

Интегрируемость функции (по Риману) и определенный интеграл

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Для данных функций на указанных сегментах найдите верхнюю S и нижнюю s суммы Дарбу при разбиении сегментов на n равных частей: а) $f(x) = x^3$, $2 \leq x \leq 3$; б) $f(x) = 2^x$, $0 \leq x \leq 10$.

2. Вычислите определенные интегралы как пределы интегральных сумм:

а) $\int_{-1}^2 x^2 dx$ (удобно разбить сегмент $[-1, 2]$ на равные части);

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ (удобно выбрать $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot x_i}$);

в) $\int_2^3 x^m dx$ (удобно выбрать точки деления x_i так, чтобы они образовали геометрическую прогрессию).

3. Докажите, что функция $f(x) = 1/x - [1/x]$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

4. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$ интегрируема на сегменте $[0, 1]$.

Свойства определенного интеграла

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Докажите, что сумма интегрируемой и неинтегрируемой функций есть функция неинтегрируемая.

6. Интегрируемы ли на сегменте $[0, 1]$ функции:

а) $f_1(x) = x$;

б) $g_1(x) = 1/x$;

в) $f_1(x) + g_1(x)$;

г) $f_1(x)g_1(x)$;

д) $f_2(x) = \sqrt{x}$;

е) $f_2(x)g_1(x)$?

7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ D(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

где $D(x)$ – функция Дирихле. Интегрируема ли функция $f(x)$ на сегментах $[-2, 2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$?

$$\int_a^b$$

8. Пусть существует $\int_a^b |f(x)| dx$. Следует ли отсюда интегрируемость функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$? Рассмотрите пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ -1, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

9. Пусть $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0,5 \sin x$, и пусть: а) $0 \leq x \leq \pi$, б) $0 \leq x \leq 3\pi/2$. В каком из этих случаев выполнены условия свойства 9°?

10. Найдите среднее значение функции на указанных сегментах:

а) $f(x) = \sin x$ на $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$, $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$, $[\varphi_0, \varphi_0 + \pi]$;

б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-2, -1]$, $[-2, 1]$, $[-1, 3]$, $[-2, 2]$, $[1, 2]$.

Является ли среднее значение функции на каждом сегменте одним из значений этой функции на этом сегменте? Объясните, почему в одних случаях ответ положительный, а в других – отрицательный.

11. Найдите среднее значение функции на указанных сегментах:

а) $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, 1]$, $[0, 10]$, $[0, 100]$;

б) $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$ на $[-\pi, \pi]$;

в) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ на $[0, 2\pi]$.

12. Найдите среднее значение скорости свободно падающего с высоты h тела, начальная скорость которого равна v_0 .

13. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin(2\pi t/T + \varphi),$$

где i_0 – амплитуда, t – время, T – период, φ – начальная фаза.

Найдите среднее значение квадрата силы тока:

а) на промежутке времени $[0, T]$;

б) на промежутке $[0, T/2]$ (период функции $i^2(t)$);

в) на произвольном промежутке $[0, t_0]$ и предел этого среднего при $t_0 \rightarrow \infty$.

Формула Ньютона-Лейбница

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

14. Найдите производные:

а) $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin(x^2) dx;$

б) $\frac{d}{db} \int_a^b \sin(x^2) dx;$

в) $\frac{d}{da} \int_a^{x^2} \sin(x^2) dx;$

г) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt;$

д) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^2} dx;$

е) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$

ж) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$

з) $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$

и) $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{t^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$

к) $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$

л) $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^4}};$

15. Вычислите интегралы:

а) $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$

$$6) \int_0^2 |1-x| dx;$$

$$в) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} \quad (0 < \alpha < \pi).$$

16. Объясните, почему формальное применение формулы Ньютона-Лейбница приводит к неверным результатам, и вычислите, используя первообразную для кусочно непрерывной функции или разбивая на части промежуток интегрирования, следующие интегралы:

$$а) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (2 + \operatorname{tg}^2 x)};$$

$$б) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^{1/x}} \right) dx;$$

$$17. \text{ Вычислите } \int_0^2 f(x) dx, \text{ где}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

двумя способами: а) используя первообразную для $f(x)$, построенную на всем сегменте $[0, 2]$; б) разбивая сегмент $[0, 2]$ на сегменты $[0, 1]$ и $[1, 2]$.

18. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите следующие интегралы:

$$а) \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx;$$

$$б) \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx;$$

$$в) \int_0^1 \arccos x dx.$$

19. Применяя подходящую замену переменной, вычислите следующие интегралы:

$$а) \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$\text{б) } \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{в) } \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

20. Можно ли вычислить интеграл $\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$ с помощью замены переменной $x = \sin t$?

21. Можно ли, вычисляя интеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ с помощью замены переменной $x = \sin t$, взять в качестве новых пределов интегрирования числа: а) π и $\pi/2$; б) 2π и $5\pi/2$; в) π и $5\pi/2$? Вычислите интеграл в каждом случае, когда указанная замена допустима.

22. Докажите, что для непрерывной на $[-l, l]$ функции $f(x)$ справедливо равенство:

$$\text{а) } \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx, \text{ если } f(x) - \text{ четная функция;}$$

$$\text{б) } \int_{-l}^l f(x) dx = 0, \text{ если } f(x) - \text{ нечетная функция.}$$

Дайте геометрическую иллюстрацию этих фактов. Справедливы ли эти равенства, если $f(x)$ – интегрируемая на $[-l, l]$, но не обязательно непрерывная функция?

23. Докажите, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

24. Вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1};$$

$$\text{б) } \int_1^e (x \sin x)^2 dx;$$

$$\text{в) } \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)};$$

$$\text{д) } \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx;$$

$$\text{е) } \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 \, dx.$$

25. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

(i – мнимая единица), покажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2\pi & \text{при } m = n \end{cases}$$

(используйте равенство $\int_a^b [f(x) + i g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + i \int_a^b g(x) \, dx$).

