Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Примеры решения задач

1. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = xy$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках (1, 1) и (1, −1).

Решение. Линии уровня функции $u = xy$ задаются уравнением $xy = C$, где C − произвольная постоянная, т. е. представляют собой семейство гипербол $y = C/x$, а также две прямые, $x = 0$ и $y = 0$ (рис. 75). Далее,

$$\mathrm{grad}\, u = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j},$$

$$\mathrm{grad}\, u|_{(1,\,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathrm{grad}\, u|_{(1,\,-1)} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

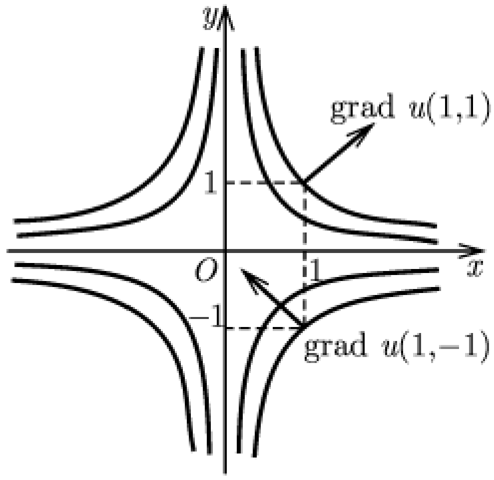

Рис. 75

На рис. 75 видно, что в указанных точках grad u перпендикулярен линиям уровня, проходящим через точки. В точке (1, 1) функция $u = xy$ быстрее всего возрастает в направлении от начала координат по биссектрисе I квадранта, и скорость ее возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial u}{\partial l}(1,\,1) = |\mathrm{grad}\, u|_{(1,\,1)} = \sqrt{2}.$$

В точке (1, −1) функция $u = xy$ возрастает быстрее всего в направлении к началу координат по биссектрисе IV квадранта, и скорость ее возрастания в этом направлении также равна $\sqrt{2}$.

2. Найти градиент скалярного поля $u = xyz$ в точке $M(-2, 3, 4)$. Чему равна в этой точке производная поля и в направлении вектора $\mathbf{a} = \{3, -4, 12\}$?

Решение. Согласно определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} u(M) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right\} =$$

$$= \{xy, xz, yz\}_{M(-2,\,3,\,4)} = \{12, -8, -6\}.$$

Далее, единичным вектором, сонаправленным с $\mathbf{a}$, является вектор $\mathbf{1} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = 1/13\ \{3, -4, 12\}$. По формуле (8) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = 3/12 \cdot 12 + 4/13 \cdot 8 - 12/13 \cdot 6 = -4/13.$$

---

3. Найти векторные линии векторного поля $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u$, где $u = xyz$.

Решение. Для векторного поля $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ уравнения (5), определяющие векторные линии, имеют вид

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \text{ или } x\,dx = y\,dy \text{ и } y\,dy = z\,dz,$$

откуда

$$x^2/2 = y^2/2 + C_1, \qquad (17)$$

$$y^2/2 = z^2/2 + C_2. \qquad (18)$$

Уравнения (17) и (18) определяют два семейства гиперболических цилиндров с образующими, параллельными соответственно осям Oz и Ox, а также (при $C_1 = C_2 = 0$) две пары плоскостей, $x = \pm y$ и $y = \pm z$.

Любая векторная линия поля $\mathbf{a}(M)$ является линией пересечения двух поверхностей, получающихся из семейств (17) и (18) при некоторых фиксированных значениях C_1 и C_2.

Например, при $C_1 = C_2 = 0$ линия пересечения плоскостей $x = y$ и $y = z$ представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Ее уравнения имеют вид $x = y = z$. В точках этой прямой вектор поля есть $\mathbf{a}(M) = \{x^2, x^2, x^2\}$.

---

4. Найти градиент сферического скалярного поля $u = \varphi(r)$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (т. е. зависящего только от расстояния точки (x, y, z) до начала координат).

Решение. Согласно определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\varphi(r), \frac{\partial}{\partial y}\varphi(r), \frac{\partial}{\partial z}\varphi(r) \right\} =$$

$$= \left\{ \varphi'(r)\frac{x}{r}, \varphi'(r)\frac{y}{r}, \varphi'(r)\frac{z}{r} \right\} = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Отметим, что из соотношения

$$\mathbf{a} = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} = \operatorname{grad} \varphi(r)$$

следует, что векторное поле $\mathbf{a} = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ является потенциальным, а функция $\varphi(r)$ − его потенциал.

---

5. Доказать, что кулоновское поле $\mathbf{a} = \frac{C}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$ ($C = \mathrm{const}$) потенциально, и найти его потенциал.

Решение. Кулоновское поле $\mathbf{a} = \frac{C}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$ является частным случаем потенциального поля $\varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$, рассмотренного в предыдущей задаче и имеющего своим потенциалом функцию $\varphi(r)$. Поэтому, полагая $\varphi'(r) = \frac{C}{r^2}$, находим $\varphi(r) = -C/r + C_1$, где C_1 − произвольная постоянная.

Итак, кулоновское поле потенциально и представимо в виде

$$\mathbf{a} = \frac{C}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \operatorname{grad} \varphi(r),$$

где $\varphi(r) = C_1 - C/r$ его потенциал. Отметим, что потенциал любого векторного потейциального поля определен неоднозначно − с точностью до постоянного слагаемого. Это слагаемое не влияет на координаты векторного поля, получающиеся дифференцированием потенциала, и может быть выбрано любым удобным образом, исходя из дополнительных соображений.

---

6. Найти дивергенцию векторного поля $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ в точке $M(-2, 4, 5)$.

Решение. Согласно определению дивергенции векторного поля $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ находим

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) =$$

$$= (1 + 2y + 3z^2)_{M(-2,\,4,\,5)} = 1 + 8 + 75 = 84.$$

---

7. Найти дивергенцию сферического векторного поля $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$. Определить вид функции $f(r)$, для которой поле $\mathbf{a}$ является соленоидальным.

