

Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите и нарисуйте линии уровня скалярного поля $u = (x - y)^2$. Вычислите и начертите вектор $\text{grad } u$ в точках $A(-1, 1)$ и $B(1, 1)$.

2. Найдите линии уровня скалярного поля $u = e^{2x/(x^2 + y^2)}$ и нарисуйте линии уровня $u(x, y) = e$ и $u(x, y) = e^{1/2}$. Вычислите и начертите вектор $\text{grad } u$ в точках $A(1, 1)$, $B(2, 0)$, $C(1, -1)$.

3. Найдите и нарисуйте линии уровня скалярного поля $u = \min(x, y)$. Вычислите и начертите вектор $\text{grad } u$ в точках $A(2, 1)$ и $B(1, 2)$.

4. Найдите векторные линии:

$$\frac{ke}{r^3}$$

а) кулоновского поля $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$ точечного заряда e , находящегося в начале координат;

б) векторного поля $\mathbf{a} = [\mathbf{c} \mathbf{r}]$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$;

в) векторного поля $\mathbf{a} = -a^2 y \mathbf{i} + b^2 x \mathbf{j}$ (a и b — числа);

г) векторного поля $\mathbf{a} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$.

5. Вычислите производные скалярного поля $u = x^2 + y^2$ в точке $M(1, 1)$ по направлениям векторов $l_1 = \{1; 1\}$, $l_2 = \{0; 1\}$, $l_3 = \{-1; 1\}$. Найдите $\text{grad } u$ в точке M и сравните $|\text{grad } u|$ с найденными значениями производных по направлениям векторов l_1 , l_2 , l_3 .

6. Найдите градиент скалярного поля:

а) $u = x^3 y^2 z$ в точке $M(1, 2, 3)$;

б) $u = (x - y)(y - z)(z - x)$ в точках $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(3, 1, 2)$, $M_3(2, 3, 1)$;

в) $u = (x - 1)(y - 2)(z - 3)$ в точке $M(2, 3, 4)$.

7. В каких точках градиент скалярного поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$:

а) перпендикулярен оси Oz ; б) параллелен оси Oz ?

8. В каких точках градиент скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 2xy$:

а) перпендикулярен прямой $y = x$; б) равен нулю?

9. Найдите угол между градиентами скалярного поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M(1, 2, 2)$ и $N(-3, 1, 0)$.

10. В каких точках выполнено равенство $|\text{grad } \ln(1/r)| = 1$, если

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}?$$

11. Докажите, что: а) $\text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r}$; б) $\text{grad } \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$; в) $\text{grad } \sin r = \cos r \frac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$. Укажите скалярные потенциалы векторных полей $\frac{\mathbf{r}}{r}$, $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, $\frac{\mathbf{r}}{r} \cos r$, $\frac{\mathbf{r}}{r^2}$, $\frac{1}{1+r^2}$.

12. Докажите справедливость формул (u, v – скалярные поля):

а) $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$;

б) $\text{grad } \frac{u}{v} = \frac{v \text{grad } u - u \text{grad } v}{v^2}$;

в) $\text{grad } f(u) = f'(u) \text{grad } u$;

г) $\text{grad } f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad } v$.

13. Найдите $\text{grad}(\mathbf{c}\mathbf{r})$ и $\text{grad}(u(\mathbf{c}\mathbf{r}))$, где u – скалярное поле, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

14. Для скалярного поля $u = u(x, y)$ найдите $\text{grad } u$, если функция $u(x, y)$ определяется неявно уравнением:

а) $u^3 - 3xuy = a^2$; б) $x + y + u = e^u$; в) $x + y + u = e^{-(x+y+u)}$

15. Найдите дивергенцию векторного поля $\mathbf{a}$, если:

а) $\mathbf{a} = (x - y)(y - z) \mathbf{i} + (y - z)(z - x) \mathbf{j} + (z - x)(x - y) \mathbf{k}$;

