

Площадь поверхности

Примеры решения задач

1. Составить уравнение касательной плоскости и вычислить направляющие косинусы нормали к поверхности $x = u, y = u, z = u^3 + v^2$ в точке $M_0(1, 1, 2)$.

Решение. Пользуясь уравнением поверхности в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{i} u + \mathbf{j} v + \mathbf{k} (u^3 + v^2)$, получим

$$\mathbf{r}_u(M_0) = (\mathbf{i} + 3 u^2 \mathbf{k})|_{M_0} = \mathbf{i} + 3 \mathbf{k}, \mathbf{r}_v(M_0) = (\mathbf{j} + 2 v \mathbf{k})|_{M_0} = \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}.$$

По формуле $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]$ находим нормаль в точке M_0 :

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Составляем уравнение касательной плоскости, проходящей через точку $M_0(1, 1, 2)$: $-3(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 2) = 0$, или $z - 3x - 2y + 3 = 0$. Далее, вычислим длину вектора $\mathbf{N}$ и его направляющие косинусы: $|\mathbf{N}|^2 = 9 + 4 + 1 = 14$, $\cos \alpha = -3/\sqrt{14}$, $\cos \beta = -2/\sqrt{14}$, $\cos \gamma = 1/\sqrt{14}$.

2. Вычислить площадь S части гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 8$.

Решение. Площадь S вычислим по формуле (13):

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_G \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy,$$

где G – круг $x^2 + y^2 \leq 8$. В интеграле перейдем к полярным координатам; получим

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

Вычисляя интеграл, находим $S = 26\pi$.

3. Найти площадь S части поверхности $z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$, отсекаемой плоскостью $z = 0$.

Решение. Для вычисления площади S воспользуемся формулой (13). Находим

$$z_x = -3x(x^2 + y^2)^{1/2}, z_y = -3y(x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2}, S = \iint_G \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} dx dy,$$

где G – область на плоскости Oxy , на которую проектируется часть поверхности, отсеченная плоскостью $z = 0$. Границей области G является линия пересечения поверхности с плоскостью $z = 0$, т. е. кривая $0 = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$. Отсюда получаем $x^2 + y^2 = 1$, т. е. граница области G – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Вычислим интеграл 5, перейдя к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Имеем

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \sqrt{1 + 9\rho^4} = \frac{\pi}{3} \left[\frac{3\rho^2}{2} \sqrt{1 + 9\rho^4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \left(3\rho^2 + \sqrt{1 + 9\rho^4} \right) \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})).$$

4. Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$.

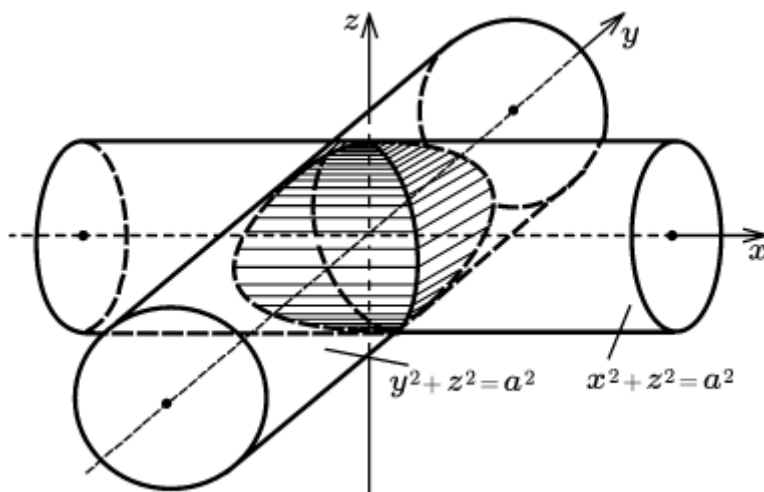


Рис. 64

Решение. Сначала вычислим площадь 5 части поверхности Φ первого цилиндра, вырезанной вторым (рис. 64). Параметрические уравнения первого цилиндра имеют вид

$$x = a \cos \varphi, y = h, z = a \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < h < +\infty.$$

Для того чтобы найти уравнение линии пересечения поверхностей, подставим параметрические выражения y и z в уравнение второго цилиндра. Уравнение $y^2 + z^2 = a^2$ в переменных φ, h примет вид $h^2 = a^2 \cos^2 \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Таким образом, для точек пересечения поверхностей при $y > 0$ имеем $h = a |\cos \varphi|$, при $y < 0$ имеем $h = -a |\cos \varphi|$. Область g изменения параметров поверхности Φ запишется следующим образом:

$$g = \{(\varphi, h): 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -a|\cos \varphi| \leq h \leq a|\cos \varphi|\}.$$