Решение. Данное поле в координатах имеет вид $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}$. Согласно определению дивергенции находим

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) =$$

$$= f'(r)\frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r)\frac{z^2}{r} + f(r) = f'(r)\,r + 3f(r).$$

Из условия соленоидальности $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ следует, что $f'(r)\,r + 3f(r) = 0$. Далее, разделяя переменные, имеем

$$\frac{df}{f} = -\frac{3\,dr}{r}.$$

После интегрирования получаем

$$\ln|f| = -3\ln r + \ln C,$$

откуда $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$, где C − произвольная постоянная.

Итак, дивергенция сферического векторного поля $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$ равна нулю только в том случае, если $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$, т. е. только в случае кулоновского поля $\mathbf{a} = \dfrac{C}{r^3}\mathbf{r}$. Это поле является соленоидальным в любой области, не содержащей начала координат.

---

8. Дано векторное поле $\mathbf{a} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в точке $M(1, 2, 3)$.

Решение. Согласно определению ротора имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(2y - 0) + \mathbf{j}\,(2z - 0) + \mathbf{k}\,(2x - 0)_M = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

---

9. Найти ротор сферического векторного поля $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$.

Решение. Запишем данное поле в координатах: $\mathbf{a} = f(r)\,\mathbf{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}$. По определению ротора находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(r)z - \frac{\partial}{\partial z} f(r)y\right) +$$

$$+\,\mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z} f(r)x - \frac{\partial}{\partial x} f(r)z\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(r)y - \frac{\partial}{\partial y} f(r)x\right) =$$

$$= \mathbf{i}\,f'(r)\left(\frac{yz}{r} - \frac{zy}{r}\right) + \mathbf{j}\,f'(r)\left(\frac{zx}{r} - \frac{xz}{r}\right) + \mathbf{k}\,f'(r)\left(\frac{xy}{r} - \frac{yx}{r}\right) = 0.$$

Итак, ротор любого сферического векторного поля равен нулю, т. е. сферическое векторное поле является безвихревым.

---

10. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ соленоидально в области G. Доказать, что его можно представить в виде $\mathbf{a}(M) = \operatorname{rot} \mathbf{b}(M)$, и найти векторный потенциал $\mathbf{b}(M)$.

Решение. Пусть $\mathbf{a} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ и $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Будем искать векторный потенциал поля $\mathbf{a}(M)$ в виде $\mathbf{b} = b_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + b_2(x, y, z)\,\mathbf{j}$. Из условия $\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{a}$ получаем

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial b_2}{\partial z}\,\mathbf{i} + \frac{\partial b_1}{\partial z}\,\mathbf{j} + \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k},$$

откуда

$$\frac{\partial b_2}{\partial z} = -P, \quad \frac{\partial b_1}{\partial z} = Q, \quad \left(\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y}\right) = R. \tag{19}$$

Интегрируя первые два уравнения (19), находим

$$b_2 = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, z)\,dz + \varphi(x, y), \quad b_1 = \int_{z_0}^{z} Q(x, y, z)\,dz + \psi(x, y)$$

где z_0 − аппликата какой-нибудь точки $(x_0, y_0, z_0) \in G$, а $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ − произвольные функции. Положим $\psi(x, y) = 0$, а функцию $\varphi(x, y)$ выберем так, чтобы выполнялось третье равенство (19), т. е.

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z)\,dz + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z)\,dz = R. \tag{20}$$

Покажем, что такой выбор функции $\varphi(x, y)$ возможен. Действительно, учитывая равенство $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial z}$ (оно следует из условия div **a** = 0), получаем из (20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = R(x, y, z) - \int_{z_0}^{z} (x, y, z)\,dz =$$

$$= R(x, y, z) - [R(x, y, z) - R(x, y, z_0)] = R(x, y, z_0),$$

откуда $\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} R(x, y, z_0)\,dx$.

Итак, искомый векторный потенциал **b**(M) имеет координаты

$$b_1 = \int_{z_0}^{z} Q(x, y, z)\,dz, \quad b_2 = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, z)\,dz + \int_{x_0}^{x} R(x, y, z_0)\,dx, \quad b_3 = 0.$$

---

11. Пусть $u(M)$ и $v(M)$ − скалярные поля. Доказать справедливость формулы grad $(uv) = v$ grad $u + u$ grad v.

Решение. Согласно правилу (10) вычисления оператора Гамильтона от произведения функций имеем

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}\, v) + \nabla(u\, \overset{\downarrow}{v}) = v\nabla u + u\nabla v = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v.$$

---

12. Пусть $u(M)$ − скалярное поле, $\mathbf{a}(M)$ − векторное поле. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{div} \mathbf{a}. \tag{21}$$

Решение. Используя свойства оператора Гамильтона, получаем

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\nabla \cdot u\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \overset{\downarrow}{u}\, \mathbf{a}) + (\nabla \cdot u\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\nabla u \cdot \mathbf{a}) + u(\nabla \mathbf{a}) =$$

$$= (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

---

13. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a}, \tag{22}$$

где $u(M)$ − скалярное поле, $\mathbf{a}(M)$ − векторное поле.

Решение. Имеем

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\nabla \cdot u\mathbf{a}] = [\nabla \cdot \overset{\downarrow}{u}\, \mathbf{a}] + [\nabla \cdot u\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] =$$

$$= [\nabla u \cdot \mathbf{a}] + u[\nabla \mathbf{a}] = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

---

14. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \tag{23}$$

где $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{b}(M)$ − векторные поля.

Решение. Учитывая выражение ротора с помощью оператора ∇ и правило (10), находим

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = [\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]] + [\nabla[\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]]. \tag{24}$$

Преобразуя первое двойное векторное произведение в (24) по формуле $[\mathbf{p}[\mathbf{qs}]] = \mathbf{q}(\mathbf{ps}) - \mathbf{s}(\mathbf{pq})$, получаем

$$[\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]] = \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\nabla\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \mathbf{b}(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}. \tag{25}$$

Отметим, что перестановка сомножителей в скалярном произведении $(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\nabla\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{a}})$ сделана для того, чтобы оператор ∇ действовал на стоящий за ним вектор $\mathbf{a}$.