26. Покажите, что

$$\int_a^b e^{(\alpha + i\beta)x} \, dx = \frac{e^{b(\alpha + i\beta)} - e^{a(\alpha + i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(используйте равенство $e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$).

27. Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = 1/2 (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = 1/(2i) (e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x \, dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx \, dx.$$

Вычисление длин плоских кривых

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

28. Найдите длины кривых, заданных уравнениями:

а) $y = x^{3/2} \quad (0 \leq x \leq 4);$

б) $x = y^2/4 - 1/2 \ln y \quad (1 \leq y \leq e);$

в) $y = \ln \cos x \quad (0 \leq x \leq a < \pi/2);$

г) $y^2 = x^3/(2a - x) \quad (0 \leq x \leq 5a/3);$

д) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$

е) $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t;$

ж) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 8\pi, \text{ обратите внимание на пределы интегрирования});$

з) $\rho = a\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ (спираль Архимеда);

и) $\rho = a(1 + \cos \varphi);$

к) $\rho = a\sqrt{\rho} \quad (0 \leq \rho \leq 5).$

29. Докажите, что длина эллипса $x = a \sin t, y = b \cos t$ равна длине синусоиды $y = c \sin$

$(x/b), 0 \leq x \leq 2\pi b, c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Дайте геометрическую иллюстрацию этого результата, связав длины эллипса и синусоиды с сечением цилиндра $x^2 + y^2 = b^2$ плоскостью $z = (c/b)x$.

Вычисление площадей плоских фигур

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

30. Найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнениями в декартовых координатах:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x = x_0, x = x_1, y \geq 0 \quad (-a < x_0 < x_1 < a);$

б) $y = x^2, x + y = 2;$

в) $y = (x + 1)^2, x = \sin \pi y, y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1);$

г) $y^2 = x^2(a^2 - x^2);$

д) $y = e^{-x} |\sin x|, y = 0 \quad (x \geq 0)$ (за площадь этой неограниченной фигуры примите предел при $A \rightarrow +\infty$ площадей криволинейных трапеций, соответствующих изменению x от 0 до A).

31. Найдите площадь фигуры, граница которой задана параметрически (предварительно нарисуйте эскиз фигуры):

- а) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $x = a$, $y \leq 0$ (развертка круга);
 б) $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

32. Найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнением в полярных координатах:

- а) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);
 б) $\rho = a \sin 3\varphi$ (трилистник);
 в) $\rho = 3 + 2 \cos \varphi$;
 г) $\rho^2 + \varphi^2 = 1$.

33. Перейдя к полярным координатам, найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнением:

- а) $x^3 + y^2 = 3axy$ (лист Декарта);
 б) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемниската Бернулли).

Вычисление объемов тел

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

34. Найдите объем усеченного конуса, основания которого ограничены эллипсами с полуосями A , B и a , b , а высота равна h .

35. Тело представляет собой множество точек $M(x, y, z)$, где $0 \leq z \leq 1$. При этом $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, если z — рациональное число, и $-1 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 0$, если z — иррациональное

число. Докажите, что объем этого тела не существует, хотя $\int_0^1 S(z) dz = 1$.

36. Найдите объемы тел, поверхности которых заданы уравнениями:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = (c/a)x$, $z = 0$;

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$;

г) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$;

д) $x^2 + y^2 + a^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ (пересечение указанных сферы и цилиндра образует два тела. Найдите объем так называемого тела Вивиани, вырезаемого цилиндром из сферы. Получив ответ, обратите внимание на его структуру: если из полусферы удалить тело Вивиани, то объем оставшейся части выражается через радиус сферы без иррациональных коэффициентов, в частности без π).

37. Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными вращением следующих кривых:

а) $y = b(x/a)^{2/3}$ ($0 \leq x \leq a$) вокруг оси Ox ;

б) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси Ox ;

в) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ вокруг оси Oy ;

г) $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$) вокруг оси Ox ;

д) $y = \sin x$, $y = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$) вокруг оси Oy ;

е) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) вокруг оси Ox ;

ж) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) вокруг оси Oy .

Физические приложения определенного интеграла

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Найдите статистический момент и момент инерции полуокружности радиуса a относительно диаметра этой полуокружности.

39. Найдите статический момент дуги параболы $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq p/2$) относительно прямой $x = p/2$.

40. Найдите статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания.

41. Найдите моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a и b относительно ее главных осей.

42. Найдите момент инерции однородного круга радиуса R и массы M относительно его диаметра.

43. Докажите *первую теорему Гульдена*: площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости кривой, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описываемой центром тяжести кривой.

44. Докажите *вторую теорему Гульдена*: объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры.

45. Найдите объем "баранки", полученной вращением окружности $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ вокруг оси Oy .

46. Найдите координаты центра тяжести дуги окружности $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$).

47. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $ax = y^2$, $ay = x^2$ ($a > 0$).

48. Найдите координаты центра тяжести однородного полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$.

49. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Несобственные интегралы I и II рода

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Вычислите

1. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

2. $\int_0^1 \ln x dx$

3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

4. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$

2. Исследуйте сходимость

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} dx$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^3 \sqrt{x}} dx$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^4 \sqrt{x}} dx$

Признаки сходимости несобственных интегралов

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Исследуйте сходимость интеграла:

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

6. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

7. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$.

Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

10. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+4} dx,$

2. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx,$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(e^x)}{x^3 + 4} dx,$

4. $\int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx.$

11. Определите, при каких значениях параметра p интеграл сходится абсолютно и при каких – условно.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx,$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx.$