Пользуясь формулами (10), получаем $E = a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi = a^2, G = 1, F = 0$, откуда $\sqrt{EG - F^2} = a$. По формуле (12) находим

$$S = \iint_g a \, d\varphi \, dh = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a|\cos \varphi|}^{a|\cos \varphi|} dh = 8a^2.$$

Точно так же вычисляется площадь части второго цилиндра, вырезанной первым. В результате получаем ответ: $16a^2$.

Поверхностные интегралы первого рода

Примеры решения задач

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $I = \iint_{\Phi} z \, dS$, где Φ — часть гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанная цилиндром $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. По формуле (3) получаем

$$I = \iint_G z \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy = \iint_G xy \sqrt{1 + y^2 + x^2} \, dx \, dy,$$

где G — круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Переходя к полярным координатам $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ и сводя двойной интеграл к повторному, находим

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 + r^2} \, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \cdot \int_0^2 r^3 \sqrt{1+r^2} dr = 0.$$

2. Вычислить интеграл $I = \iint_{\Phi} y dS$, где Φ – часть поверхности цилиндра $x = 2y^2 + 1$ при $y > 0$, вырезанная поверхностями $x = y^2 + z^2$, $x = 2$, $x = 3$.

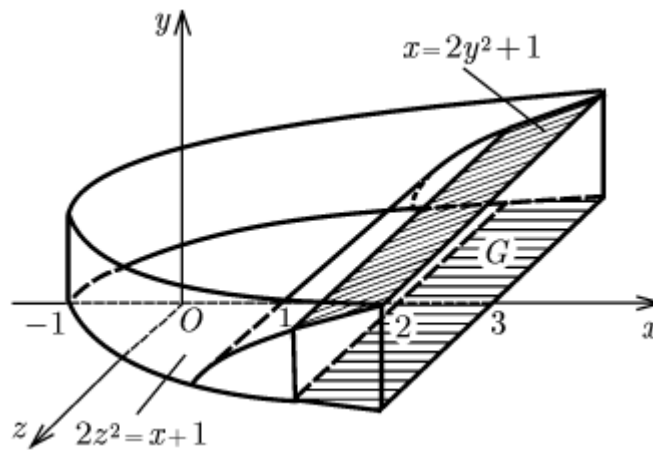


Рис. 65

Решение. Вычислим интеграл I с помощью двойного интеграла по области G – проекции поверхности Φ на плоскость Oxz . Для отыскания границы области G исключим переменную y из уравнений $x = 2y^2 + 1$ и $x = y^2 + z^2$; получим $2z^2 = x + 1$. Граница области G состоит из двух дуг этой параболы и отрезков прямых $x = 2$ и $x = 3$ (рис. 65). Уравнение

поверхности запишем в виде $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$. Отсюда следует, что

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}}.$$

Пользуясь формулой

$$I = \iint_G \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz,$$

получим

$$\begin{aligned}
I &= \iint_G \sqrt{\frac{x-1}{2}} \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}} dx dz = \int_2^3 \frac{1}{4} \sqrt{8x-7} \int_{-\sqrt{(x+1)/2}}^{\sqrt{(x-1)/2}} dx = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^3 \sqrt{8x^2+x-7} dx = \int_2^3 \sqrt{\left(x+\frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{15}{16}\right)^2} dx = \\
&= \left[\frac{x+1/16}{2} \sqrt{x^2+\frac{x}{8}-\frac{7}{8}} - \left(\frac{15}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| x+\frac{1}{16} + \sqrt{x^2+\frac{x}{8}-\frac{7}{8}} \right| \right] \Big|_2^3 = \\
&= \frac{98\sqrt{17}-99\sqrt{3}}{64\sqrt{2}} + \left(\frac{15}{16}\right)^2 \ln \frac{33+12\sqrt{6}}{49+8\sqrt{34}} \approx 2,2.
\end{aligned}$$

3. Вычислить момент инерции I_z относительно оси Oz однородной сферической оболочки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ плотности ρ_0 .

