ББК 22.16
К 89

Кузнецов Л. А.
К 89 Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 8-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2006. — 240 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 5-8114-0574-X

Пособие содержит индивидуальные задания для студентов технических вузов по курсу высшей математики (по 31 варианту в каждой задаче) и предназначено для обеспечения самостоятельной работы по освоению курса. Каждое задание содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть. Книга содержит раздел, посвященный уравнениям математической физики.

ББК 22.16

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа учащегося. Система типовых расчетов (ТР), как показал опыт ряда вузов нашей страны, активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса высшей математики. Применение системы ТР рекомендовано программой по высшей математике для втузов.

Каждый ТР содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть — задачи. Теоретические вопросы и теоретические упражнения являются общими для всех студентов, задачи для каждого студента группы индивидуальные (каждая задача составлена в 31 варианте).

Выполнение студентами ТР контролируется преподавателем. Предварительно проверяется правильность решения теоретических упражнений и задач. Завершающим этапом является защита ТР. Студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения теоретических упражнений и задач, решать задачи аналогичного типа.

Настоящий сборник отражает опыт работы Московского энергетического института, в котором система типовых расчетов по высшей математике успешно используется начиная с 1971/72 учебного года. Наряду с традиционными текущими заданиями по математике студенты МЭИ в течение каждого семестра выполняют ТР по разделам, изучаемым в семестре. Задачи сдаются студентами на проверку частями по мере изучения курса. Защита ТР осуществляется в письменной форме во время занятий по расписанию (как правило, защита

12) Линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Структура общего решения.

13) Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

14) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).

15) Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).

16) Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод подбора.

§ 5.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть y_1 — решение дифференциального уравнения $L[y] = 0$. Показать, что введение новой искомой функции $u = y/y_1$ приводит к дифференциальному уравнению, допускающему понижение порядка.

2) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки перегиба графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$.

3) Написать уравнение линии, на которой могут находиться точки графиков решений уравнения $y' = f(x, y)$, соответствующие максимумам и минимумам.

Как отличить максимум от минимума?

4) Линейное дифференциальное уравнение останется линейным при замене независимой переменной $x = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ произвольная, но дифференцируемая достаточное число раз. Доказать это утверждение для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

5) Доказать, что линейное дифференциальное уравнение остается линейным при преобразовании искомой функции

$$y = \alpha(x)z + \beta(x).$$

Здесь z — новая искомая функция, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — произвольные, но достаточное число раз дифференцируемые функции.

6) Составить общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$, если известно ненулевое частное решение y_1 этого уравнения.

7) Показать, что произвольные дважды дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного дифференциального уравнения

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

8) Составить однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

Показать, что функции x и x^2 линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Убедиться в том, что определитель Вронского для этих функций равен нулю в точке $x = 0$. Почему это не противоречит необходимому условию линейной независимости системы решений линейного однородного дифференциального уравнения?

9) Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, если известны три линейно-независимые частные его решения y_1, y_2 и y_3.

10) Доказать, что для того чтобы любое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяло условию $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части.

§ 5.3. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$).

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
3. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$.
4. $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$.
5. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$.
6. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$.
7. $(e^{2x}+5)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0$.
8. $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$.
9. $6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2y\,dy - 2xy^2\,dx$.
10. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$.

11. $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0.$

12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

13. $2x\,dx - 2y\,dy = x^2y\,dy - 2xy^2\,dx.$

14. $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0.$

15. $(e^x+8)\,dy - ye^x\,dx = 0.$

16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$

17. $6x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$

18. $y\ln y + xy' = 0.$

19. $(1+e^x)y' = ye^x.$

20. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

21. $6x\,dx - 2y\,dy = 2yx^2\,dy - 3xy^2\,dx.$

22. $y(1+\ln y) + xy' = 0.$

23. $(3+e^x)yy' = e^x.$

24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0.$

25. $x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx.$

26. $\sqrt{5+y^2}\,dx + 4(x^2y+y)\,dy = 0.$

27. $(1+e^x)yy' = e^x$

28. $3(x^2y+y)\,dy + \sqrt{2+y^2}\,dx = 0.$

29. $2x\,dx - y\,dy = yx^2\,dy - xy^2\,dx.$

30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0.$

31. $20x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y\,dy - 5xy^2\,dx.$

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$
2. $xy' = \frac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$
3. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$
4. $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y.$
5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3.$
6. $xy' = \frac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$
7. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$
8. $xy' = 2\sqrt{x^2+y^2} + y.$
9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4.$
10. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$
11. $y' = \frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$
12. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2} + y.$
13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6.$
14. $xy' = \frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}.$
15. $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}.$
16. $xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y.$
17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8.$
18. $xy' = \frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}.$
19. $y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}.$
20. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y.$

21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$
22. $xy' = \frac{3y^3+12yx^2}{2y^2+6x^2}.$
23. $y' = \frac{x^2+xy-3y^2}{x^2-4xy}.$
24. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2} + y.$
25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$
26. $xy' = \frac{3y^3+14yx^2}{2y^2+7x^2}.$
27. $y' = \frac{x^2+xy-5y^2}{x^2-6xy}.$
28. $xy' = 4\sqrt{x^2+y^2} + y.$
29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$
30. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y.$
31. $y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$
2. $y' = \frac{x+y-2}{2x-2}.$
3. $y' = \frac{3y-x-4}{3x+3}.$
4. $y' = \frac{2y-2}{x+y-2}.$
5. $y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}.$
6. $y' = \frac{2x+y-3}{x-1}.$
7. $y' = \frac{x+7y-8}{9x-y-8}.$
8. $y' = \frac{x+3y+4}{3x-6}.$
9. $y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}.$
10. $y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}.$
11. $y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}.$
12. $y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}.$
13. $y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}.$
14. $y' = \frac{4y-8}{3x+2y-7}.$
15. $y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}.$
16. $y' = \frac{y-2x+3}{x-1}.$
17. $y' = \frac{x+2y-3}{x-1}.$
18. $y' = \frac{3x+2y-1}{x+1}.$
19. $y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}.$
20. $y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}.$
21. $y' = \frac{x+y+2}{x+1}.$
22. $y' = \frac{2x+y-3}{4x-4}.$
23. $y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}.$
24. $y' = \frac{y}{2x+2y-2}.$
25. $y' = \frac{x+5y-6}{7x-y-6}.$
26. $y' = \frac{x+y-4}{x-2}.$
27. $y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}.$
28. $y' = \frac{3y-2x+1}{3x+3}.$
29. $y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}.$
30. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}.$
31. $y' = \frac{y+2}{2x+y-4}.$

Задача 4. Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0.$
2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\ y(\pi/2) = 0.$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ y(0) = 0.$
4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x,\ y(\pi/4) = \frac{1}{2}.$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2}.$
6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1),\ y(0) = 1.$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y(\pi/2) = 1.$
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1.$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0) = \frac{2}{3}.$
11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5,\ y(2) = 4.$