

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, y(1) = e.$
13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$
14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4.$
15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}.$
16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$
17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3.$
18. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1.$
19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1.$
20. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}.$
21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}.$
22. $y' + xy = -x^3, y(0) = 3.$
23. $y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1.$
24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1.$
25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}.$
26. $y' - y \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3.$
27. $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}.$
28. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$
29. $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, y(0) = 0.$
30. $y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1.$
31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1) = 1.$

Задача 5. Решить задачу Коши.

1. $y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, y|_{x=e} = 2.$
2. $(y^4 e^y + 2x)y' = y, y|_{x=0} = 1.$
3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, y|_{x=1} = e.$
4. $2(4y^2 + 4y - x)y' = 1, y|_{x=0} = 0.$
5. $(\cos 2y \cos^2 y - x)y' = \sin y \cos y, y|_{x=1/4} = \pi/3.$
6. $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos^2 y, y|_{x=\pi} = \pi/4.$
7. $e^{y^2}(dx - 2xy dy) = y dy, y|_{x=0} = 0.$
8. $(104y^3 - x)y' = 4y, y|_{x=8} = 1.$
9. $dx + (xy - y^3) dy = 0, y|_{x=-1} = 0.$
10. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x)y' = y, y|_{x=16} = \pi/4.$
11. $8(4y^3 + xy - y)y' = 1, y|_{x=0} = 0.$
12. $(2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy, y|_{x=4} = e^2.$

13. $2(x + y^4)y' = y, y|_{x=-2} = -1.$
14. $y^3(y - 1) dx + 3xy^2(y - 1) dy = (y + 2) dy, y|_{x=1/4} = 2.$
15. $2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, y|_{x=e} = 1.$
16. $(xy + \sqrt{y}) dy + y^2 dx = 0, y|_{x=-1/2} = 4.$
17. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2 \sin^2 y + 2x) dy, y|_{x=-1/2} = \pi/4.$
18. $(y^2 + 2y - x)y' = 1, y|_{x=2} = 0.$
19. $2y\sqrt{y} dx - (6x\sqrt{y} + 7) dy = 0, y|_{x=-4} = 1.$
20. $dx = (\sin y + 3 \cos y + 3x) dy, y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$
21. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x)y' = \sin 2y, y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$
22. $\operatorname{ch} y dx = (1 + x \operatorname{sh} y) dy, y|_{x=1} = \ln 2.$
23. $(13y^3 - x)y' = 4y, y|_{x=5} = 1.$
24. $y^2(y^2 + 4) dx + 2xy(y^2 + 4) dy = 2 dy, y|_{x=\pi/8} = 2.$
25. $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = \frac{y}{2}, y|_{x=2} = 1.$
26. $(2xy + \sqrt{y}) dy + 2y^2 dx = 0, y|_{x=-1/2} = 1.$
27. $y dx + (2x - 2 \sin^2 y - y \sin 2y) dy = 0, y|_{x=3/2} = \pi/4.$
28. $2(y^3 - y + xy) dy = dx, y|_{x=-2} = 0.$
29. $(2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y) dy = dx, y|_{x=0} = \pi.$
30. $4y^2 dx + (e^{\frac{1}{y}} + x) dy = 0, y|_{x=e} = \frac{1}{2}.$
31. $dx + (2x + \sin 2y - 2 \cos^2 y) dy = 0, y|_{x=-1} = 0.$

Задача 6. Найти решение задачи Коши.

1. $y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 1.$
2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = \frac{1}{2}.$
3. $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2.$
4. $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, y(0) = 1.$
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1.$
6. $2(y' + xy) = (1 + x)e^{-x}y^2, y(0) = 2.$
7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3.$
8. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1.$
9. $y' + 4x^3y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1.$
10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = -1.$
11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1.$
13. $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$

14. $3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3.$
15. $y' - y = 2xy^2, y(0) = \frac{1}{2}.$
16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
17. $y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2}.$
18. $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1.$
19. $2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x}y^{-1}, y(0) = 2.$
20. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1.$
21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2}.$
22. $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2.$
23. $y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1.$
24. $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3 \cos x)y^{-1}, y(0) = 1.$
25. $y' - y = xy^2, y(0) = 1.$
26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 2.$
27. $y' + y = xy^2, y(0) = 1.$
28. $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, y(1) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}.$
29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 2.$
30. $y' - y \operatorname{tg} x = -\left(\frac{2}{3}\right)y^4 \sin x, y(0) = 1.$
31. $xy' + y = xy^2, y(1) = 1.$

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$
2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$
3. $(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$
4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right) dx - \left(2x - \frac{1}{x}\right) dy = 0.$
5. $y^2 + y \sec^2 x dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$
6. $(3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0.$
7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$
8. $(\sin 2x - 2 \cos(x + y)) dx - 2 \cos(x + y) dy = 0.$
9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right) dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right) dy = 0.$
10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$
11. $\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right) dy = 0.$
12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dy = 0.$
13. $\frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$
14. $\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$

15. $\frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$
16. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$
17. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right) dy = 0.$
18. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right) dx - \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0.$
19. $e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0.$
20. $(y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0.$
21. $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0.$
22. $(5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0.$
23. $(\cos(x + y^2) + \sin x) dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0.$
24. $(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$
25. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$
26. $\left(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right) dy = 0.$
27. $\frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2} = 0.$
28. $2(3xy^2 + 2x^3) dx + 3(2x^2 y + y^2) dy = 0.$
29. $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2 y) dy = 0.$
30. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0.$
31. $\frac{x dx + y dy + (x dy - y dx)}{(x^2 + y^2)} = 0.$

Задача 8. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M .