Решение. Имеем $I_z = \iint_{\Phi} \rho_0(x^2 + y^2) dS$. Напишем параметрические уравнения данной полусферы: $x = a \cos v \sin u, y = a \sin v \sin u, z = a \cos u, 0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq 2\pi$. По формулам (10) из § 1 находим

$$E = a^2 \cos^2 v \cos^2 u + a^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 \sin^2 u = a^2,$$

$$G = a^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 \cos^2 v \sin^2 u = a^2 \sin^2 u,$$

$$F = -a^2 \cos v \cos u \sin v \sin u + a^2 \sin v \cos u \cdot \cos v \sin u = 0,$$

откуда $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin u$.

Выразим подынтегральную функцию в переменных u, v ; получим $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 u$.

Вычисляем интеграл I_z по формуле (2):

$$I_z = \rho_0 \iint_G a^2 \sin^2 u \cdot a^2 \sin u du dv = \rho_0 a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 u du \int_0^{2\pi} dv = 3/4 \pi \rho_0 a^4.$$

4. Заряд Q равномерно распределен по сфере радиуса R . Найти напряженность электрического поля сферы в точке A , находящейся на расстоянии r ($r \neq R$) от центра сферы.

Решение. Введем прямоугольную систему координат с началом O в центре сферы и осью

Ox , направленной, как и вектор $\overrightarrow{OA}$. Пусть $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$ – вектор напряженности в точке A электрического поля сферы. Из соображений симметрии имеем $E_2 = E_3 = 0$ и $|\mathbf{E}| =$

E_1 . Поверхностная плотность а заряда на сфере равна $\frac{Q}{4\pi R^2}$. Вектор напряженности,

создаваемой в точке A элементом сферы с площадью Δs , обозначим через $\overrightarrow{\Delta E} = \{\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3\}$. Заряд элемента сферы равен $\sigma \Delta s$, и по формуле напряженности поля точечного

заряда получаем $|\Delta \mathbf{E}| = \frac{k\sigma \Delta s}{\rho^2}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, ϵ_0 – диэлектрическая постоянная, ρ – расстояние от точки $A(r, 0, 0)$ до элемента сферы, заряд которого будем считать

сосредоточенным в точке $M(x, y, z)$ этого элемента. Пусть α – угол между вектором $\overrightarrow{\Delta E}$ и осью Ox . Тогда

$$\Delta E_1 = |\overrightarrow{\Delta E}| \cos \alpha = k\sigma \Delta s \cos \alpha \cdot (1/\rho).$$

Вычислим ρ и $\cos \alpha$:

$$\rho = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rx},$$

$$\cos \alpha = \frac{r-x}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rx}}.$$

Следовательно,

$$\Delta E_1 = k\sigma \frac{r-x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} \Delta s.$$

Пусть сфера разбита кусочно гладкими кривыми на n квадратуемых частей (элементов). Будем предполагать, что диаметр d_i i -го элемента достаточно мал. Для каждого элемента вычислим величину ΔE_1 , составим сумму всех n таких величин и перейдем к пределу при

$d \rightarrow 0$ ($d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$). В результате получим поверхностный интеграл первого рода

$$E_1 = k\sigma \iint_{\Phi} \frac{r-x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} dS.$$

Верхняя и нижняя полусферы проектируются на координатную плоскость Oxy в один и

тот же круг $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$ и для обеих полусфер имеем $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} =$

$\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. Поэтому поверхностный интеграл E_1 равен удвоенному двойному интегралу по кругу G :

$$E_1 = 2k\sigma \iint_G \frac{r - x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} \cdot \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Вычислим полученный интеграл с помощью повторного интегрирования:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2k\sigma R \int_{-R}^R \frac{r - x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= 2k\sigma R \int_{-R}^R \frac{r - x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} dx \left(\arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) = \\ &= 2k\sigma R \pi \int_{-R}^R \frac{r - x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} dx = \\ &= 2k\sigma R \pi \left[\int_{-R}^R \frac{r dx}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} - \int_{-R}^R \frac{x}{r} d\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rx}} \right) \right] = \\ &= 2k\sigma R \pi \left\{ (R^2 + r^2 - 2rx)^{-1/2} \Big|_{-R}^R - \frac{1}{r} \left[x(R^2 + r^2 - 2rx)^{-1/2} \Big|_{-R}^R - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-R}^R (R^2 + r^2 - 2rx)^{-1/2} dx \right] \right\} = 2k\sigma R \pi \left\{ \frac{1}{|r - R|} - \frac{1}{|r + R|} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \left(\frac{R}{|r - R|} + \frac{R}{r + R} + \frac{1}{r} (|r - R| - r - R) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

если $r > R$, то $E_1 = 2k\sigma\pi R \cdot \frac{2R}{r^2} = k \cdot \frac{Q}{r^2}$;

если $r < R$, то $E_1 = 2k\sigma\pi R \cdot 0 = 0$.