б) $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)(x + y) \mathbf{i} + (z^2 + x^2)(y + z) \mathbf{j} + (x^2 + y^2)(z + x) \mathbf{k}$;

в) $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)(y - z) \mathbf{i} + (y^2 + z^2)(z - x) \mathbf{j} + (z^2 + x^2)(x - y) \mathbf{k}$;

г) $\mathbf{a} = f_1(y, z) \mathbf{i} + f_2(x, z) \mathbf{j} + f_3(x, y) \mathbf{k}$;

д) $\mathbf{a} = [x + f_1(y, z)] \mathbf{i} + [y + f_2(x, z)] \mathbf{j} + [z + f_3(x, y)] \mathbf{k}$;

е) $\mathbf{a} = xf_1(y, z) \mathbf{i} + yf_2(x, z) \mathbf{j} + zf_3(x, y) \mathbf{k}$.

16. Вычислите: а) $\text{div } \mathbf{r}$; б) $\text{div } \frac{\mathbf{r}}{r}$; в) $\text{div}(r^4 \mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

17. Найдите минимальное значение дивергенции векторного поля $\mathbf{a} = (x - a)(y - b)^2 \mathbf{i} + (y - b)(x - a)^2 \mathbf{j}$.

18. Докажите справедливость формулы:

а) $\text{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{div } \mathbf{a} + \text{div } \mathbf{b}$;

б) $\text{div}(\mathbf{c}u) = (\mathbf{c} \text{grad } u)$, где $\mathbf{c}$ – постоянный вектор.

19. Используя формулы (21) и (11) из § 1, преобразуйте: а) $\text{div}(\mathbf{r}\mathbf{c})$; б) $\text{div}(r^2 \mathbf{c})$; в) $\text{div}(f(r)\mathbf{c})$; г) $\text{div}(\mathbf{b}(\mathbf{r}\mathbf{a}))$; д) $\text{div}(\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{a}))$; е) $\text{div } r[\mathbf{c}\mathbf{r}]$; ж) $\text{div}[\mathbf{a}[\mathbf{r}\mathbf{b}]]$; где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – постоянные векторы.

20. Твердое тело вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω .

Векторные поля скоростей $\mathbf{v}(M)$ и ускорений $\mathbf{w}(M)$ определяются формулами $\mathbf{v}(M) = [\omega \mathbf{r}]$,

$\omega(M) = [\omega[\omega \mathbf{r}]]$, где $\omega = \omega \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M . Вычислите $\operatorname{div} \mathbf{v}(M)$ и $\operatorname{div} \omega(M)$.

21. Найдите дивергенцию гравитационного поля, создаваемого конечной системой точечных масс $m_1, m_2, \dots, m_n$.

22. Найдите дивергенцию электрического поля, создаваемого конечной системой точечных зарядов $e_1, e_2, \dots, e_n$.

23. Найдите ротор векторного поля $\mathbf{a} = (y/x) \mathbf{i} + (z/y) \mathbf{j} + (x/z) \mathbf{k}$:
а) в произвольной точке $M(x, y, z)$; б) в точке $A(-1, -1, -1)$.

24. Найдите ротор векторного поля:

- а) $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$;
- б) $\mathbf{a} = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^2 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$;
- в) $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + z(x + 2y) \mathbf{j} + y(x + y) \mathbf{k}$;
- г) $\mathbf{a} = (y/x^2) \mathbf{j} - (1/x) \mathbf{k}$;
- д) $\mathbf{a} = (y/x^2) \mathbf{i} - (1/x) \mathbf{j}$;
- е) $\mathbf{a} = (y/x^2) \mathbf{k} - (1/x) \mathbf{i}$.

25. Найдите ротор векторного поля $\mathbf{a}$ в точке $M(1, 1, 2)$, если:
а) $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$; б) $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j}$; в) $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{k} + x \mathbf{i}$.

