

Площадь поверхности

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

а) $x = a \cos v \sin u, y = b \sin v \sin u, z = c \cos u, M_0(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$;

б) $x = r, y = r \sin \varphi, z = r \cos \varphi, M_0(-1, \sqrt{3}/2, -1/2)$;

в) $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = h, M_0(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, -1)$.

2. Вычислите направляющие косинусы нормали к поверхности в точке M_0 :

а) $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi, M_0(h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}, h\pi/4)$;

б) $x = (1 + \cos \psi) \cos \varphi, y = (1 + \cos \psi) \sin \varphi, z = \sin \psi, M_0(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$.

3. Пользуясь явным заданием поверхности, вычислите площадь:

а) части гиперболического параболоида $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$;

б) части эллиптического параболоида $2az = x^2 + y^2$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

в) части гиперболического параболоида $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$ при $z \geq 0$, вырезанной цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

г) части поверхности $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1$, вырезанной плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0$;

д) части конической поверхности $z^2 = 2xy$, отсекаемой плоскостями $x + y = 1, x = 0, y = 0$;

е) части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Пользуясь параметрическим заданием поверхности, вычислите площадь:

а) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + z^2 = b^2$ если $0 < b < a$;

б) части сферы $x = R \cos v \sin u, y = R \sin v \sin u, z = R \cos u$, ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами, т. е. $v_1 \leq v \leq v_2, u_1 \leq u \leq u_2$;

в) части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$; г) части цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ при $x > 0, y > 0$, вырезанной плоскостями $x + y = 0, x - z = 0$;

д) части гиперболического параболоида $z = (x^2 - y^2)/2$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$;

е) части геликоида $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h\varphi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

ж) поверхности тора $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, z = a \sin \psi$ при $0 < a \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi$.

5. Вычислите площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = z^2/3, x + y + z = 2a \ (a > 0)$;

б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x + 2z = a \ (a > 0)$.

Поверхностные интегралы первого рода

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы $I_1 = \iint_{\Phi_1} (x^2 + y^2 + z^2)$

dS и $I_2 = \iint_{\Phi_2} (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где Φ_1 – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, Φ_2 – поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| = a$, вписанного в эту сферу?

7. Вычислите интеграл $\iint_{\Phi} \sqrt{z^2 - x^2} dS$, где Φ – часть конуса $x^2 + y^2 = z^2$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

8. Вычислите поверхностные интегралы первого рода:

а) $\iint_{\Phi} (x + y + z) dS$, где Φ – полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$;

б) $\iint_{\Phi} (x^2 + y^2) dS$ где Φ – граница тела, заданного неравенствами $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$;

в) $\iint_{\Phi} \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, где Φ – граница тетраэдра, заданного неравенствами $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

г) $\iint_{\Phi} |xyz| dS$, где Φ – часть поверхности $z = x^2 + y^2$ при $z \leq 1$;

д) $\iint_{\Phi} z dS$, где Φ – часть геликоида $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ при $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi$,

е) $\iint_{\Phi} z^2 dS$, где Φ – часть конической поверхности $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ при $0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \ (a > 0, \alpha - \text{постоянная и } 0 < \alpha < \pi/2)$;

ж) $\iint_{\Phi} (xy + yz + zx) dS$, где Φ – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

9. Вычислите массу: а) части поверхности $z = (x^2 + y^2)/2$ при $z \leq 1$, плотность которой в точке $M(x, y, z)$ равна z ; б) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ при $z \geq 0$, плотность которой $\rho(M) = z/a$.

10. Вычислите статистические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки $x + y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ плотности ρ_0 .

11. Вычислите момент инерции относительно оси Oz части однородной конической поверхности $x^2 + z^2 = y^2, y > 0$ плотности ρ_0 , заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$

12. Вычислите момент инерции однородной конической поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b$, плотности ρ_0 относительно прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$.

13. Вычислите моменты инерции относительно начала координат однородных поверхностей Φ_1 и Φ_2 плотности 1, где Φ_1 – поверхность куба с центром в начале координат и ребром $2a$; Φ_2 – полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H$.

14. Вычислите координаты центра тяжести однородных поверхностей Φ_1 и Φ_2 , где Φ_1 – часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = ax$; Φ_2 – часть поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ при $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a$.

15. С какой силой однородная поверхность $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq b \leq r \leq a$, плотности ρ_0 притягивает материальную точку массы m , помещенную в начало координат?

