Двойные интегралы

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

---

1. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами, если: G
а) G – треугольник с вершинами (1, 1), (4, 1), (4, 4);
б) G – треугольник с вершинами (2, 1), (5, 2), (3, 7);
в) G – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$;
г) G – круг $x^2 + y^2 \le 2x - 4y + 4$;
д) G – треугольник со сторонами, лежащими на прямых $y = 2x$, $y = 3x$, $x = 4$;
е) G – трапеция с вершинами (−1, 4), (5, 4), (1, 1), (4, 1);
ж) G – трапеция с вершинами (−2, 0), (0, 6), (0, 3), (−1, 0);
з) G – трапеция с вершинами (−2, 3), (0, 6), (3, −3), (0, −3);
и) G – кольцо $1 \le (x - 1)^2 + y^2 \le 4$;
к) G – область, ограниченная кривыми $x^2 - 2x + y^2 = 0$ и $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2$.

2. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\,dx$;

б) $\int\limits_e^{e^2} dx \int\limits_{\ln x}^{\ln x^2} f(x, y)\,dy$;

в) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x, y)\,dy$;

г) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y)\,dy$;

д) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2y-1}^{y^2} f(x, y)\,dx$;

е) $\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2}-x} f(x, y)\,dy$;

ж) $\int\limits_{1/2}^1 dy \int\limits_{-\sqrt{3/4+y-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

3. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint\limits_G (x - y)\, dx\, dy$, где G – треугольник с вершинами (1, 1), (4, 1), (4, 4);

б) $\iint\limits_G x\, dx\, dy$, где G – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$;

в) $\iint\limits_G 2|x|\, dx\, dy$, где G – трапеция с вершинами (−1, 4), (5, 4), (1, 1), (4, 1).

4. Перейдите к полярным координатам в двойном интеграле $\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$ и сведите его к повторному двумя способами, если:
а) G – круг $x^2 + y^2 \le a^2$;
б) G – круг $x^2 + y^2 \le 2y$;
в) G – кольцо $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$;
г) G – область, ограниченная кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \ge 0$;
д) G – треугольник со сторонами, лежащими на прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$;
е) G – область, ограниченная кривыми $x^2 = ay$, $y = a$ ($a > 0$).

5. В следующих интегралах перейдите к полярным координатам, а затем сведите интеграл к повторному двумя способами:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy$;

б) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y}^{\sqrt{3}y} f(x^2 + y^2)\, dx$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy$.

6. Перейдите к новым переменным u, v в интеграле:

а) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{2-y}^{3-y} f(x + y, x - y)\, dx$, если $u = x + y$, $v = x - y$;

б) $\int\limits_2^3 dx \int\limits_{3x}^{4x} f(y/x)\, dy$, если $u = x$, $v = y/x$.

7. Докажите, что замена переменных $x + y = u$, $y = uv$ переводит треугольник, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$, $y = 1 - x$, в квадрат $\{(u, v)\colon 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$.

8. Найдите замену переменных $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, при которой область G, ограниченная кривыми $xy = 1$, $xy = 4$, $x - 2y - 2 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ ($x > 0$, $y > 0$), является образом прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат на плоскости (u, v).

9. Вычислите двойные интегралы, введя обобщенные полярные координаты:

а) $\iint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy$, где G – область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\iint\limits_G \left(\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}}\right)^3 dx\, dy$, где G – область, ограниченная кривыми $x = 1$, $y = -1$, $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}} = 1$;

в) $\iint\limits_G x\, dx\, dy$ и $\iint\limits_G x^2\, dx\, dy$, где G – область, ограниченная астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

10. Вычислите двойные интегралы:

а) $\iint\limits_G x\, dx\, dy$, где G – область, ограниченная кривой $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$;

б) $\iint\limits_G (|x| + |y|)\, dx\, dy$, где $G = \{(x, y): |x| + |y| \le 1\}$;

в) $\iint\limits_G xy\, dx\, dy$, где $G = \{(x, y): x^4 + y^4 \le 1\}$;

г) $\iint\limits_G (x + y)\, dx\, dy$, где G – область, ограниченная кривыми $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:
а) $xy = a^2$, $x + y = 2{,}5a$ ($a > 0$);
б) $(2x - 3y)^2 + x^2 = 3$;
в) $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$ ($x > 0$, $y > 0$).

12. Введя полярные координаты, найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:
а) $(x^2 + y^2)^2 = -2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = a^2$ ($x^2 + y^2 \ge a^2$);
б) $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$, $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$, $x^2 + y^2 \le a^2$).

13. Введя обобщенные полярные координаты, найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$;
б) $(x+y)^5 = 6x^2y^2$;
в) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2+y^2$;
г) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = x/3 + y/2$;
д) $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2}$, $x = 1$, $y = -1$.

14. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2$;
б) $z = \sin\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = \pi^2$;
в) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$.

15. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми:
а) $x + y = 4$, $y = 0{,}5x^2$;
б) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = x/3 + y/2$;
в) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ $(x > 0, y > 0)$.

16. Найдите координаты центра тяжести круглой пластинки $\{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2\}$, если ее плотность в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию от точки M до точки $A(a, 0)$.

17. Найдите моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy однородной пластинки с плотностью $\rho = \rho_0$, ограниченной кривыми:
а) $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$ $(a > 0, b > 0)$;
б) $y = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$;
в) $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(0 \le x \le a)$;
г) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

18. Найдите моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy пластинки с плотностью $\rho = xy$, ограниченной кривыми:
а) $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$ $(a > 0, b > 0)$;
б) $y = 0$, $y = x$, $y = 2 - x$.