26. Вычислите: а) $\operatorname{rot} r \mathbf{r}$; б) $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r}$; в) $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$; где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

27. Используя формулы (22) и (24), преобразуйте: а) $\operatorname{rot}(\mathbf{rc})\mathbf{a}$; б) $\operatorname{rot}(\mathbf{rc})$; в) $\operatorname{rot} f(r)\mathbf{c}$; г) $\operatorname{rot} [\mathbf{c} \cdot f(r) \mathbf{r}]$; где $\mathbf{a}$ – векторное поле, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{c}$ – постоянный вектор.

28. Для произвольных векторных полей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и произвольного скалярного поля и докажите двумя способами (с помощью оператора Гамильтона и в прямоугольных координатах) справедливость следующих формул:

- а) $(\mathbf{a} \nabla) u \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \nabla u) + u(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{b}$;
- б) $(\mathbf{c} \cdot \nabla(\mathbf{ab})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}$;
- в) $(\mathbf{c} \nabla)[\mathbf{ab}] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{b}] - [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \nabla) \mathbf{a}]$;
- г) $([\mathbf{ab}] \cdot \operatorname{rot} \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{c})$.

29. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – векторные поля. Докажите, что вектор $(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a}$ есть производная векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению вектора $\mathbf{b}$, умноженная на модуль вектора $\mathbf{b}$: $(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial b} |\mathbf{b}|$.

30. Даны векторные поля $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = zx \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$. Вычислите векторы

$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial b}$ и $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial a}$ (производную поля $\mathbf{a}$ по направлению вектора $\mathbf{b}$ и производную поля $\mathbf{b}$ по направлению вектора $\mathbf{a}$).

31. Вычислите производные векторного поля $\mathbf{a} = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$ по направлениям векторов $l_1 = \mathbf{i}$, $l_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $l_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $l_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Вычислите также векторы $(l_1 \nabla) \mathbf{a}$, $(l_2 \nabla) \mathbf{a}$, $(l_3 \nabla) \mathbf{a}$, $(l_4 \nabla) \mathbf{a}$.

32. Покажите, что дифференциалы скалярного поля и векторного поля могут быть записаны с помощью оператора Гамильтона в виде $du = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)u = (d\mathbf{r} \nabla)u$, $d\mathbf{a} = (d\mathbf{r} \nabla)\mathbf{a}$, где $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$.

33. Нестационарное поле температуры точек плоскости Oxy задано формулой $T = T_0 e^{-(x^2 + y^2 + t^2)}$ (t – время). Частица движется по траектории $\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j}$ ($\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор частицы). Вычислите локальную, конвективную и полную производные по времени температуры частицы.

34. Нестационарное электрическое поле в пространстве задано формулой $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r} + A_0 \sin \omega t \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, t – время. Вычислите векторы локальной, конвективной и полной производных по времени поля $\mathbf{E}$ в точке, движущейся по винтовой линии $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + b \sin t \cdot \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$.

35. Пусть $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ – нестационарное поле скоростей потока жидкости. Используя формулу (16) при $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ и формулу (27) при $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$, выведите формулу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) + [\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}].$$

Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

36. Вычислите: а) $\text{div} (u \text{ grad } u)$; б) $\text{div} (\text{grad } f(r))$; в) $\text{rot} (u \text{ grad } v)$; г) $\text{rot} [\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}]$; где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, u и v – скалярные поля, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – векторные поля.

37. Для векторного поля $\mathbf{a} = x^2 y^2 \mathbf{i} + y^2 z^2 \mathbf{j} + z^2 x^2 \mathbf{k}$ вычислите $\text{rot rot } \mathbf{a}$, $\text{grad div } \mathbf{a}$, $\Delta \mathbf{a}$ и проверьте справедливость формулы (1).