Таким образом, сфера, на которой равномерно распределен заряд Q , создает в пространстве вне сферы такое же электрическое поле, что и точечный заряд Q , помещенный в центр сферы. Внутри же сферы электрическое поле равно нулю.

Поверхностные интегралы второго рода

Примеры решения задач

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint_{\Phi} dx dy$, где Φ – нижняя сторона части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \leq z \leq 1$.

Решение. Проекцией данной части конуса на плоскость Oxy является круг $G: x^2 + y^2 \leq 1$. Пользуясь формулой (9), сведем поверхностный интеграл I к двойному интегралу: $I =$

$$-\iint_G dx dy. \text{ Так как } \iint_G dx dy = S(G) = \pi, \text{ то } I = -\pi.$$

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $I = \iint_{\Phi} y dz dx$, где Φ – верхняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$ при $0 \leq z \leq 2$.

Решение. По формуле (1) вычислим вектор нормали, определяющий верхнюю сторону данной поверхности: $\mathbf{N} = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\} = \{-2x, -2y, 1\}$. Отсюда следует, что для единичного вектора $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ верхней стороны справедливо равенство

$$\operatorname{sgn} \cos \beta(M) = \begin{cases} 1 & \text{при } y > 0, \\ -1 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Разобьем данную поверхность на две части, описываемые уравнениями $y = \sqrt{z - x^2}$ при $y \geq 0$ и $y = -\sqrt{z - x^2}$ при $y \leq 0$. Обе части поверхности (обозначим их соответственно Φ_1 и Φ_2) проектируются на область G плоскости Oxz , граница которой состоит из дуги параболы $z = x^2$ и отрезка прямой $z = 2$, т. е. $G = \{(x, z) : -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq z \leq 2\}$.

Сведем поверхностные интегралы по Φ_1 и Φ_2 к двойным интегралам по области G подобно тому, как это было сделано при выводе формул (8) и (9). Получим

$$\iint_{\Phi_1} y \, dz \, dx = - \iint_G y(x, z) \, dz \, dx = - \iint_G \sqrt{z - x^2} \, dz \, dx$$

(здесь перед двойным интегралом стоит знак минус, так как $\cos \beta(M) < 0$) и, аналогично,

$$\iint_{\Phi_2} y \, dz \, dx = \iint_G y(x, z) \, dz \, dx = \iint_G -\sqrt{z - x^2} \, dz \, dx.$$

Таким образом, имеем

$$I = \iint_{\Phi} y \, dz \, dx = \iint_{\Phi_1} y \, dz \, dx + \iint_{\Phi_2} y \, dz \, dx = -2 \iint_G \sqrt{z - x^2} \, dz \, dx.$$

Двойной интеграл вычислим с помощью повторного интегрирования:

$$I = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z - x^2} \, dz = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left. \frac{2}{3} (z - x^2)^{3/2} \right|_{x^2}^2 dx = -4/3 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} \, dx.$$

Используя замену переменной $x = \sin \sqrt{2} t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, окончательно получаем

$$I = -4/3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^{3/2} \sqrt{2} \cos^4 t \, dt = -2\pi.$$

3. Вычислить поток Π вектора $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ через внешнюю сторону сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Решение. Согласно определению потока требуется вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \iint_{\Phi} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) \, dS,$$

где Φ – внешняя сторона данной сферы. Находим вектор нормали $\mathbf{N}$ по формуле (7) из § 1:

$\mathbf{N} = \{2(x - a), 2(y - b), 2(z - c)\}$. Единичный вектор нормали $\mathbf{n} = \left\{ \frac{x - a}{R}, \frac{y - b}{R}, \frac{z - c}{R} \right\}$ определяет внешнюю сторону сферы. Учитывая это, перепишем интеграл в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} \left(x^2 \frac{x-a}{R} + y^2 \frac{y-b}{R} + z^2 \frac{z-c}{R} \right) dS$$

и вычислим его по формуле (2) из § 2. Для этого запишем параметрические уравнения сферы: $x = a + R \cos v \sin u$, $y = b + R \sin v \sin u$, $z = c + R \cos u$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. Так как $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin u$, то