Аналогично для второго слагаемого в (24) имеем

$$[\nabla[\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]] = \mathbf{a}(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}(\nabla\mathbf{a}) = \mathbf{a}(\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) - (\mathbf{a}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \tag{26}$$

Складывая (25) и (26), получаем формулу (23).

---

15. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \tag{27}$$

где $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{b}(M)$ − векторные поля.

Решение. Согласно правилу (10) имеем

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}). \tag{28}$$

Перепишем формулу $[\mathbf{p}[\mathbf{qs}]] = \mathbf{q}(\mathbf{ps}) - \mathbf{s}(\mathbf{pq})$ в виде $\mathbf{s}(\mathbf{pq}) = [\mathbf{p}[\mathbf{sq}]] + (\mathbf{ps})\mathbf{q}$. При этом мы переставили сомножители в произведении $[\mathbf{qs}]$, изменив знак векторного произведения.

Запишем с помощью этой формулы второе слагаемое в (28):

$$\nabla(\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}) = [\mathbf{a}[\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]] + (\mathbf{a}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{b}} = [\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \tag{29}$$

Аналогично для первого слагаемого в (28) имеем

$$\nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{b}\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = [\mathbf{b}[\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]] + (\mathbf{b}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathbf{a}} = [\mathbf{b}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}] + [\mathbf{b}\nabla]\mathbf{a}. \tag{30}$$

Складывая (29) и (30), получаем формулу (27).

Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Примеры решения задач

---

1. Доказать справедливость формулы

$$\mathrm{div}\ (u\ \mathrm{grad}\ v) = (\mathrm{grad}\ u \cdot \mathrm{grad}\ v) + u\ \Delta v, \tag{5}$$

где u и v – скалярные поля.

Решение. Используя оператор Гамильтона, получаем

$$\mathrm{div}\ (u\ \mathrm{grad}\ v) = (\nabla \cdot (u\ \nabla v)) = (\nabla u \cdot \nabla v) + u\nabla^2 v =$$

$$= (\mathrm{grad}\ u \cdot \mathrm{grad}\ v) + u\ \Delta v.$$

---

2. Доказать справедливость формулы

$$\Delta(uv) = v\ \Delta u + 2(\mathrm{grad}\ u \cdot \mathrm{grad}\ v) + u\ \Delta v, \tag{6}$$

где u и v – скалярные поля.

Решение. Используя формулы $\Delta u = (\nabla \cdot \nabla u)$, $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ и $(\nabla \cdot v\ \nabla u) = (\nabla u \cdot \nabla v) + v\ \nabla^2 u$, находим

$$\Delta(uv) = (\nabla \cdot \nabla(uv)) = (\nabla \cdot (v\ \nabla u + u\ \nabla v)) = (\nabla \cdot v\ \nabla u) + (\nabla \cdot u\ \nabla v) =$$

$$= (\nabla v \cdot \nabla u) + v\,\nabla^2 u + (\nabla u \cdot \nabla v) + u\,\nabla^2 v =$$

$$= v\,\nabla^2 u + 2\nabla u\,\nabla v + u\,\nabla^2 v = v\,\Delta u + 2(\text{grad}\,u \cdot \text{grad}\,v) + u\,\Delta v.$$

Отметим, что формулу (6) с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде

$$\nabla^2(uv) = v\,\nabla^2 u + 2(\nabla u \cdot \nabla v) + u\,\nabla^2 v$$

аналогично формуле второй производной произведения двух функций

$$(uv)'' = uv'' + 2u'v' + uv''.$$

---

3. Доказать, что для векторного поля **a** справедлива формула

$$\text{rot rot}\,\nabla = \text{grad div}\,\nabla - \Delta\mathbf{a}.$$

Решение. Используя формулу для двойного векторного произведения $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$ и полагая в ней $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \nabla$, получаем

$$\text{rot rot}\,\mathbf{a} = [\nabla[\nabla\mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a} = \text{grad div}\,\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}.$$

---

4. Вычислить $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, Δ − оператор Лапласа.

Решение. Учитывая равенство $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}$ и аналогичные равенства для $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$, получаем

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\right) =$$

$$= -\frac{r^3 - 3r^2\frac{x}{r}x}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2\frac{y}{r}y}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2\frac{z}{r}z}{r^6} =$$

$$= -\frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 \text{ при } r \neq 0.$$

Итак, функция $u = \frac{1}{r}$ является гармонической в любой области, где $r \neq 0$.

---

5. Доказать, что электрическое поле $\mathbf{E}(M, t)$ при $\mu = \varepsilon = 1$ удовлетворяет *телеграфному уравнению*

$$\Delta\mathbf{E} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

в области, где плотность зарядов равна нулю ($\rho = 0$).

Решение. Рассмотрим систему уравнений Максвелла при $\mu = \varepsilon = 1$, $\rho = 0$ (см. п. 9 из § 1):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0,\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}.\ (8) \tag{8}$$

Дифференцируя первое из уравнений (8) по времени и учитывая последнее уравнение, находим

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Вычисляя ротор от обеих частей второго из уравнений (8), получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{10}$$

В силу тождества $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$ и уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}. \tag{11}$$

Поэтому $\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \Delta\mathbf{E}$, и, следовательно, из (9) получаем уравнение (7).

Если ток проводимости отсутствует ($\sigma = 0$), то для электрического поля **E** получается волновое уравнение

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Для стационарного электрического поля $\mathbf{E}(M)$ оно переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \mathbf{E} = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) означает, что каждая координата вектора **E** является гармонической функцией в рассматриваемой области.

---

6. Разложить векторное поле $\mathbf{a} = (x - y)\,\mathbf{i} + (x + y)\,\mathbf{j} + (z + 2)\,\mathbf{k}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.

Решение. Как показано в п. 2, векторное поле **a** представимо в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, где $\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u$ − потенциальное поле, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \operatorname{grad} u$ − соленоидальное поле, причем u − решение уравнения Пуассона $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$.