38. Даны векторные поля $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} e^{\pm x} + \mathbf{j} e^{\pm y} + \mathbf{k} e^{\pm z}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{i} e^{\pm y} + \mathbf{j} e^{\pm z} + \mathbf{k} e^{\pm x}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{i} e^{\pm z} + \mathbf{j} e^{\pm x} + \mathbf{k} e^{\pm y}$ (возможны любые комбинации знаков). Докажите, что:

а) $\text{rot } \mathbf{a}_1 = 0$, а поля $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ удовлетворяют уравнению $\mathbf{a} + \text{rot rot } \mathbf{a} = 0$,

б) $\text{div } \mathbf{a}_2 = 0$, $\text{div } \mathbf{a}_3 = 0$, а поле $\mathbf{a}_1$ удовлетворяет уравнению $\mathbf{a} - \text{grad div } \mathbf{a} = 0$.

39. Покажите, что функция $u = \ln \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа на плоскости: $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

40. Покажите, что электрическое поле $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$ точечного заряда e , находящегося в начале координат, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа $\Delta \mathbf{E} = 0$.

41. Покажите, что при $\mu = \varepsilon = 1$ магнитное поле $\mathbf{H}$ удовлетворяет телеграфному уравнению $\Delta \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$.

42. Разложите следующие векторные поля на сумму потенциального и соленоидального полей:

- а) $\mathbf{a}_1 = (x + y) \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j} + (z + 1) \mathbf{k}$;
- б) $\mathbf{a}_2 = 1/2(x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k})$;
- в) $\mathbf{a}_3 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}$.

Интегральные характеристики векторных полей

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

43. Применяя формулу Остроградского–Гаусса, вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = (x - y) \mathbf{i} + (z - y) \mathbf{j} + (z - x) \mathbf{k}$ через:

- а) поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ в сторону внешней нормали;
- б) сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали.

44. Применяя формулу Остроградского–Гаусса, вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = x \cos y \cdot \mathbf{i} - \sin y \cdot \mathbf{j} + (z - 1)^2 \mathbf{k}$ через боковую поверхность цилиндра, ограниченного поверхностями:

- а) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$;
- б) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, $z = 4$ в сторону внутренней нормали.

45. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = (z + 1) \mathbf{k}$ через:

- а) сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в сторону внешней нормали;
- б) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ в сторону внешней нормали к сфере;
- в) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ в сторону внутренней нормали к сфере;
- г) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leq 0$ в сторону внутренней нормали к сфере;
- д) полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$ в сторону внешней нормали к сфере.

46. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ через круг, получающийся при пересечении шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и плоскости:

а) $x + y + z = 0$;

б) $x + y + z = 1$;

в) $x - y + z = 0$;

г) $x - y + z = 1$ в сторону той нормали к плоскости, которая образует острый угол с осью Oy .

47. Применяя формулу Остроградского–Гаусса, вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ через каждую из частей сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, получающихся при пересечении этой сферы плоскостью:

а) $x + y + z = 0$;

б) $x + y + z = 1$;

в) $x - y + z = 0$;

г) $x - y + z = 1$ в сторону внешней нормали к сфере.

48. Вычислите поток векторного поля $\mathbf{a} = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ через круг, полученный при пересечении шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и плоскости $x + y + z = \alpha$ в сторону той нормали к плоскости, которая образует острый угол с осью Ox . При каком значении α поток векторного поля $\mathbf{a}$ принимает наибольшее и наименьшее значения?

49. Даны векторные поля: $\mathbf{a}_1 = f_1(y, z) \mathbf{i} + f_2(z, x) \mathbf{j} + f_3(x, y) \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_2 = x^2 \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_3 = (x^2/2 - xy) \mathbf{i} + (y^2/2 - yz) \mathbf{j} + (z^2/2 - xz) \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_4 = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$. Выясните, какие из них являются соленоидальными. Вычислите поток каждого из данных полей через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.

50. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = (z - x^2) \mathbf{i} + (x - y^2) \mathbf{j} + (y - z^2) \mathbf{k}$ вдоль:

а) треугольного контура, образованного пересечением плоскости $x + y + z = 1$ с координатными плоскостями и пробегаемого по часовой стрелке, если смотреть из начала координат;

б) треугольного контура, образованного отрезками прямых, соединяющими точки $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, и пробегаемого по часовой стрелке, если смотреть из точки $(1, 0, 0)$;

в) треугольных контуров, лежащих в плоскостях Oxy и Oxz , аналогичных контуру из п. б) и пробегаемых по часовой стрелке, если смотреть соответственно из точек $(0, 0, 1)$ и $(0, 1, 0)$.

51. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ плоскостью: а) $x + y + z = 0$; б) $x + y + z = 1$; в) $x - y + z = 0$; г) $x - y + z = -1$. Контур пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 2, 0)$.

52. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = (y - x) \mathbf{i} + (z - y) \mathbf{j} + (x - z) \mathbf{k}$ вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости $x + y + z = a$. Окружность пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2)$. При каком значении a циркуляция векторного поля принимает наименьшее значение?

53. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = x \cos y \cdot \mathbf{i} + \sin y \cdot \mathbf{j} + (z - 1)^2 \mathbf{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $\mathbf{r}(t) = \cos t \cdot \mathbf{i} + \sin t \cdot \mathbf{j} + (t/\pi) \mathbf{k}$:

- а) от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(0, 0, 2)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);
 б) от точки $B(0, 0, 2)$ до точки $C(0, 0, 4)$ ($2\pi \leq t \leq 4\pi$).

54. Вершины D, B, A' куба $ABCD A'B'C'D'$ находятся соответственно в точках $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$ вдоль замкнутого контура: а) $C'B B'A'D'C$; б) $DD'A'ABCD$; в) $C'D'DABB'C$. Используя полученные результаты, вычислите циркуляцию векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль ломаной: г) $C'B B'A'D'$; д) $DD'A'ABC$; е) $C'D'DABB'$.

55. Докажите, что векторное поле $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, является потенциальным, и найдите потенциал этого поля.

56. Даны векторные поля: $\mathbf{a}_1 = (y + z) \mathbf{i} + (z + x) \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_2 = f_1(x) \mathbf{i} + f_2(y) \mathbf{j} + f_3(z) \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_3 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$; $\mathbf{a}_4 = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$. Выясните, какие из них являются потенциальными. Вычислите циркуляцию каждого из данных полей вдоль окружности $x^2 + z^2 = 1$, пробегаемой против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 1, 0)$.

57. Найдите потенциалы потенциальных полей предыдущей задачи.

58. Докажите, что поток векторного поля $\mathbf{a}$ через поверхность Φ , заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in g$, в сторону нормали $\mathbf{N} = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right]$ может быть вычислен по формуле

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = \iint_g \left(\mathbf{a} \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right] \right) du dv,$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$ – единичный вектор нормали к поверхности Φ .

Вычислите по этой формуле поток векторного поля $\mathbf{a} = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j}$ через коническую поверхность Φ , заданную векторным уравнением $\mathbf{r}(r, \varphi) = r \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + r \sin \varphi \cdot \mathbf{j} + r \cos \alpha \cdot \mathbf{k}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$), где r, φ – полярные координаты, α – угол между образующей конуса и осью Oz .

Какая из нормалей $N_1 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right]$ и $N_2 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right]$ образует острый угол с осью Oz ?

59. В области $G = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ задано векторное поле $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$. Докажите, что $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ в G . Объясните, почему из условия $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ не следует потенциальность поля $\mathbf{a}$ в области G . Задав произвольную замкнутую кривую L в области G в виде $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, докажите, что циркуляция поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой L равна нулю. Найдите потенциал поля $\mathbf{a}$.

