

Криволинейные интегралы первого рода

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

а) $\int_L (x + y) dl$, где L – граница треугольника с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(0, 0)$;

б) $\int_L y^2 dl$, где L – арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

в) $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, где L – граница кругового сектора $\{(r, \varphi): 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\}$, r и φ – полярные координаты;

г) $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$;

д) $\int_L z dl$, где L – коническая винтовая линия $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq t_0$;

е) $\int_L x^2 dl$, где L – окружность
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

2. Найдите массу материальной кривой L с линейной плотностью $\rho(x, y, z)$, если:

а) $L: x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, $0 \leq t \leq \ln 3$; $\rho(x, y, z) = \rho_0$;

б) $L: x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(3, 3, 2)$, $\rho(x, y, z) = \rho_0$;

в) L – половина дуги эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, для которой $y < 0$, $\rho(x, y) = -y$;

г) $L: x = t$, $y = t^2/2$, $z = t^3/3$, $0 \leq t \leq 1$, $\rho(x, y, z) = \sqrt{2y}$.

3. Найдите координаты центра тяжести:

а) однородной меньшей дуги окружности $x^2 + y^2 = 4$, соединяющей точки $A(2, 0)$ и $B(-1, \sqrt{3})$;

б) контура однородного сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

4. Найдите статические моменты дуги L астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, относительно осей координат, если ее линейная плотность $\rho(x, y) = 1$.

- 5.** Найдите полярный момент инерции однородной кривой L плотности ρ_0 относительно точки $O(0, 0)$, если:
- а) L – контур квадрата $\{(x, y): \max(|x|, |y|) = a\}$;
- б) L – контур правильного однородного треугольника плотности ρ_0 с вершинами в точках, заданных полярными координатами $P(a, 0)$, $Q(a, 2\pi/3)$, $R(a, 4\pi/3)$.
- 6.** Найдите моменты инерции относительно осей координат одного витка однородной винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t/(2\pi)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, если ее плотность равна ρ_0 .
- 7.** Найдите проекции на оси координат силы, с которой материальная однородная полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, массы M притягивает материальную точку $O(0, 0)$ массы m .

Криволинейные интегралы второго рода

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

В упр. 8–18 вычислите криволинейные интегралы второго рода. Для незамкнутых кривых, заданных параметрически (уравнением $y = y(x)$), направление обхода соответствует возрастанию параметра t (переменной x).

- 8.** $\int_{OA} x \, dy - y \, dx$, где $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, если: а) OA – отрезок прямой; б) OA – дуга параболы, осью которой является ось Oy ; в) OA – ломаная линия, состоящая из отрезка OB оси Ox и отрезка BA , параллельного оси Oy .

- 9.** $\int_{OA} x \, dx - y \, dy$, где OA – кривые из пп. а), б) и в) упр. 8.

- 10.** $\int_L (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$, где L – дуга параболы: $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

- 11.** $\oint_L (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$, где L – кривая $y = 1 - |1 - x|$, $0 \leq x \leq 2$.

- 12.** $\oint_L (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

13. $\int_L (2-y) dx + x dy$, где L – арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

14. $\oint_L \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

15. $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, где L – граница квадрата с вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$.

16. $\int_L y dx + z dy + x dz$, где L – виток винтовой линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

17. $\int_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x \tan \alpha$, $\alpha \in (0, \pi/2)$; обход окружности совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, -2a, 0)$, $a > 0$.

18. $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где L – кривая Вивиани $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ ($z \geq 0$, $a \geq 0$), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$.

19. Пусть $\mathbf{F}(M)$ – сила, с которой материальная точка массы m , помещенная в начало координат $O(0, 0)$, притягивает точку массы 1, находящуюся в точке $M(x, y)$. Найти работу силы притяжения $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки массы 1 вдоль кривой AB , где

AB – часть эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, при $x \geq 0$, $z \geq 0$, $A(0, 3)$, $B(2, 0)$.

20. Пусть $\mathbf{c} = \{-xy, y^2/2\}$ – скорость плоского потока жидкости в точке $M(x, y)$. Вычислить количество жидкости, вытекающее за единицу времени из области $G = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq 1\}$.