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} R^2 \sin u [(a + R \cos v \sin u)^2 \cos v \sin u + \\ &+ (b + R \sin v \sin u)^2 \sin v \sin u + (c + R \cos u)^2 \cos u] du = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} 2aR \cos^2 v dv \int_0^{\pi} \sin^3 u du + R^2 \int_0^{2\pi} 2bR \sin^2 v dv \int_0^{\pi} \sin^3 u du + \\ &+ R^2 \int_0^{2\pi} 2cR dv \int_0^{\pi} \cos^2 u \sin u du = \frac{8\pi R^3}{3} (a + b + c). \end{aligned}$$

Формула Стокса

Примеры решения задач

1. Вычислить двумя способами (по формуле (6) из § 2 гл. XIII и по формуле Стокса)

криволинейный интеграл $I = \oint_L y dx + z^2 dy + x^2 dz$, где контур L – окружность, по которой пересекаются сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскость $z = \sqrt{3}$, причем направление обхода контура L выбирается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2)$. В формуле Стокса в качестве ориентированной поверхности Φ , которую ограничивает окружность L , взять:

а) верхнюю сторону части сферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ при $\sqrt{3} \leq z \leq 2$;

б) верхнюю сторону части плоскости $z = \sqrt{3}$ при $x^2 + y^2 \leq 1$ (направление обхода контура согласовано с ориентацией поверхности).

Решение. Уравнения окружности L можно записать в виде $x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}$. Вычислим криволинейный интеграл I , перейдя к параметрическим уравнениям окружности $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3}, 0 \leq t \leq 2\pi$. Тогда $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 0$, и по формуле (6) из § 2 гл. XIII получаем

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3 \cos t) dt = -\pi.$$

Перейдем теперь к вычислению интеграла I вторым способом – с помощью формулы Стокса. Поскольку $P = y, Q = z^2, R = x^2$, имеем

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

и поверхностный интеграл второго рода в формуле Стокса равен

$$J = - \iint_{\Phi} 2z dy dz + 2x dz dx + dx dy.$$

Пусть $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – единичный вектор нормали верхней стороны поверхности Φ .

а) Часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ при $\sqrt{3} \leq z \leq 2$ проектируется на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy соответственно в области

$$G_1 = \{(y, z): -\sqrt{4 - z^2} \leq y \leq \sqrt{4 - z^2}, \sqrt{3} \leq z \leq 2\},$$

$$G_2 = \{(z, x): \sqrt{3} \leq z \leq 2, -\sqrt{4 - z^2} \leq x \leq \sqrt{4 - z^2}\},$$

$$G_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Так как на область G_1 проектируются две части поверхности Φ : $x = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, для которой $\cos \alpha \geq 0$, и $x = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, для которой $\cos \alpha \leq 0$, то для поверхностного

интеграла второго рода $J_1 = - \iint_{\Phi} 2z dy dz$ получаем

$$J_1 = - \left(\iint_{G_1} 2z dy dz - \iint_{G_1} 2z dy dz \right) = 0.$$

Аналогично,

$$J_2 = - \iint_{\Phi} 2x \, dz \, dx = - \left(\iint_{G_2} 2x \, dz \, dx - \iint_{G_2} 2x \, dz \, dx \right) = 0.$$

Учитывая, что $\cos \gamma > 0$, и пользуясь формулой (8) из § 3, находим

$$J_1 = - \iint_{\Phi} dx \, dy = - \iint_{G_3} dx \, dy = -S(G_3) = -\pi.$$

Следовательно, $J = J_1 + J_2 + J_3 = -\pi = I$.

Отметим, что второй способ вычисления криволинейного интеграла I (с помощью формулы Стокса) является более громоздким по сравнению с первым. Этот способ рассматривается здесь только с целью лучшего усвоения формулы Стокса. То же самое относится к примеру 2 и некоторым упражнениям для самостоятельной работы этого параграфа.

б) Для верхней части плоскости $z = \sqrt{3}$ имеем $dz = 0$, $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$. Поэтому

$$J = - \iint_{\Phi} 2z \, dy \, dz + 2x \, dz \, dx + dx \, dy = - \iint_{\Phi} dx \, dy = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = -\pi.$$

Таким образом, и в этом случае получили тот же результат.

2. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $I = \int_{OA} yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz$, где OA – кривая, $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $O(0,0,0)$, $A(2\pi, 0, 4\pi^2)$.