60. Вычислите ротор векторного поля $\mathbf{a}$ и циркуляцию этого поля вдоль окружности L если:

$$\text{а) } \mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z \mathbf{k}, L: x^2 + y^2 = 1, z = z_0;$$

$$\text{б) } \mathbf{a} = x \mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{y^2 + z^2} \mathbf{k}, L: y^2 + z^2 = 1, x = x_0;$$

$$\text{в) } \mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z \mathbf{k}, L: x^2 + y^2 = 1, z = z_0;$$

$$\text{г) } \mathbf{a} = x \mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \mathbf{j} - \frac{z}{y^2 + z^2} \mathbf{k}, L: y^2 + z^2 = 1, x = x_0.$$

Являются ли поля а) и в) потенциальными в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ с выброшенным диаметром, лежащим на оси Oz , а поля б) и г) потенциальными в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ с выброшенным диаметром, лежащим на оси Ox ?

61. Дано векторное поле на плоскости $\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Вычислите $\text{rot } \mathbf{a}$ и циркуляцию поля $\mathbf{a}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Является ли поле $\mathbf{a}$ потенциальным: в области $0 < x^2 + y^2 \leq 1$; в области $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$?

62. Дано скалярное поле на плоскости $u = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Вычислите $\text{grad } u$ и циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = \text{grad } u$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$. Является ли векторное поле $\mathbf{a}$ потенциальным в области $0 < x^2 + y^2 \leq 1$?

63. Дано векторное поле на плоскости $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Вычислите $\text{div } \mathbf{a}$ и поток поля $\mathbf{a}$ через окружность $x^2 + y^2 = 1$ в сторону внешней нормали. Объясните, почему в данном случае из соленоидальности поля $\mathbf{a}$ не следует, что поток поля $\mathbf{a}$ через любую замкнутую кривую равен нулю.

64. Дано векторное поле на плоскости $\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$, $x^2 + y^2 \neq 0$. Докажите, что $\text{div } \mathbf{a} = 0$ и поток поля $\mathbf{a}$ через любую замкнутую кривую, не проходящую через начало координат, равен нулю (кривая может обходить начало координат).

65. Пусть в односвязной плоской области G векторное поле $\mathbf{a}(x, y)$ удовлетворяет условиям $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ и $\text{div } \mathbf{a} = 0$. Докажите, что поле $\mathbf{a}$ потенциально и его потенциал является гармонической функцией в области G . Объясните, почему это утверждение

неприменимо к полю $\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ в области $0 < x^2 + y^2 \leq 1$, хотя условия $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ и $\text{div } \mathbf{a} = 0$ в этой области выполнены (см. упр. 61 и 64).

66. Применяя формулу Остроградского–Гаусса к векторному полю $u(M) \mathbf{i}$, где $u(M)$ – скалярное поле в области G с границей Φ , докажите, что

$$\iint_{\Phi} u \cos \alpha dS = \iiint_G \frac{\partial u}{\partial x} dV,$$

где α – угол между внешней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности Φ и осью Ox .

67. Применяя формулу Остроградского–Гаусса к векторным полям $u(M) \mathbf{i}$, $u(M) \mathbf{j}$, $u(M) \mathbf{k}$, где $u(M)$ – скалярное поле в области G , ограниченной поверхностью Φ , докажите, что

$$\iint_{\Phi} u \mathbf{n} dS = \iint_{\Phi} \mathbf{n} u dS = \iiint_G \nabla u dV, \quad (25)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ . (Эта формула аналогична формуле Остроградского–Гаусса, но вместо векторного поля здесь фигурирует скалярное поле $u(M)$.)

68. Используя формулу (25), докажите, что

$$\text{grad } u(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} u \mathbf{n} dS}{V(G)}, \quad (26)$$

где $V(G)$ – объем области G , ограниченной поверхностью Φ . (Эта формула дает инвариантное определение градиента скалярного поля, аналогичное инвариантным определениям дивергенции и ротора.)

