ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
1	Уравнения с разделенными переменными	$M(x)dx + N(y)dy = 0$	Функция при dx зависит только от x, функция при dy зависит только от y.	Проинтегрировать каждое слагаемое в уравнении.	Общий интеграл $\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$
2	Уравнения с разделяющимися переменными	$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ или $y' = f_1(x)f_2(y)$; $(y' = \frac{dy}{dx})$.	Функции при дифференциалах распадаются на произведения функций, зависящих только от одной из переменных.	Разделить уравнение на произведение $N_1(y)M_2(x) \neq 0$.	Уравнение с разделенными переменными и общий интеграл: $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$
3	Однородные уравнения	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ или $y' = f(\frac{y}{x})$.	Уравнение не изменяет своего вида при замене x и y на λx и λy.	Сделать замену переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$, $dy = tdx + xdt$.	Уравнение с разделяющимися переменными $t'x = f(t) - t$.
4	Уравнения, приводящиеся к однородным	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$;	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.	$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$	Однородное уравнение $\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$;
5	Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными	$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$;	Производная равна отношению линейных комбинаций переменных $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.	$z = a_1x + b_1y$ $z' = a_1 + b_1y'$	Уравнение с разделяющимися переменными $\frac{z' - a_1}{b_1} = \frac{z + c_1}{kz + c_2}; k = \frac{a_2}{a_1}$
6	Уравнения Лагранжа	$y = x\varphi(y') + \psi(y')$	φ, ψ - известные функции от y'	$p = y'$; линейное ур-ние отн-но x	$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$
7	Уравнения Клеро	$y = xy' + \psi(y')$	ψ - известная функция от y'	$y = cx + \psi(c)$	Общее решение

Дифференциальные уравнения первого порядка

№	Тип дифф. уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения	Результат применения метода
8	Линейные уравнения	$y' + p(x)y = q(x)$ $x' + p(y)x = q(y)$	Искомая функция и её производная входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются.	**1**. Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ **2**.Метод вариации произвольной постоянной $а) q(x) = 0, \quad y = y_0(c, x);$ $б) \; y = y_0(c(x), x), \quad q(x) \neq 0$	**1.** $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$ Система двух ДУ с разделяющимися переменными **2**.ДУ с разделяющимися переменными
9	Уравнения Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^m$ или $x' + p(y)x = q(y)x^m$.	Левая часть уравнения – такая же, как у линейного уравнения, а правая отличается на сомножитель: искомую функцию в степени *m*.	**1.** Метод Бернулли $y = uv$; $y' = u'v + uv'$ **2.** $z = y^{1-m}$, $z' = (1-m)y^{-m}y'$	**1.** Система двух ДУ с разделяющимися переменными $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x)u^m v^m. \end{cases}$ **2.** Линейное уравнение $z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$
10	Уравнения в полных дифференц иалах	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	Условие полного дифференциала $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.	**1.** $\begin{cases} u = \int M(x, y)dx + \varphi(y) = c, \\ (\int M(x, y)dx)'_y + \varphi'(y) = N(x, y) \end{cases}$. **2.** $u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, y)dy = c$ $\quad {}_{x = const \neq x_0}$ или $u = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = c$ $\quad {}_{y = const \neq y_0}$	Общий интеграл.
11	Приводящи еся к уравнению в полных диф.	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	$\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}$	$F(x) = \dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x});$ $W(y) = \dfrac{1}{M}(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y})$	$\mu(x) = e^{\int F(x)dx}$; $\mu(y) = e^{\int W(y)dy}$ $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифф-лах