Поверхностные интегралы второго рода

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

16. Вычислите поверхностный интеграл второго рода:

а) $\iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где Φ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint_{\Phi} f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$, где Φ – внешняя сторона параллелепипеда $0 \leq x \leq$

$a, 0 \leq z \leq b, 0 \leq z \leq c; f(x), g(y), h(z)$ – непрерывные функции;

в) $\iint_{\Phi} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy$, где Φ – нижняя сторона части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq h$;

г) $\iint_{\Phi} \left(\frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\cos \beta}{y} + \frac{\cos \gamma}{z} \right) ds$, где Φ – внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

17. Вычислите поток вектора $\mathbf{a}(M)$ через ориентированную поверхность Φ , если:

а) $\mathbf{a}(M) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, Φ – нижняя сторона части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq h$;

б) $\mathbf{a}(M) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, Φ – верхняя сторона основания этого конуса, т.е. $\Phi = \{(x, y, z): z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$;

в) $\mathbf{a}(M) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$, Φ – внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ при $0 \leq z \leq h$;

г) $\mathbf{a}(M) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, Φ – внешняя сторона границы тела $\{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$;

д) $\mathbf{a}(M) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, Φ – верхняя сторона части поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq 1$;

е) $\mathbf{a}(M) = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$, Φ – верхняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

ж) $\mathbf{a}(M) = y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + x \mathbf{k}$, Φ – внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = a$ ($a > 0$), $x = 0, y = 0, z = 0$;

з) $\mathbf{a}(M) = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$, Φ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

Формула Стокса

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

18. Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл:

а) $\int_L y dx + z dy + x dz$, где L – виток винтовой линии $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$, пробегаемый в направлении от точки $(1, 0, 0)$ до точки $(1, 0, 2\pi)$;

б) $\oint_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = x \tan \alpha, 0 < \alpha < \pi/2$, обход которой совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$;

в) $\oint_L y dx + z dy + x dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, пробегаемая

против часовой стрелки, если смотреть из точки $(a, 0, 0)$;

г) $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, где L – эллипс $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$;

д) $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, где L – кривая, по которой пересекаются верхняя полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ ($z > 0$) с цилиндром $x^2 + y^2 = 2rx$, где $0 < r < R$. Кривая L пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2R)$;

е) $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где L – граница сечения куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ плоскостью $x + y + z = 3a/2$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$;

ж) $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, где L – контур, ограничивающий часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Направление обхода кривой L берется против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2, 0, 0)$.

19. Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислите криволинейные интегралы:

а) $\int_{AB} x dx + y^2 dy - z^3 dz$, где $A(1, 1, 1), B(2, 3, -4)$;

б) $\int_{AB} yz dx + xz dy + xy dz$, где $A(1, 2, 3), B(6, 1, 1)$;

в) $\int_{M_1 M_2} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ и $0 < a < b$.

20. Выразите криволинейный интеграл $\int_{M_1 M_2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz)$ через определенный интеграл, где $f(t)$ – непрерывная функция и $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1), M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2)$.

21. Найдите функцию $u(x, y, z)$, если:

а) $du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$;

б) $du = (ye^x + ze^y + ye^z) dx + (xe^y + ze^x + xe^z) dy + (xye^z + ye^x + xe^y) dz$;

в) $du = (2xyz + y^2z + yz^2) dx + (2xyz + x^2z + xz^2) dy + (2xyz + x^2y + xy^2) dz$.

22. Найдите работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы m перемещается из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (ось Oz направлена вертикально вверх).

23. Вычислите работу силы $\mathbf{F}$ вдоль замкнутого контура L , пробегаемого против хода часовой стрелки, если смотреть из точки M :

а) $\mathbf{F} = \mathbf{r} = \{x, y, z\}$, L – окружность, по которой плоскость $x = 2y$ пересекает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $M = (2R, 0, 0)$;

б) $\mathbf{F} = \{yz, zx, xy\}$, L – эллипс, по которому плоскость $2z - 3x = 6$ пересекает цилиндр $x^2 + y^2 = 1$, $M = (2, 0, 0)$.

Формула Остроградского-Гаусса

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

24. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислите поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности Φ (если поверхность не замкнутая, дополните ее до замкнутой):

а) $\iint_{\Phi} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint_{\Phi} (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy$, где Φ – часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \leq z \leq h$;

в) $\iint_{\Phi} yz \, dy \, dz + zx \, dz \, dx + xy \, dx \, dy$, где Φ – граница тела $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$;

г) $\iint_{\Phi} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, где Φ – часть поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq 1$;

д) $\iint_{\Phi} y \, dy \, dz + z \, dz \, dx + x \, dx \, dy$, где Φ – поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = a$ ($a > 0$), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

е) $\iint_{\Phi} x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

ж) $\iint_{\Phi} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy$, где Φ – поверхность куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$;

з) $\iint_{\Phi} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

и) $\iint_{\Phi} (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$, где Φ – поверхность $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$.

25. Пусть Φ – гладкая поверхность, ограничивающая область G , функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка в замкнутой области G ,

$\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к поверхности Φ . Докажите справедливость формул:

а) $\iint_{\Phi} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint_G \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - u \Delta u \right\} dx dy dz$

б) $\iint_{\Phi} \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{vmatrix} ds = \iiint_G \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dx dy dz$ – вторая формула Грина.