69. Пусть векторное поле $\mathbf{a} = \{P(M), Q(M), R(M)\}$ задано в области G , ограниченной поверхностью Φ , а $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ .

Примените в области G формулу Остроградского–Гаусса к векторным полям $R(M) \mathbf{j} - Q(M) \mathbf{k}$, $P(M) \mathbf{k} - R(M) \mathbf{i}$ и $Q(M) \mathbf{i} - P(M) \mathbf{j}$. Умножая полученные равенства соответственно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и складывая, докажите, что

$$\iint_{\Phi} [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS = \iiint_G \text{rot } \mathbf{a} dV$$

или

$$\iint_{\Phi} [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS = \iiint_G [\nabla \mathbf{a}] dV. \quad (27)$$

Эта формула аналогична формуле Остроградского–Гаусса:

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\mathbf{a}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV$$

или

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\mathbf{a}) dS = \iiint_G (\nabla \mathbf{a}) dV. \quad (28)$$

70. Используя формулу (27), докажите, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} [\mathbf{n}\mathbf{a}] dS}{V(G)}, \quad (29)$$

где $V(G)$ – объем области G , ограниченной поверхностью Φ . (Формула (29) дает инвариантное определение ротора векторного поля, причем, в отличие от формулы (10), она выражает сам вектор $\operatorname{rot} \mathbf{a}$, а не его проекцию на некоторое выбранное направление.)

71. В примере 4 из § 5 гл. XIV для скалярного поля и была получена формула

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta u dV, \quad (30)$$

которую с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\nabla)u dS = \iiint_G \nabla^2 u dV. \quad (31)$$

Используя формулу (30), докажите, что

$$\Delta u(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS}{V(G)}, \quad (32)$$

где $V(G)$ – объем области G , ограниченной поверхностью Φ . (Формула (32) дает инвариантное определение оператора Лапласа.) Формулы (25), (27), (28), (31) можно рассматривать как частные случаи следующего операторного обобщения формулы Остроградского–Гаусса:

$$\iint_{\Phi} L(\mathbf{n}) dS = \iiint_G L(\nabla) dV, \quad (33)$$

где $L(\mathbf{b})$ – некоторое линейное однородное выражение относительно вектора $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ – произвольный вектор, в частности вектор $\mathbf{n}$ или вектор ∇). Такими выражениями относительно вектора $\mathbf{n}$ в левых частях формул (25), (27), (28), (31) являются $\mathbf{n}u$, $[\mathbf{n}\mathbf{a}]$, $(\mathbf{n}\mathbf{a})$, $(\mathbf{n}\nabla)$. В правых частях указанных формул тройные интегралы берутся от тех же выражений, в которых вектор $\mathbf{n}$ заменен вектором ∇ . Поэтому формулы (5), (26), (29), (32) оказываются частными случаями операторной формулы

$$L(\nabla)_M = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} L(\mathbf{n}) dS}{V(G)},$$

где $V(G)$ – объем области G , ограниченной поверхностью Φ и стягивающейся к точке M .

72. Применяя формулу (33), докажите, что

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{a} dS = \iiint_G (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a} dV, \quad (34)$$

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a} dS = \iint_{\Phi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta \mathbf{a} dV, \quad (35)$$

где $\mathbf{a}$ – векторное поле, заданное в области G с границей Φ ; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ ; $\mathbf{v}$ – постоянный вектор.

Проверьте справедливость этих формул, проделав все указанные операции в координатах. Используя формулы (34) и (35), докажите, что

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{a} dS}{V(G)}, \quad \Delta\mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial n} dS}{V(G)}$$

(эти формулы дают инвариантные определения операций $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}$ и $\Delta\mathbf{a}$).

73. Пусть $\mathbf{a}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Используя формулу (34), докажите,

что $\iint_{\Phi} (\mathbf{a}\mathbf{n})\mathbf{r} dS = \mathbf{a}V$, где V – объем области, ограниченной поверхностью Φ .