Дифференциальные уравнения высших порядков

№	Тип уравнения	Вид уравнения	Признак уравнения	Метод решения уравнения
1	Допускает понижение порядка	$y^{(n)} = f(x)$	Ур-ние записано явно относительно старшей производной; в правой части ур-ния ф-ция зависит только от x.	Последовательное понижение порядка производной n-кратным интегрированием $y = \underbrace{\int\int...\int}_{n} f(x)\underbrace{dxdx...dx}_{n} + c_1\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n$
2	Допускает понижение порядка	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},...y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно искомой функции у и её первых производных до порядка *k-1* включительно	Понижение порядка уравнения на k единиц заменой переменной $y^{(k)} = p(x)$, $y^{(k+1)} = p^{/}(x),...., y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$.
3	Допускает понижение порядка	$F(y, y^{/},...y^{(n)}) = 0$	Уравнение не содержит явно независимой переменной x	Понижение порядка уравнения на единицу заменой переменной $y^{/} = p(y), y^{//} = p\dfrac{dp}{dy}, y^{///} = p(\dfrac{dp}{dy})^2 + p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$ и так далее.
4	Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициента ми (ЛОДУ)	$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y^{/} + a_n y = 0$	Искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются; правая часть уравнения равна нулю.	Нахождение корней характеристического уравнения $k^n + a_1k^{n-1} +,,,+ a_{n-1}k + a_n = 0$. Каждому действительному корню k кратности r характеристического уравнения соответствует r линейно независимых частных решений ЛОДУ: $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx},..., y_r = x^{r-1}e^{kx}$ Каждой паре комплексных корней $k = \alpha \pm i\beta$ кратности s хар-кого ур-ния соответствует $2s$ линейно нез-мых Ч.Р. ЛОДУ: $e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$ Если $s = 1$, то $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ОР ЛОДУ $y_0 = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$

Дифференциальные уравнения высших порядков

№	Тип ур-я	Вид уравнения	Признак ур-ия	Метод решения уравнения
5	Линейные неоднородные с постоянными коэффициентами (ЛНДУ).	$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$	Искомая функция и все её производные входят в уравнение в первой степени и между собой не перемножаются; функция в правой части уравнения зависит только от *x*.	**Метод вариации произвольных постоянных**. Интегрируются решения алгебраической системы линейных уравнений (АСЛУ) с неизвестными функциями $c_1'(x), c_2'(x),...c_n'(x)$ и фундаментальной системой частных решений ЛОДУ $y_1, y_2..., y_n$, *(f(x)=0)*. Решения АСЛУ можно найти методом Крамера: $\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2+...+c_n'y_n=0,\\ c_1'y_1'+c_2'y_2'+...+c_n'y_n'=0,\\ ....=0,\\ c_1'y_1^{(n-1)}+c_2'y_2^{(n-1)}+...+c_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases} \Rightarrow c_1'=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & y_2 & ... & y_n\\ 0 & y_2' & ... & y_n'\\ 0 & ... & ... & ...\\ f(x) & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & ... & y_n\\ y_1' & y_2' & ... & y_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}};$ $c_2'=\dfrac{\begin{vmatrix}y_1 & 0 & ... & y_n\\ y_1' & 0 & ... & y_n'\\ .... & 0 & ... & ...\\ y_1^{(n-1)} & f(x) & ... & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & ... & y_n\\ y_1' & y_2' & ... & y_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}};\ldots, c_n'=\dfrac{\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & ... & 0\\ y_1' & y_2' & ... & 0\\ .... & ... & ... & 0\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & f(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & ... & y_n\\ y_1' & y_2' & ... & y_n'\\ ... & ... & ... & ...\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}}.$ Общее решение ЛНДУ: $y=c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+...+c_n(x)y_n$.
$5'$	ЛНДУ	$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ $f(x)=e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)$	Правая часть специального вида	**Метод неопределенных коэффициентов**. Общее решение ЛНДУ получают как сумму общего решения y_0 соответствующего ЛОДУ и частного решения $y_н$ ЛНДУ: $y=y_0+y_н=y_0+x^se^{\alpha x}(U_w(x)\cos\beta x+V_w(x)\sin\beta x)$: $w=\max(m,l);\ s-кратность\,корня\ \alpha\pm\beta i\ хар-го\ ур-я$