Для данного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y) + \frac{\partial}{\partial z}(z + 2) = 3.$$

Уравнение $\Delta u = 3$ в прямоугольных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3.$$

Частным решением этого уравнения является, например, функция $u = 1/2(x^2 + y^2 + z^2)$. Для этой функции

$$\operatorname{grad} u = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \mathbf{r}.$$

Следовательно, данное поле **a** представимо в виде суммы потенциального поля

$$\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = \mathbf{r}$$

и соленоидального поля

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \operatorname{grad} u = [(x - y) - x]\,\mathbf{i} + [(x + y) - y]\,\mathbf{j} + [(z + 2) - z]\,\mathbf{k} =$$

$$= -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Непосредственно можно проверить, что векторное поле $\mathbf{a}_2$ является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 0.$$

Интегральные характеристики векторных полей

Примеры решения задач

---

1. Доказать, что поток постоянного векторного поля **a** через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность равен нулю.

Решение. Пусть Ф − замкнутая кусочно гладкая поверхность, ограничивающая область G. Согласно формуле Остроградского−Гаусса имеем

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = 0,$$

так как дивергенция постоянного поля **a** равна нулю. Следовательно, поток постоянного векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю: $\iint_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS = 0$.

---

2. Найти поток радиуса-вектора $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ через произвольную замкнутую кусочно гладкую поверхность Ф, ограничивающую область G объема V.

Решение. Сначала найдем дивергенцию данного поля: $\operatorname{div} \mathbf{r} = 1 + 1 + 1 = 3$. Далее, используя формулу Остроградского−Гаусса, имеем

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{rn})\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \mathbf{r}\, dV = 3 \iiint_{G} dV = 3V.$$

Полученный результат дает формулу для вычисления объема области G с помощью поверхностного интеграла

$$V = 1/3 \iint_{\Phi} (\mathbf{rn})\, dS,$$

или, в прямоугольных координатах,

$$V = 1/3 \iint_{\Phi} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)\, dS,$$

где $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ − единичный вектор внешней нормали к поверхности Ф. Эта формула была приведена в § 5 из гл. XIV.

---

3. Вычислить поток электрического поля **E** точечного заряда *e*, помещенного в начале координат, через произвольную замкнутую кусочно гладкую поверхность, не проходящую через начало координат.

Решение. Векторное поле **E** точечного заряда *e*, находящегося в начале координат, имеет вид $\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OM}|$.

По определению, векторное поле **E** является соленоидальным в любой области *G*, где div **E** = 0. В п. 6 из § 1 было показано, что $\operatorname{div}\left(\frac{ke}{r^3}\mathbf{r}\right) = 0$ при $\mathbf{r} \neq 0$. Поэтому поле E(*M*) соленоидально в любой области *G*, не содержащей начала координат. Однако, как было отмечено в п. 3, величина потока соленоидального векторного поля через замкнутую поверхность Ф, расположенную в области *G*, существенно связана со свойством объемной односвязности области *G*. Рассмотрим два случая.

1. Пусть замкнутая кусочно гладкая поверхность Ф представляет собой границу объемно односвязной области *G*, не содержащей начала координат. Тогда условие div **E** = 0 выполняется во всех точках объемно односвязной области *G*, и в силу свойства соленоидального поля поток вектора **E** через поверхность Ф равен нулю.

2. Пусть замкнутая кусочно гладкая поверхность Ф представляет собой границу области *G*, содержащей внутри себя начало координат. Тогда поле **E** не является соленоидальным в области *G*, так как в начале координат div **E** = ∞. Если же выбросить из области *G* начало координат, то оставшаяся область не будет объемно односвязной. Для вычисления потока E через поверхность Ф введем сферу Φ_1 достаточно малого радиуса с центром в начале координат, целиком расположенную внутри *G*, и рассмотрим область G_1 между поверхностями Φ_1 и Ф. Условие div **E** = 0 выполнено для всех точек области G_1.

Применим к этой области формулу Остроградского−Гаусса. Тройной интеграл от дивергенции **E** по области G_1 равен нулю. Следовательно, равен нулю и полный поток поля **E** через поверхности Ф и Φ_2:

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{En})\, dS + \iint_{\Phi_1} (\mathbf{En})\, dS = 0 \qquad (11)$$

Вычислим поток поля **E** через сферу Φ_1:

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{En})\, dS = -4\pi ke$$

(см.). Знак минус означает, что внешняя к области G_1 нормаль на поверхности Φ_1 направлена к центру сферы Φ_1 (к началу координат) и, следовательно, противоположна вектору $\mathbf{r}$. Отметим, что поток $\mathbf{E}$ через сферу Φ_1 не зависит от ее радиуса, т. е. имеет одно и то же значение для сферы любого радиуса.

Возвращаясь к соотношению (11), находим поток поля $\mathbf{E}$ через поверхность Φ:

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{En})\, dS = -\iint_{\Phi_1} (\mathbf{En})\, dS = 4\pi ke.$$

Итак, поток электрического поля $\mathbf{E}$ через поверхность Φ равен либо нулю, либо $4\pi ke$, в зависимости от того, лежит точка, где помещен заряд, вне или внутри области, ограниченной поверхностью Φ.

---

4. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ через боковую поверхность Φ_1 конуса $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 \le h^2, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le h\}$ в сторону внешней нормали.

Решение. I способ. Поток $\iint_{\Phi_1} (\mathbf{an})\, dS$ поля $\mathbf{a}$ через поверхность Φ_1 можно вычислить по формуле (2), не пользуясь формулой Остроградского−Гаусса. Этот способ применялся ранее (см. пример 3 из § 3 гл. XIV). Здесь мы так делать не будем.

II способ. Чтобы сделать возможным применение формулы Остроградского−Гаусса для вычисления искомого потока, дополним заданную поверхность Φ_1 (боковую поверхность конуса) до замкнутой кусочно гладкой поверхности Φ основанием конуса − кругом Φ_2: $x^2 + y^2 \le h^2$, $z = h$.