Решение. Незамкнутая кривая OA лежит на поверхности $z = x^2 + y^2$. Действительно, $x^2 + y^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2$, т. е. $x^2 + y^2 = z$. Дополним кривую интегрирования OA до замкнутого контура L дугой AO параболы $z = x^2 + y^2$, лежащей в плоскости Oxz (отметим, что эта парабола лежит также на поверхности $z = x^2 + y^2$). Тогда

$$I = \oint_L yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz - \int_{AO} yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz.$$

Учитывая, что вдоль кривой AO $y = 0$, $dy = 0$, получим

$$\int_{AO} yzdx + 3xz dy + 2xy dz = 0.$$

Следовательно, $I = \oint_L yzdx + 3xz dy + 2xy dz$.

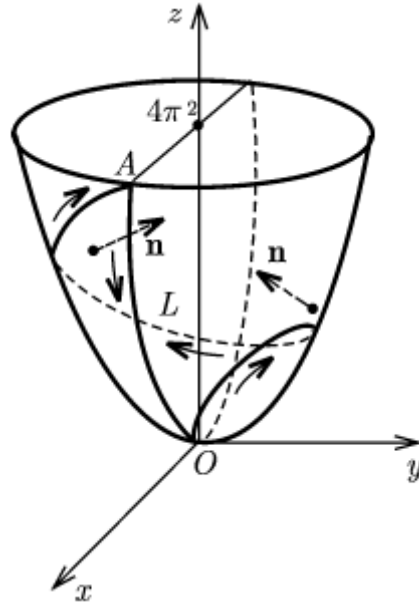


Рис. 70

Контур L лежит на параболоиде $z = x^2 + y^2$ и обходится в направлении, указанном на рис. 70. Выберем на части параболоида, ограниченной контуром L , непрерывное векторное поле нормалей $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ так, чтобы обход контура был положительным, т. е. выберем верхнюю сторону параболоида. По формуле (1) из § 3 находим $\mathbf{N} = \{-2x, -2y, 1\}$. Вычислим единичный вектор нормали $\mathbf{n}$:

$$|\mathbf{N}|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 1,$$

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right\}.$$

Для нахождения криволинейного интеграла по замкнутому контуру L применим формулу Стокса. Так как $P = yz$, $Q = 3xz$, $R = 2xy$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2x - 3x = -x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = y - 2y = -y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3z - z = 2z.$$

По формуле Стокса находим

$$I = \oint_L yz dx + 3xz dy + 2xy dz = \iint_{\Phi} \left[\frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot (-x) + \right. \\ \left. + \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot (-y) + \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right] dS = 2 \iint_{\Phi} \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS.$$

Этот поверхностный интеграл первого рода вычислим по формуле (3) из § 2. В данном случае $z = x^2 + y^2$, $z_x = 2x$, $z_y = 2y$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Поэтому

$$2 \iint_{\Phi} \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS = 4 \iint_G (x^2 + y^2) dx dy,$$

где G – область на плоскости Oxy , ограниченная кривой $l: x = t \cos t, y = t \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) и отрезком $[0, 2\pi]$ оси Ox (рис. 71). Для вычисления двойного интеграла по области G перейдем к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Подставляя эти выражения для x и y уравнения кривой l , получим $\rho \cos \varphi = t \cos t, \rho \sin \varphi = t \sin t$. Отсюда, учитывая, что t и φ изменяются в одних и тех же пределах от 0 до 2π , находим $\rho = t, \varphi = t$, и, следовательно, уравнение кривой l в полярных координатах имеет вид $\rho = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Таким образом,

$$I = 4 \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{G'} \rho^3 d\rho d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{32}{5} \pi^5.$$