- | | |
|---|--|
| 1. $y' = y - x^2, M(1, 2).$ | 14. $y' = xy, M(0, 1).$ |
| 2. $yy' = -2x, M(0, 5).$ | 15. $yy' = -\frac{x}{2}, M(4, 2).$ |
| 3. $y' = 2 + y^2, M(1, 2).$ | 16. $2(y + y') = x + 3, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$ |
| 4. $y' = \frac{2x}{3y}, M(1, 1).$ | 17. $y' = x + 2y, M(3, 0).$ |
| 5. $y' = (y - 1)x, M\left(1, \frac{3}{2}\right).$ | 18. $xy' = 2y, M(1, 3).$ |
| 6. $yy' + x = 0, M(-2, -3).$ | 19. $3yy' = x, M(-3, -2).$ |
| 7. $y' = 3 + y^2, M(1, 2).$ | 20. $y' = y - x^2, M(-3, 4).$ |
| 8. $xy' = 2y, M(2, 3).$ | 21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,$
$M(-2, 1).$ |
| 9. $y'(x^2 + 2) = y, M(2, 2).$ | 22. $y' = x^2 - y, M\left(2, \frac{3}{2}\right).$ |
| 10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, M(2, 1).$ | 23. $y' = y - x, M(2, 1).$ |
| 11. $y' = y - x, M\left(\frac{9}{2}, 1\right).$ | 24. $yy' = -x, M(2, 3).$ |
| 12. $y' = x^2 - y, M\left(1, \frac{1}{2}\right).$ | 25. $y' = y - x, M(4, 2).$ |
| 13. $y' = xy, M(0, -1).$ | 26. $3yy' = x, M(1, 1).$ |

27. $y' = x^2 - y$, $M(0, 1)$.
 28. $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$, $M(1, 3)$.
 29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$,
 $M(-2, -1)$.

30. $y' = x(y - 1)$, $M(1, \frac{1}{2})$.
 31. $y' = x + 2y$, $M(1, 2)$.

Задача 9. Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M нормальный вектор \overline{MN} с концом на оси Oy имеет длину, равную a , и образует острый угол с положительным направлением оси Oy .

1. $M_0(15, 1)$, $a = 25$.
 2. $M_0(12, 2)$, $a = 20$.
 3. $M_0(9, 3)$, $a = 15$.
 4. $M_0(6, 4)$, $a = 10$.
 5. $M_0(3, 5)$, $a = 5$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее нормали, заключенный между осями координат, делится точкой линии в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

6. $M_0(1, 1)$, $a : b = 1 : 2$.
 7. $M_0(-2, 3)$, $a : b = 1 : 3$.
 8. $M_0(0, 1)$, $a : b = 2 : 3$.
 9. $M_0(1, 0)$, $a : b = 3 : 2$.
 10. $M_0(2, -1)$, $a : b = 3 : 1$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной между точкой касания и осью Oy делится в точке пересечения с осью абсцисс в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

11. $M_0(2, -1)$, $a : b = 1 : 1$.
 12. $M_0(1, 2)$, $a : b = 2 : 1$.
 13. $M_0(-1, 1)$, $a : b = 3 : 1$.
 14. $M_0(2, 1)$, $a : b = 1 : 2$.
 15. $M_0(1, -1)$, $a : b = 1 : 3$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 , если отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания в отношении $a : b$ (считая от оси Oy).

16. $M_0(1, 2)$, $a : b = 1 : 1$.
 17. $M_0(2, 1)$, $a : b = 1 : 2$.
 18. $M_0(1, 3)$, $a : b = 2 : 1$.
 19. $M_0(2, -3)$, $a : b = 3 : 1$.
 20. $M_0(3, -1)$, $a : b = 3 : 2$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overline{MN} с концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox , обратно пропорциональную абсциссе точки M . Коэффициент пропорциональности равен a .

21. $M_0(1, e)$, $a = -\frac{1}{2}$.
 22. $M_0(2, e)$, $a = -2$.
 23. $M_0(-1, \sqrt{e})$, $a = -1$.
 24. $M_0(2, \frac{1}{e})$, $a = 2$.
 25. $M_0(1, \frac{1}{e^2})$, $a = \frac{1}{4}$.

Найти линию, проходящую через точку M_0 и обладающую тем свойством, что в любой ее точке M касательный вектор \overline{MN} с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy , равную a .

26. $M_0(1, 2)$, $a = -1$.
 27. $M_0(1, 4)$, $a = 2$.
 28. $M_0(1, 5)$, $a = -2$.
 29. $M_0(1, 3)$, $a = -4$.
 30. $M_0(1, 6)$, $a = 3$.
 31. $M_0(1, 1)$, $a = 1$.

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'''x \ln x = y''$.
 2. $xy''' + y'' = 1$.
 3. $2xy''' = y''$.
 4. $xy''' + y'' = x + 1$.
 5. $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$.
 6. $x^2y'' + xy' = 1$.
 7. $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$.
 8. $x^3y''' + x^2y'' = 1$.
 9. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$.
 10. $y''' \operatorname{cth} 2x = 2y''$.
 11. $x^4y'' + x^3y' = 1$.
 12. $xy''' + 2y'' = 0$.
 13. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$.
 14. $x^5y''' + x^4y'' = 1$.
 15. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$.
 16. $xy''' + y'' + x = 0$.
 17. $\operatorname{th} x \cdot y^{IV} = y'''$.
 18. $xy''' + y'' = \sqrt{x}$.
 19. $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$.
 20. $y''' \operatorname{tg} 5x = 5y''$.
 21. $y''' \operatorname{th} 7x = 7y''$.
 22. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$.
 23. $\operatorname{cth} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 0$.
 24. $(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$.
 25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.
 26. $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.