Применим теперь формулу Остроградского−Гаусса к области G, ограниченной замкнутой поверхностью Φ:

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{an})\, dS + \iint_{\Phi_2} (\mathbf{an})\, dS = 2\iiint_{G} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (12)$$

На круге Φ_2 имеем $\mathbf{a} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + h^2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$; поэтому

$$\iint_{\Phi_2} (\mathbf{an})\, dS = \iint_{\Phi_2} h^2\, dS = h^2\, S(\Phi_2) = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Уравнение конической поверхности примет вид $z = \rho$. Таким образом,

$$2 \iiint_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho\, d\rho \int_\rho^h [\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + z]\, dz =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h [\rho(h - \rho)(\cos \varphi + \sin \varphi) + h^2/2 - \rho^2/2]\, \rho\, d\rho = \pi h^4/2.$$

Из формулы (12) следует, что искомый интеграл по боковой поверхности Φ_1 конуса равен разности тройного интеграла и поверхностного интеграла по кругу Φ_2:

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{an})\, dS = \pi h^4/2 - \pi h^4 = -\pi h^4/2.$$

Рассмотренный пример показывает, что применение формулы Остроградского−Гаусса для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность удобно в тех случаях, когда достаточно просто вычисляются поверхностный интеграл по поверхности, дополняющей данную поверхность до замкнутой поверхности Ф, и тройной интеграл от дивергенции векторного поля по области, ограниченной поверхностью Ф.

---

5. Вывести формулу Грина как частный случай формулы Стокса для поля $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ на плоскости.

Решение. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ как частный случай поля $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ при $R = 0$. Пусть поле $\mathbf{a} = \{P, Q, 0\}$ задано в плоской области G с границей L лежащей в плоскости Oxy. Единичная нормаль к области G совпадает с базисным вектором $\mathbf{k}$ оси Oz. Поэтому, применяя формулу Стокса (9) к полю $\mathbf{a}$ в области G, получим

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\, dS. \qquad (13)$$

Формула (13) является векторной формой формулы Грина. Вычислим ротор поля $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Учитывая также запись циркуляции в прямоугольных координатах, получаем уже знакомый вид формулы Грина

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dS.$$

Отметим, что по-прежнему условие rot **a** = 0 (т. е. в данном случае $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ обеспечивает потенциальность поля **a** лишь в поверхностно односвязной области. Такую область на плоскости мы назвали односвязной (см. § 3 из гл. XIII).

---

6. Доказать, что циркуляция постоянного векторного поля **a** вдоль любого замкнутого кусочно гладкого контура равна нулю.

Решение. Пусть L − замкнутый кусочно гладкий контур, Ф − кусочно гладкая поверхность, натянутая на L Согласно формуле Стокса (9) имеем $\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0$, так как ротор постоянного поля **a** равен нулю. Следовательно, циркуляция постоянного векторного поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю: $\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = 0$.

7. Найти циркуляцию плоского векторного поля $\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ вдоль произвольного кусочно гладкого контура L, лежащего в плоскости Oxy и ограничивающего область Ф площади S.

Решение. Сначала вычислим ротор данного поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{k}.$$

Далее, используя формулу Стокса и учитывая, что для области Ф $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, находим

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \iint_\Phi (2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\, dS = 2 \iint_\Phi dS = 2S.$$

Полученный результат дает формулу для вычисления площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S = 1/2 \oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}),$$

или, в прямоугольных координатах,

$$S = 1/2 \oint_L x\, dy - y\, dx.$$

Другой вывод этой формулы был получен в § 3 из гл. XIII.

---

8. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ вдоль замкнутого контура L, состоящего из отрезка винтовой линии $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и отрезка прямой, соединяющего точки $B(a, 0, 2\pi b)$ и $A(a, 0, 0)$, причем обход контура совершается так, что по отрезку прямой движение происходит от точки B к точке A.

Решение. Находим

$$\text{rot}\,\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{k}.$$

Пусть поверхность Φ, натянутая на контур L состоит из части Φ_1 цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ и круга Φ_2: $x^2 + y^2 \le a^2$, $z = 2\pi b$ (рис. 77). На цилиндрической поверхности Φ_1 имеем rot $\mathbf{a}$ □ $\mathbf{n}$, и поэтому (rot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0$. На поверхности Φ_2 имеем $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, и поэтому rot $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 2$.

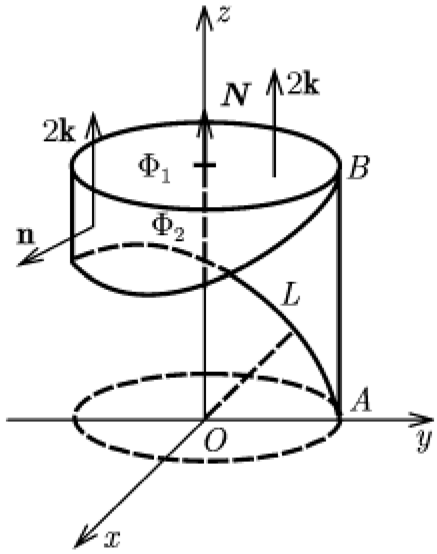

Рис. 77

Применяя к полю **a** формулу Стокса, получаем

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \iint_\Phi (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_{\Phi_1} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{\Phi_2} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0 + 2 \iint_{\Phi_2} dS = 2S(\Phi_2) = 2\pi a^2.$$

---

9. Найти работу силового поля $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. вдоль отрезка L_1 винтовой линии $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, 2\pi b)$.

Решение. I способ. Непосредственно вычисляя криволинейный интеграл второго рода, выражающий работу силового поля **F** вдоль кривой L_1 в заданном направлении, находим

$$\oint_{L_1} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} (-a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}) \times$$

$$\times (-a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + b\,\mathbf{k})\, dt = 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2.$$

II способ. Чтобы сделать возможным применение формулы Стокса для вычисления искомого интеграла, дополним заданный отрезок L_1 винтовой линии до замкнутой кусочно гладкой кривой L отрезком L_2 прямой, соединяющим точки $B(a, 0, 2\pi b)$ и $A(a, 0, 0)$.