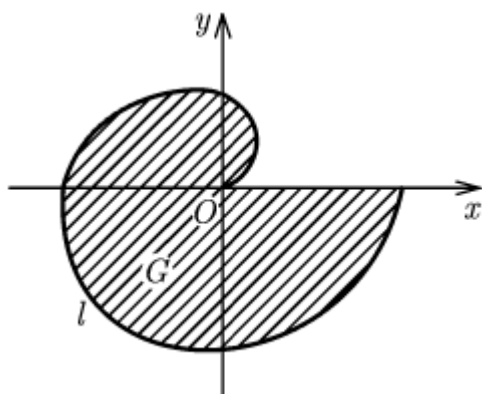


Рис. 71

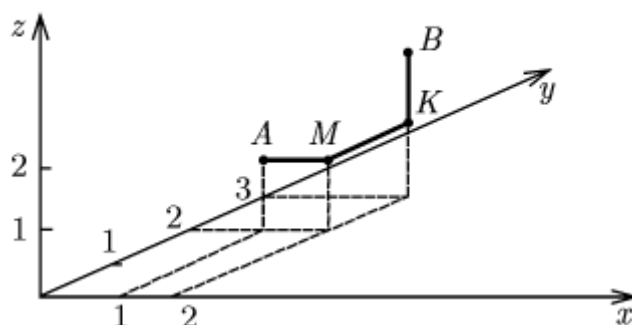


Рис. 72

3. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (15x^2y + 3z^2) dx + (5x^3 - 2yz) dy + (6xz - y^2) dz,$$

где $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 2)$.

Решение. Проверим выполнение условия IV теоремы 4: $P = 15x^2y + 3z^2$, $Q = 5x^3 - 2yz$, $R = 6xz - y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 15x^2$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -2y$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2z$. Следовательно, выражение $P dx$

$+ Q dy + R dz$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $I = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути интегрирования.

Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную $AMKB$, где $M(2, 2, 1)$, $K(2, 3, 1)$ (рис. 72). Тогда

$$AM = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, y = 2, z = 1\},$$

$$MK = \{(x, y, z): x = 2, 2 \leq y \leq 3, z = 1\},$$

$$KB = \{(x, y, z): x = 2, y = 3, 1 \leq z \leq 3\}.$$

Вдоль отрезка AM имеем $y = 2$, $z = 1$, $dy = dz = 0$, $1 \leq x \leq 2$; поэтому $\int_{AM} P dx + Q dy + R dz$

$$= \int_1^2 (30x^2 + 3) dx = 73.$$

Вдоль отрезка MK имеем $x = 2$, $z = 1$, $dx = dz = 0$, $2 \leq y \leq 3$; поэтому $\int_{MK} P dx + Q dy + R dz$

$$= \int_2^3 (40 - 2y) dy = 35.$$

Вдоль отрезка KB имеем $x = 2$, $y = 3$, $dx = dy = 0$, $1 \leq z \leq 3$; поэтому интеграл вдоль этого отрезка равен $\int_1^3 (12z - 9) dz = 30$.

Искомый интеграл по ломаной $AMKB$ равен сумме вычисленных интегралов, т. е. равен 138.

4. Найти функцию $u(x, y, z)$, если

$$du = \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{z}} \right) dx + \left(\frac{x}{z + \frac{x}{y^2}} \right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что для дифференциального выражения du выполнены равенства (4) при $yz \neq 0$. Для вычисления функции $u(x, y, z)$ воспользуемся формулой (5), считая, что y_0, z_0, y, z отличны от нуля. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{x_0}^x \left(\frac{1}{1 - \frac{y_0}{z_0}} \right) dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{x}{z_0 + \frac{x}{y^2}} \right) dy - \int_{z_0}^z \frac{xy}{z^2} dz + C = \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{y_0}{z_0}} \right) x \Big|_{x_0}^x + \left(\frac{x}{x_0 y - y} \right) \Big|_{y_0}^y - \frac{xy}{z} \Big|_{z_0}^z + C = \\ &= x \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{z}} \right) - x_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{y_0}{z_0}} \right) + C. \end{aligned}$$

Следовательно, $u(x, y, z) = x \left(\frac{1}{1 - \frac{y}{z}} \right) + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная и $yz \neq 0$.

5. Найти работу силы тяготения $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), действующей на единичную массу, которая перемещается из точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Работа A силы $\mathbf{F}$ при перемещении материальной точки из точки M_1 в точку M_2

вдоль кривой M_1M_2 вычисляется (аналогично плоскому случаю) по формуле $A = \int_{M_1M_2} P dx + Q dy + R dz$, где $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$.