21. Вычислить работу силы $\mathbf{F}$ вдоль кривой AB , если:

а) $\mathbf{F} = \{y, -x\}$, AB – окружность $x^2 + y^2 = 1$, пробегаемая по ходу часовой стрелки от точки

$A(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ до точки $B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$;

б) $\mathbf{F} = \{z, -x, y\}$, AB – виток винтовой линии $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $z = ct$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $A(a, 0, 0)$, $B(a, 0, 2\pi c)$.

22. Вычислить работу силы $\mathbf{F}$ вдоль замкнутого контура L в положительном направлении, если:

- а) $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y\}$, L – треугольник с вершинами $A(1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(3, -1)$;
 б) $\mathbf{F} = \{x + y, y - x\}$, L – эллипс $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$.

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

23. Вычислите криволинейные интегралы второго рода, применив формулу Грина:

а) $\oint_L xy^2 dy - x^2 dx$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$;

б) $\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy$, где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

в) $\oint_L e^{-x^2+y^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$;

г) $\int_{AB} (\varphi(y)e^x - py) dx + (\varphi'(y)e^x - p) dy$, где AB – кусочно гладкая кривая, соединяющая точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, не пересекающая отрезок AB в его внутренних точках и ограничивающая вместе с отрезком AB область площади S , а функция $\varphi(y)$ имеет непрерывную производную.

24. На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы $I_1 = \int_{AmB} (x + y)^2 dx$

$-(x - y)^2 dy$ и $I_2 = \int_{AnB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, где AmB – отрезок, соединяющий точки $A(1, 1)$ и $B(2, 6)$, а AnB – дуга параболы, проходящей через точки A , B и начало координат?

25. С помощью криволинейных интегралов вычислите площади областей, ограниченных следующими кривыми:

а) эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

б) параболой $(x + y)^2 = 2ax$ ($a > 0$) и осью Ox ;

в) гиперболой $y = 1/x$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 2$;

г) окружностью $x^2 + y^2 = 4$ и параболой $x^2 = 2 - y$ (область содержит начало координат).

26. Вычислите интеграл $I = \oint_L (x \cos \alpha + y \cos \beta) dl$, где L – замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область площади S ; α и β – углы между вектором внешней нормали $\mathbf{n}$ к кривой L в точке $M(x, y)$ и осями Ox и Oy .

27. Докажите, что если функция $u(x, y)$ имеет в замкнутой области G непрерывные производные второго порядка, то справедлива формула

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_G u \Delta u dx dy + \oint_L u \frac{\partial u}{\partial n} dl,$$

где L – гладкий контур, ограничивающий область G .

28. Докажите, что подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции, и вычислите криволинейные интегралы:

а) $\int_{AB} x dy + y dx$, где $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$;

б) $\int_{AB} (x + y) dx + (x - y) dy$, где $A(0, 1)$, $B(2, 3)$;

в) $\int_{AB} \frac{y dx - x dy}{x^2}$, где $A(2, 1)$, $B(1, 2)$, AB – кривая, не пересекающая ось Oy ;

г) $\int_{AB} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где $A(1, 0)$, $B(6, 8)$, AB – кривая, не проходящая через начало координат;

д) $\int_{AB} x dx + y^2 dy$, где $A(1, 1)$, $B(2, 3)$

е) $\int_{M_1 M_2} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, а точка $M_2(x_2, y_2)$ – на окружности $x^2 + y^2 = b^2$.

29. Выразите следующие криволинейные интегралы через определенный интеграл:

а) $\int_{AB} f(x+y)(dx+dy)$, где $A(0, 0)$, $B(a, b)$, а $f(t)$ – непрерывная функция;

б) $\int_{M_1 M_2} f(\sqrt{x^2+y^2})(x dx + y dy)$, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а $f(t)$ – непрерывная функция.

30. Выразите криволинейный интеграл $\int_{M_1 M_2} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, где $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, а $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – непрерывные функции, через сумму определенных интегралов.

31. Найдите функцию $u(x, y)$, если:

а) $du = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$;

б) $du = \frac{\partial^{n+m+1} z}{\partial x^{n+1} \partial y^m} dx + \frac{\partial^{n+m+1} z}{\partial x^n \partial y^{m+1}} dy$.