Применяя формулу Стокса к контуру Lи любой кусочно гладкой поверхности Φ, натянутой на этот контур, имеем

$$\int_{L_1} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = \iint_{\Phi} (\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{14}$$

Повторяя выкладки предыдущего примера для вектора $\mathbf{a} = \mathbf{F}$, находим, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 2\mathbf{k}$ и

$$\iint_{\Phi} (\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})dS = 2\pi a^2.$$

Вычислим теперь работу силы $\mathbf{F}$ вдоль отрезка L_2 прямой от точки $B(a, 0, 2\pi b)$ до точки $A(a, 0, 0)$. На этой прямой $\mathbf{F} = a\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,

$$\int_{L_2} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = \int_{2\pi b}^{0} z\, dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{2\pi b}^{0} = -2\pi^2 b^2.$$

Из формулы (14) следует, что искомый интеграл (работа силы $\mathbf{F}$ вдоль кривой L_1) равен разности поверхностного интеграла (потока $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$ через поверхность Ф) и криволинейного интеграла по отрезку прямой L_2:

$$\int_{L_1} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = 2\pi a^2 - (-2\pi^2 b^2) = 2\,\pi a^2 + 2\pi^2 b^2.$$

Рассмотренный пример показывает, что применение формулы Стокса для вычисления работы силового поля (а также других криволинейных интегралов второго рода) вдоль незамкнутых кривых удобно в тех случаях, когда достаточно просто вычисляются криволинейный интеграл по кривой, дополняющей данную кривую до замкнутого контура, и поток ротора данного векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

---

10. Вершины D, B, A' куба $ABCDA'B'C'D'$ находятся соответственно в точках (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ вдоль ломаной $C'CDABB'A'D'$ (рис. 78).

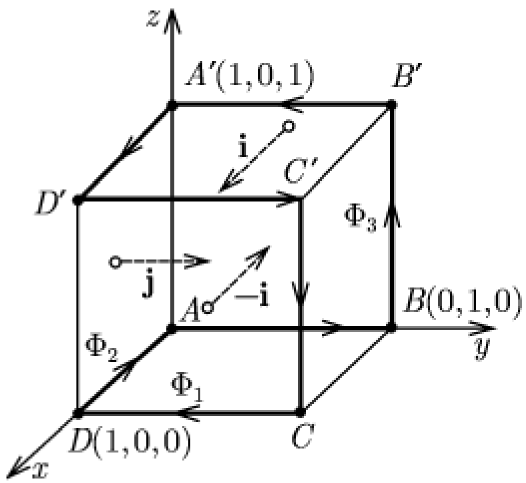

Рис. 78

Решение. Обозначим данную ломаную через L_1. Чтобы сделать возможным применение формулы Стокса для вычисления искомого интеграла $\int\limits_{L_1} (\mathbf{a}\,d\mathbf{r})$, дополним ломаную L_1 до замкнутой кривой L отрезком L_2 прямой, соединяющим точки D' и C. На контур L "натянем" кусочно гладкую поверхность Φ, состоящую из трех квадратов: $C'CDD'$, $D'DAA'$ и $A'ABB'$. Обозначим их соответственно через Φ_1 Φ_2, Φ_3.

Применяя формулу Стокса к контуру Lи поверхности Φ, имеем

$$\int\limits_{L_1} (\mathbf{a}\,d\mathbf{r}) + \int\limits_{L_2} (\mathbf{a}\,d\mathbf{r}) = \iint\limits_{\Phi_1} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS + \iint\limits_{\Phi_2} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS + \iint\limits_{\Phi_3} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS. \tag{15}$$

Далее, находим rot $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Единичные векторы нормалей на частях Φ_1 Φ_2, Φ_3 поверхности Φ с учетом направления обхода контура L имеют вид $\mathbf{n}(\Phi_1) = -\mathbf{i}$, $\mathbf{n}(\Phi_2) = \mathbf{j}$, $\mathbf{n}(\Phi_3) = \mathbf{i}$.

Вычислим поток rot **a** через поверхность Φ:

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}(\Phi_1))\,dS + \iint\limits_{\Phi_2} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}(\Phi_2))\,dS + \iint\limits_{\Phi_3} (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}(\Phi_3))\,dS =$$

$$= \iint\limits_{\Phi_1} dS - \iint\limits_{\Phi_2} dS - \iint\limits_{\Phi_3} dS = -1.$$

Найдем теперь циркуляцию поля **a** вдоль отрезка L_2 прямой от точки D' до точки C. На этой прямой $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{j}\,dy$ и

$$\int_{L_2} (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \int_0^1 dy = 1.$$

Из формулы (15) следует, что искомый интеграл $\int_{L_1} (\mathbf{a}\, d\mathbf{r})$ (циркуляции поля **a** вдоль кривой L_1) равен разности поверхностного интеграла (потока rot **a** через поверхность Ф) и криволинейного интеграла $\int_{L_2} (\mathbf{a}\, d\mathbf{r})$ (циркуляции поля **a** вдоль кривой L_2): $\int_{L_1} (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = -1 - 1 = -2$.

---

11. Доказать, что векторное поле $\mathbf{a} = y^2\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$ потенциально, и найти его потенциал.

Решение. Поле **a** определено во всем пространстве. Пространство является поверхностно односвязной областью; поэтому необходимое и достаточное условие потенциальности поля **a** имеет вид rot **a** = 0. Находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy & z \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, **a** − потенциальное поле.

Вычислим потенциал поля **a** по формуле (10), взяв в качестве точки (x_0, y_0, z_0) начало координат:

$$u(x, y, z) = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y 2xy\, dy + \int_0^z z\, dz = xy^2 + z^2/2.$$

---

12. Найти работу силового поля $\mathbf{F} = y^2\, \mathbf{i} + 2xy\, \mathbf{j} + z\, \mathbf{k}$ вдоль отрезка Lлинии пересечения цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$, проходящего от точки $A(-a, -a, 0)$ через точку $G(0, 0, a)$ до точки $B(a, a, 0)$.

Решение. I с п о с о б . Как и в примере 9, можно непосредственно вычислить криволинейный интеграл $\int_L (\mathbf{F}\, d\mathbf{r})$, выражающий работу силового поля **F** вдоль данной кривой *L* Здесь мы этого делать не будем.