Системы дифференциальных уравнений

№	Тип с-мы ур-й	Вид НСДУ	Признак НСДУ	Метод решения НСДУ
1	Нормальная система дифференциальных уравнений (НСДУ)	$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n);$ $y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n);$ .... $y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).$	Уравнения записаны явно относительно первой производной; функции в правой части уравнений зависят только от аргумента x и искомых функций $y_1, y_2, ..., y_n$.	**Метод исключения неизвестных**. Дифференцированием уравнений и выражением одних функций через другие НСДУ сводят к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. **Метод выделения интегрируемых комбинаций**. Получают из системы такие уравнения, которые можно проинтегрировать и найти первый интеграл системы. Если найдены n независимых первых интегралов НСДУ, то их совокупность дает общий интеграл этой системы. Для выделения интегрируемых комбинаций из НСДУ её записывают в так называемой симметрической форме: $\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dx}{1}$ и используют следующее свойство равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = ... = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ имеет место соотношение $\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n} = \gamma$ (*). Значения $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ подбираются таким образом, чтобы числитель в (*) был полным дифференциалом знаменателя или же числитель и знаменатель были равны нулю.

Системы дифференциальных уравнений

№	Тип системы	Вид системы	Признак системы	Метод решения системы
2	Нормальная линейная однородная система n-го порядка (НЛОС).	$y_1'(x) = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + ... + a_{1n}(x)y_n$, $y_2'(x) = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + ... + a_{2n}(x)y_n$, ... $y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + ... + a_{nn}(x)y_n$. Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций зависят от аргумента x.	Ур-я записаны явно отн-но первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	**Метод исключения неизвестных** (см. НСДУ). Фундаментальной системой решений НЛОС называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $Y_k(x) = (y_1^{(k)}(x), y_2^{(k)}(x), ..., y_n^{(k)}(x)), \quad k = 1,2,...,n$. Если $Y_k(x), \quad k = 1,2,...,n,$ – фундаментальная система решений ЛОС, то общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y_k(x)$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ -произвольные постоянные.
3а	Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n$, $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n$, ... $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n$. Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица из коэффициентов при искомых функциях.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	**Матричный метод**. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят различные корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $Y^{(\lambda)}(x)$. Общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$. При этом, если **а)** λ – действительный корень кратности 1 (один), то $Y^{(\lambda)}(x) = Y^{(\lambda)} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(\lambda)} \\ \xi_2^{(\lambda)} \\ ... \\ \xi_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} e^{\lambda x}$, где $Y^{(\lambda)}$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то есть $AY^{(\lambda)} = \lambda Y^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)} \neq 0$

Системы дифференциальных уравнений

3б	Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n$, $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n$, …………………………………………… $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n$. Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица из коэффициентов при искомых функциях.	Ур-я записаны явно от-но первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	**Матричный метод**. Из характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ находят различные корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ и для каждого корня λ (с учетом его кратности) определяют соответствующее ему частное решение $Y^{(\lambda)}(x)$. Общее решение имеет вид $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k Y^{(\lambda_k)}(x)$. Если **б)** λ – комплексный корень кратности 1 (один), тогда корнем характеристического уравнения является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\bar{\lambda})}(x)$ следует взять действительные частные решения $Y_1^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Re} Y^{(\lambda)}(x)$ и $Y^{(\lambda)}(x) = \operatorname{Im} Y^{(\lambda)}(x)$.
3в	Нормальная линейная однородная система n-го порядка с постоянными коэффициентами	$y_1'(x) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n$, $y_2'(x) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n$, …………………………………………… $y_n'(x) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n$. Коэффициенты линейных комбинаций искомых функций постоянны. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица из коэффициентов при искомых функциях.	Уравнения записаны явно относительно первых производных; правые части уравнений представляют собой линейные комбинации искомых функций.	**Матричный метод**. Если **в)** λ – корень кратности $r \geq 2$, то соответствующее этому корню решение системы ищут в виде вектора $Y^{(\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}x + ... + \alpha_1^{(r)}x^{r-1} \\ \alpha_2^{(1)} + \alpha_2^{(2)}x + ... + \alpha_2^{(r)}x^{r-1} \\ \\ \alpha_n^{(1)} + \alpha_n^{(2)}x + ... + \alpha_n^{(r)}x^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda x}$ (**), коэффициенты которого $\alpha_i^{(j)}, i = 1,...,n, j = 1,...,r$ определяются из системы линейных уравнений, получающихся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в результате подстановки вектора (**) в исходную систему.