19. Шар радиуса a погружен в жидкость постоянной плотности ρ, причем центр шара находится на расстоянии h от уровня жидкости и $h \ge a$. Найдите силы давления $p_в$ и $p_н$ на верхнюю и нижнюю полусферы этого шара.

20. Докажите, что если в плоскости, где расположена пластинка G массы m, взяты две параллельные оси x и x' на расстоянии a друг от друга, причем первая из них проходит через центр тяжести пластинки G, то моменты инерции пластинки G относительно этих осей связаны соотношением $I_{x'} = I_x + ma^2$.

Тройные интегралы

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

---

21. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ к последовательному вычислению трех определенных интегралов шестью способами, если:

а) T – область, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б) T – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$);

в) T – четырехугольная пирамида с вершинами (−2, 0, 0), (0, −2, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 4);

г) T – область, ограниченная поверхностями $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ ($b > a > 0$).

22. Измените порядок интегрирования (различными способами) в интегралах:

а) $\int\limits_0^{1/a} dx \int\limits_0^{1-ax} dy \int\limits_0^{ax+y} f(x, y, z)\, dz$;

б) $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{2x^2+3y^2} f(x, y, z)\, dz$;

в) $\int\limits_{-1}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \int\limits_{\sqrt{y^2+z^2}}^{1} f(x, y, z)\, dx$;

г) $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{x} dy \int\limits_0^{xy} f(x, y, z)\, dz$.

23. Вычислите интегралы:

а) $\iiint\limits_T xz\, dx\, dy\, dz$, если T – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ ($z \geq 0$);

б) $\iiint\limits_T (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$, если T – область, ограниченная поверхностями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

24. Перейдите к сферическим координатам в интеграле

$$\iiint\limits_T f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\,dx\,dy\,dz,$$

где T – область, ограниченная поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x = y$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, и сведите полученный интеграл к последовательному вычислению трех определенных интегралов шестью способами.

25. Перейдите к сферическим координатам и вычислите интегралы:

а) $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, где T – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

б) $\int\limits_{-3}^{3} x^2 dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y^2\,dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} z\,dz.$

26. Перейдите к цилиндрическим координатам и вычислите интегралы:

а) $\iiint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, где T – область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z$, $z = 1$;

б) $\int\limits_0^3 z dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} y^2\,dy \int\limits_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} x^2\,dx.$

27. Выбрав подходящую замену переменных, вычислите интегралы:

а) $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$, где T – область, ограниченная сферой $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$;

б) $\iiint\limits_T \left(\frac{8z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx\,dy\,dz$, где T – область, ограниченная эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

в) $\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz$, где T – область, ограниченная поверхностями $z = y^2$, $z = 4y^2$, $z = x$, $z = 3x$, $z = 3$ ($y > 0$).

28. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $x + y + z = 1$, $x + y - z = -1$, $-x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$, $z = 0$;

б) $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \sqrt{\frac{z}{5}} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

в) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ ($b > a > 0$).

29. Перейдите к цилиндрическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $2z = 2x^2 + y^3/3$, $4x^2 + y^2/9 = 1$, $z = 0$;
б) $y^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = x^2$, $x = b$ ($b > a > 0$).

30. Перейдите к сферическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z^2 = x^2 + y^2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = x$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$);
б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

31. Перейдите к обобщенным сферическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
а) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{z}{c}$;
б) $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{4} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$ ($z > 1$);
в) $(x/5 + 6y + z/2)^2 = 3z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$).

32. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $x + y + z = 1$, если плотность тела изменяется по закону:
а) $\rho = \rho_0$; б) $\rho = \rho_0|1 + x|$; в) $\rho = \rho_0 y^2|1 + x|$ ($\rho_0 = \text{const}$).

33. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:
а) $x^2 + z^2 = a^2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ ($z \geq 0$);
б) $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$);
в) $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = p/2$, $z = 0$ ($p > 0$);
г) $z = x^2 + y^2$, $z = (x^2 + y^2)/2$, $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = 1$, $x - y = -1$.

34. Найдите координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$, $z = 2$, если плотность тела изменяется по закону:
а) $\rho = \rho_0$; б) $\rho = \rho_0[(x + 2)^2 + (y - 1)^2]$; в) $\rho = \rho_0 z(x^2 + y^2)$ ($\rho_0 = \text{const}$).

35. Найдите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностями:
а) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$);
б) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3$;
в) $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

36. Найдите моменты инерции относительно координатных плоскостей тела:

а) плотности $\rho = \dfrac{\rho_0}{x^2 + y^2 + z^2}$ (ρ_0 = const), ограниченного поверхностью $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) - 1$;

б) плотности $\rho = \dfrac{35}{128} z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$.

37. Найдите моменты инерции относительно осей координат и начала координат однородного тела плотности ρ_0, ограниченного поверхностями:

а) $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

38. Определите момент инерции относительно начала координат тела плотности $\rho = \rho_0 (x^2 + y^2 + z^2)$, где ρ_0 = const, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$.

39. Пусть T – однородный цилиндр плотности ро с высотой h и радиусом основания R. Найдите силу притяжения этим цилиндром материальной точки массы m_0, находящейся в центре основания цилиндра.