74. Пусть $\mathbf{a}$ – постоянный вектор, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Используя формулу (34) и тождество

(25) из § 1, докажите, что $\iint_{\Phi} (\mathbf{a}\mathbf{r})\mathbf{n} dS = \mathbf{a}V$, где V – объем области, ограниченной поверхностью Φ .

Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

75. Пусть $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – единичные базисные векторы системы цилиндрических координат ρ, φ, z , связанных с прямоугольными координатами x, y, z формулами (2). Даны точки $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ (координаты точек прямоугольные).

а) Изобразите на рисунке базис $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ в точках A, B, C .

б) Найдите углы между векторами: 1°) $\mathbf{e}_\rho(A)$ и $\mathbf{e}_\rho(B)$; 2°) $\mathbf{e}_\varphi(A)$ и $\mathbf{e}_\varphi(B)$; 3°) $\mathbf{e}_\rho(A)$ и $\mathbf{e}_\varphi(B)$; 4°) $\mathbf{e}_z(A)$ и $\mathbf{e}_z(B)$.

в) Разложите векторы: 1°) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ по базису $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ в точках A и B ; 2°) $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ точках A и B по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

76. Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ – единичные базисные векторы системы сферических координат r, θ, φ , связанных с прямоугольными координатами x, y, z формулами (3). Даны точки $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1)$ (координаты точек прямоугольные).

а) Изобразите на рисунке базис $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ в точках A, B, C .

б) Найдите углы между векторами: 1°) $\mathbf{e}_r(A)$ и $\mathbf{e}_r(B)$; 2°) $\mathbf{e}_\theta(A)$ и $\mathbf{e}_\theta(B)$; 3°) $\mathbf{e}_r(A)$ и $\mathbf{e}_\varphi(B)$; 4°) $\mathbf{e}_\theta(A)$ и $\mathbf{e}_\varphi(B)$.

в) Разложите векторы: 1°) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ по базису $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$ в точках A и B ; 2°) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ в точках A и B по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

77. Запишите выражение градиента скалярного поля и на плоскости Oxy в полярных координатах.

78. Выразите дивергенцию и ротор плоского векторного поля $\mathbf{a}(x, y)$ в полярных координатах.

79. Запишите выражение градиента скалярного поля и в сферических координатах.

80. Запишите выражение дивергенции векторного поля $\mathbf{a}$:

а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

81. Выразите ротор векторного поля $\mathbf{a}$:

а) в цилиндрических координатах; б) в сферических координатах.

82. Запишите выражение Δu (Δ – оператор Лапласа) в цилиндрических координатах.

83. Найдите решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящие: а) только от ρ ; б) только от φ ; в) только от z ; где ρ, φ, z – цилиндрические координаты.

84. Найдите решения уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, зависящие: а) только от r ; б) только от θ ; в) только от φ ; где r, θ, φ – сферические координаты.

85. С помощью выражения оператора Лапласа в сферических координатах вычислите $\Delta(r^m)$.

86. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортогональный базис системы криволинейных координат q_1, q_2, q_3 . Найдите $\operatorname{div} \mathbf{e}_1, \operatorname{div} \mathbf{e}_2, \operatorname{div} \mathbf{e}_3$. Запишите полученные выражения:

а) в цилиндрических координатах, считая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$;

б) в сферических координатах, считая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$.

87. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – ортогональный базис системы криволинейных координат q_1, q_2, q_3 . Докажите, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}_2 - \left(\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1} [\operatorname{grad} H_1 \cdot \mathbf{e}_1]$$

Выведите аналогичные формулы для $\operatorname{rot} \mathbf{e}_2$ и $\operatorname{rot} \mathbf{e}_3$. Запишите полученные выражения:

а) в цилиндрических координатах, считая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$;

б) в сферических координатах, считая $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$