II с п о с о б . Воспользуемся тем, что данное силовое поле **F** является потенциальным во всем пространстве: **F** = grad *u*, где $u = xy^2 + z^2/2$ (см. пример 11). Отсюда следует, что работа силы **F** вдоль кривой *L* равна разности значений потенциала в точках *B* и *A*:

$$\int_L (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A) = a^3 - (-a^3) = 2a^3.$$

---

13. Выяснить, является ли потенциальным векторное поле $\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$.

Решение. Находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Заметим, однако, что поле **a** не определено на оси *Oz*, поэтому условие rot **a** выполняется во всех точках пространства, кроме точек оси *Oz*. Следовательно, в любой поверхностно односвязной области, не содержащей точек оси *Oz*, поле **a** является потенциальным. Так, например, оно потенциально в I октанте ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$), и его потенциал равен $u = \operatorname{arctg}(y/x) + 2z$ (проверьте это).

Рассмотрим теперь область, содержащую точки оси *Oz*, например шар с центром в начале координат. Удалив из этого шара точки оси *Oz* (т. е. диаметр, лежащий на оси *Oz*), получим область *G*, в которой поле **a** определено и rot **a** = 0. Однако эта область не является поверхностно односвязной, и поэтому из условия rot **a** = 0 нельзя сделать вывод о потенциальности поля **a**. Покажем, что поле **a** в области *G* не является потенциальным.

Для этого рассмотрим окружность $L = \{x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ z = 0\}$, лежащую в области *G*, и вычислим циркуляцию поля **a** вдоль окружности *L* пробегаемой в направлении возрастания параметра *t* от 0 до 2π. Имеем

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \oint_L -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t)\, dt + \cos t \cdot \cos t\, dt] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Итак, циркуляция поля **a** вдоль замкнутой кривой L не равна нулю. Следовательно, поле **a** не является потенциальным в области G.

---

14. Пусть векторное поле $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ задано в плоской области D, ограниченной кусочно гладкой кривой L. Доказать, что

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{a}\, dS = \oint_L (\mathbf{an})\, dl, \tag{16}$$

где $\operatorname{div} \mathbf{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$, а $\mathbf{n}$ − внешняя нормаль к кривой L.

Решение. Формула (16) представляет собой "плоский" вариант формулы Остроградского−Гаусса и может быть получена из обычной формулы Остроградского−Гаусса следующим образом. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y), 0\}$ в пространственной области $G = \{(x, y, z): (x, y) \in D, 0 \le z \le 1\}$. Согласно формуле Остроградского−Гаусса имеем

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \iint_\Phi (\mathbf{an})\, dS, \tag{17}$$

где Φ − поверхность, ограничивающая область G, а $\mathbf{n}$ − единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ. Сводя тройной интеграл к повторному и учитывая, что div **a** не зависит от z, получим

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \iint_D dx\, dy \operatorname{div} \mathbf{a}\, dz = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{a}\, dS.$$

Поверхность Φ состоит из оснований $D(z = 0)$, $\Phi_1(z = 1)$ и боковой поверхности Φ_2. На основаниях D и Φ_1 имеем $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, и, следовательно, $\iint_D (\mathbf{an})\, dS = \iint_{\Phi_1} (\mathbf{an})\, dS = 0$. На боковой (цилиндрической) поверхности Φ_2 введем криволинейные координаты (l, z) (рис. 79), где l − расстояние вдоль кривой L отсчитываемое от некоторой точки $(0 \le l \le l_0)$. Так как на Φ_2 выполняется равенство $dS = dl \cdot dz$ и вектор нормали **n** совпадает с вектором нормали к кривой L причем **a** и **n** зависят только от l и не зависят от z, то

$$\iint\limits_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS = \iint\limits_{\Phi_2} (\mathbf{an})\, dS = \int_0^{l_0} dl \int_0^1 (\mathbf{an})\, dz = \int_0^{l_0} (\mathbf{an})\, dl = \oint_L (\mathbf{an})\, dl.$$

Подставляя найденные выражения для тройного и поверхностного интегралов в (17), приходим к формуле (16).

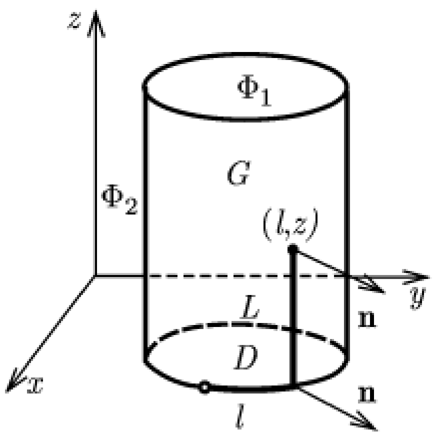

Рис. 79

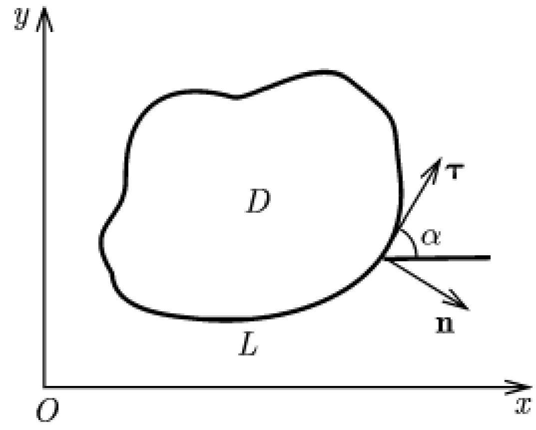

Рис. 80

З а м е ч а н и е 1 . Отметим, что формула (16) ("плоский" вариант формулы Остроградского−Гаусса) есть не что иное, как формула Грина, записанная в специальной форме. В самом деле, запишем формулу Грина в обычном виде:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_L P\, dx + Q\, dy.$$

Введем теперь вектор $\mathbf{a} = \{Q, -P\}$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{a}$, $P\, dx + Q\, dy = (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)\, dl = [Q \sin \alpha + (-P)(-\cos \alpha)]\, dl = (\mathbf{an})\, dl$, где α − угол между касательным вектором $\boldsymbol{\tau}$ и осью Ox; $\mathbf{n} = \{\cos(\alpha - \pi/2), \sin(\alpha - \pi/2)\} = \{\sin \alpha, -\cos \alpha\}$ − единичный вектор внешней нормали к L (рис. 80). В силу этих равенств формула Грина принимает вид (16).

