

Теорема о ряде Лорана в окрестности существенно особой точки	Для того, чтобы изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ была **существенно особой точкой**, необходимо и достаточно, чтобы **главная часть ряда Лорана** функции $f(z)$ в окрестности z_0 содержала **бесконечное число членов**.

Теорема Сохоцкого	Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа *A* (конечного или нет) можно найти такую последовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к z_0, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

§ Вычеты

Определение вычета	**Вычетом** функции $f(z)$ относительно точки z_0 называется интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C f(z)dz$, если выполняются следующие условия: 1) точка z_0 лежит внутри контура *C* и обходится в положительном направлении (остаётся слева при обходе контура); 2) контур *C* не содержит внутри себя особых точек, отличных от z_0; 3) на контуре *C* нет особых точек. Обозначают вычет так: $res(f(z); z = z_0) = \underset{z=z_0}{res} f(z) = Выч(f(z); z = z_0) = \underset{z=z_0}{\mathrm{Re}\, s} f(z)$.

Теорема о связи вычета с коэффициентом a_{-1} ряда Лорана	Вычет функции $f(z)$ относительно конечной точки z_0 равен **коэффициенту** a_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности $0 < \|z - z_0\| < \delta$ точки z_0.

§ Основная теорема о вычетах

Основная теорема о вычетах	Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то $\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{m=1}^{n} \underset{z=z_m}{res}\, f(z)$, где любой замкнутый контур C лежит в области D, обходится в положительном направлении и содержит внутри себя точки $z_1, z_2, ..., z_n$.
Следствие	Пусть функция $f(z)$ **аналитична во всей расширенной** комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек. Тогда **сумма всех вычетов** функции $f(z)$, включая вычет относительно бесконечно удалённой точки, равна **нулю**: $\sum\limits_{m=1}^{n} \underset{z=z_m}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0$.

Устранимая и.о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = const$	$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = 0$.
Простой полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = const \neq 0$	1. $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$; 2. $\underset{z=z_0}{res} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$; 3. $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = a_{-1}$ *из разложения* $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
m-кратный полюс z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m = const \neq 0$	1. $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-z_0)^m)$; 2. $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = a_{-1}$ *из разложения* $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.
Существенно о.т. z_0: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *не существует*	$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = a_{-1}$ *из разложения* $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$;.
Бесконечно удалённая точка БУТ ∞	$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -a_{-1}$, $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, $\|z\| > R$. Формулы Михаила Романовича Куваева, профессора Томского государственного университета: в устранимой особой точке. $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} z^2 f'(z)$; для *m-кратного полюса* *в БУТ* ∞: $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -a_{-1} = \dfrac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim\limits_{z\to\infty}(z^{m+2} f^{(m+1)}(z))$.

§ Приложения вычетов к вычислению интегралов

	Интеграл	Условия	Вычисление
1	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 2,$ R(z) — непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)$ z_k — все полюсы функции $R(z)$ в верхней полуплоскости
2	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 1,$ R(z) — непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)e^{i\lambda z},\quad \lambda>0$ z_k — все полюсы функции $R(z)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости
3	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\lambda x dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 1,$ R(z) — непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)cos\lambda x dx = \mathrm{Re}(2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)e^{i\lambda z}),\quad \lambda>0$ z_k — все полюсы функции $R(z)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости
4	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx$	$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},\ n-m\ge 1,$ $R(z)$ — непрерывна на всей действительной оси	$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\lambda x dx = \mathrm{Im}(2\pi i\sum_k \underset{z=z_k}{res} R(z)e^{i\lambda z}),\quad \lambda>0$ z_k — все полюсы функции $R(z)e^{i\lambda z}$ в верхней полуплоскости
5	$\int_{0}^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx$	$R(x)$ — непрерывна внутри промежутка интегрирования	$z=e^{ix}, \sin x=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}), \cos x=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), dx=\frac{dz}{iz},\quad \int_0^{2\pi} R(\sin x,\cos x)dx = \oint_{\lvert z\rvert=1} F(z)dz$

Теорема об интегрировании $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$	Пусть функция $f(z)$ аналитична всюду в верхней полуплоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и аналитична на вещественной оси. Если при больших $\lvert z\rvert$ и на вещественной оси выполняется неравенство $\lvert f(z)\rvert < \frac{c}{\lvert z\rvert^{1+\delta}},\quad \delta>0,\quad c=const,$ то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ сходится и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_m \underset{z=z_m}{res} f(z)$, где z_m – все изолированные особые точки функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости, т.е. $\mathrm{Im}\, z_m>0$.