З а м е ч а н и е 2 . Аналогично тому, как из формулы Остроградского−Гаусса была получена формула (16), из формулы (16) (или, что то же самое, из формулы Грина) можно получить формулу Ньютона−Лейбница ("одномерный" вариант формулы Остроградского−Гаусса). Для этого положим $Q = Q(x)$, $P = \text{O}$, $D = \{x, y\colon 0 \le x \le l, 0 \le y \le 1\}$. Тогда из формулы Грина получим

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_L Q\, dy.$$

Так как $\frac{\partial Q}{\partial x}$ не зависит от y, а на нижней и верхней сторонах прямоугольника D имеем $dy = 0$, то

$$\int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \int_0^1 dy = Q(0) \int_1^0 dy + Q(l) \int_0^1 dy,$$

или

$$\int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = Q(l) - Q(0).$$

Это и есть формула Ньютона–Лейбница.

Таким образом, формулы Грина и Остроградского–Гаусса являются обобщениями формулы Ньютона–Лейбница на случаи двумерных и трехмерных областей.

---

15. Пусть скалярные поля u и v заданы в области G, ограниченной кусочно гладкой поверхностью Ф. Доказать, что

$$\iint_{\Phi} v \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \iiint_{G} (v\, \Delta u + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v))\, dV \qquad (18)$$

(*первая формула Грина*) и

$$\iint_{\Phi} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \iiint_{G} (v\, \Delta u - u\, \Delta v)\, dV \qquad (19)$$

(*вторая формула Грина*).

Решение. Применим к векторному полю $\mathbf{a} = v \operatorname{grad} u$ в области G формулу Остроградского–Гаусса. Учитывая равенства $(v \operatorname{grad} u \cdot v \operatorname{grad} u) = v \frac{\partial u}{\partial n}$, $\operatorname{div} (v \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div} (\operatorname{grad} u) + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)$ (см. формулу (21) из § 1) и $\operatorname{div} (\operatorname{grad} u) = \Delta u$, получаем формулу (18).

Вторая формула Грина выводится с помощью первой: нужно в (18) поменять u и v местами и вычесть полученное равенство из (18).

Замечание 1. Отметим, что первую и вторую формулы Грина на плоскости можно вывести аналогично (18) и (19), применив формулу (16) к векторным полям $v(x, y)$ grad $u(x, y)$ и $u(x, y)$ grad $v(x, y)$. Эти формулы в координатной форме были получены в § 3 из гл. XIII.

Замечание 2. Рассмотрим широко распространенный в математической физике оператор

$$L(u) = \operatorname{div}\,[k(M)\operatorname{grad} u(M)] - q(M)u(M), \tag{20}$$

где $k(M)$, $q(M)$, $u(M)$ − скалярные функции (оператор Лапласа Δu является частным случаем $L(u)$ при $k(M) = 1$, $q(M) = 0$).

Пусть векторное поле $\mathbf{a} = v(M)k(M)\operatorname{grad} u$ ($v(M)$ − скалярное поле) задано в области G, ограниченной поверхностью Ф. Применяя к векторному полю $\mathbf{a}$ в области G формулу Остроградского−Гаусса и учитывая равенство

$$\operatorname{div}(vk\operatorname{grad} u) = v\operatorname{div}(k\operatorname{grad} u) + k(\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)$$

(см. формулу (21) из § 1), получаем

$$\iint_{\Phi} kv\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \iiint_{G} [vL(u) + k(\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v) + quv]\,dV \tag{21}$$

(*первая формула Грина для оператора* $L(u)$).

Меняя в формуле (21) u и v местами и вычитая полученное равенство из (21), приходим к формуле

$$\iint_{\Phi} k\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = \iiint_{G} (vL(u) - uL(v))\,dV \tag{22}$$

(*вторая формула Грина для оператора* $L(u)$).

В случае полей $u(M)$ и $v(M)$, заданных в области D с границей L на плоскости, применяя к полям $v\cdot k$ grad u и $u\cdot k$ grad v формулу (16), для оператора $L(u)$ получаем следующие формулы:

$$\int_L kv \frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_D [vL(u) + k(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + quv]\, dS,$$

$$\int_L k\left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dl = \iint_D (vL(u) - uL(v))\, dS,$$

аналогичные формулам (21) и (22).

В случае полей $u(x)$ и $v(x)$, заданных на отрезке $0 \le x \le l$, для оператора

$$L(u) = \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du(x)}{dx}\right] + q(x)$$

(одномерный вариант (20)) имеют место формулы

$$kv \frac{du}{dx}\Big|_0^l = \int_0^l \left[vL(u) + k \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + quv\right] dx, \tag{23}$$

$$k\left(v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}\right)\Big|_0^l = \int_0^l (vL(u) - uL(v))\, dx. \tag{24}$$

В справедливости формул (23) и (24) можно убедиться непосредственно интегрированием по частям.

Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Примеры решения задач

---

1. Записать выражение градиента скалярного поля u в цилиндрических координатах.

Решение. Полагая в формуле (4) $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ и используя выражения параметров Ламэ в цилиндрических координатах, получаем

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

---

2. Записать выражение Δu (Δ − оператор Лапласа) в сферических координатах.

Решение. Полагая в формуле (5) $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ и используя выражения параметров Ламэ в сферических координатах, получаем

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \qquad (6)$$

---

3. Найти сферически симметричное решение уравнения Пуассона $\Delta u = \frac{1}{r}$, т. е. решение, зависящее только от r.

Решение. Так как искомая функция и по условию не зависит от θ и φ, то производные по этим переменным в выражении (6) равны нулю, и уравнение для функции и примет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = r;$$

используем обозначения обыкновенных производных, так как функция u зависит лишь от одной переменной: $u = u(r)$. Умножая на dr, получаем

$$d\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = r\,dr,$$

откуда, интегрируя, находим

$$r\frac{du}{dr} = r^2/2 + C_1.$$

Деля на r_2 и интегрируя еще раз, имеем

$$u = r/2 - C_1/r + C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 − произвольные постоянные.