Следовательно,

$$A = \int_{M_1M_2} -\frac{k}{r^3} (x dx + y dy + z dz).$$

Покажем, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом:

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = -\frac{k}{2r^3}d(x^2 + y^2 + z^2) = \\
& = -\frac{k}{2r^3}d(r^2) = -\frac{k}{2r^3}2r\,dr = -\frac{k\,dr}{r^2} = k \cdot d\left(\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
A &= k \int_{M_1 M_2} d\left(\frac{1}{r}\right) = k \left(\frac{1}{r(M_2)} - \frac{1}{r(M_1)} \right) = \\
&= k \left(\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right).
\end{aligned}$$

Формула Остроградского-Гаусса

Примеры решения задач

1. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл $\Pi = \iiint_{\Phi} (x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy)$ (см. пример 3 из § 3), где Φ – внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Решение. По формуле Остроградского-Гаусса имеем

$$\Pi = \iiint_G (2x + 2y + 2z)\,dx\,dy\,dz,$$

где G – шар $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2$. Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам

$$x = a + r \cos \varphi \sin \theta, y = b + r \sin \varphi \sin \theta, z = c + r \cos \theta,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Якобиан перехода равен $r^2 \sin \theta$. Уравнение границы области G имеет вид $r = R$. Следовательно,

$$\Pi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 [a + b + c + r(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta)] dr = 8/3 \pi(a + b + c)R^3.$$

2. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{\Phi} \frac{\cos \varphi}{r^2} dS,$$

где Φ – поверхность, ограничивающая простую замкнутую область G ; $N(\xi, \eta, \zeta)$ – фиксированная точка вне области G ; $M(x, y, z) \in \Phi$; $\mathbf{r} = \{x - \xi, y - \eta, z - \zeta\}$, $r = |\mathbf{r}|$; $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – внешняя единичная нормаль к поверхности Φ в точке M ; φ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$.

Решение. Выразим $\cos \varphi$ через координаты векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{n}||\mathbf{r}|} = \frac{(x - \xi) \cos \alpha + (y - \eta) \cos \beta + (z - \zeta) \cos \gamma}{r}.$$

Поверхностный интеграл I запишется в виде

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{\Phi} \left(\frac{x - \xi}{r^3} \cos \alpha + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \beta + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \gamma \right) dS,$$

Так как точка $N(\xi, \eta, \zeta)$ лежит вне области G , то $r \neq 0$ и, следовательно, функции $P =$

$\frac{x - \xi}{r^3}$, $Q = \frac{y - \eta}{r^3}$, $R = \frac{z - \zeta}{r^3}$ непрерывны вместе с их частными производными первого порядка в области G . Находим

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x - \xi)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y - \eta)^2}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z - \zeta)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0.$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, получаем

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 0.$$

3. Вычислить интеграл Гаусса $I(0, 0, 0)$ (см. предыдущий пример), если Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Решение. Формулу Остроградского-Гаусса применять нельзя, так как функции P, Q, R не являются непрерывными в точке $N(0, 0, 0) \in G$. Так как $\xi = \eta = \zeta = 0$, $\mathbf{n} = \{x/a, y/b, z/c\}$ и $r = a$, то

$$\frac{x - \xi}{r^3} \cos \alpha + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \beta + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ar^3} = \frac{1}{a^2},$$

$$I(0, 0, 0) = \frac{1}{a^2} \iint_{\Phi} dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi,$$

т. е. интеграл Гаусса $I(0, 0, 0)$ не зависит от радиуса a сферы.

4. Пусть Φ – гладкая поверхность, ограничивающая простую замкнутую область G , функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в области G , $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции $u(x, y, z)$ по направлению внешней нормали к поверхности Φ . Доказать, что

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta u dx dy dz,$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Решение. Пусть $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

и поверхностный интеграл $\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS$ запишется в виде

$$\iint_{\Phi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, получим

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iiint_G \Delta u dx dy dz.$$

5. Вычислить интеграл $I = \iint_{\Phi} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy$, где Φ – нижняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 2x$.

Решение. Дополним поверхность Φ до замкнутой частью плоскости $z = 2x$. Обозначим плоскую часть через Φ_1 и выберем ее верхнюю сторону. Для вычисления интеграла по замкнутой кусочно гладкой поверхности $\Phi + \Phi_1$ применим формулу Остроградского-Гаусса. Тогда для интеграла I получим

$$I = \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) dx dy dz - \iint_{\Phi_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy,$$

где G – тело, ограниченное поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2x$. Вычислим тройной интеграл с помощью повторных интегралов. Область G проектируется на плоскость Oxy в область D , границей которой является окружность $2x = x^2 + y^2$. Находим

$$\begin{aligned} \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{2x} [3(x^2 + y^2) + 2z] dz = \\ &= \iint_D [6x(x^2 + y^2) + 4x^2 - 4(x^2 + y^2)^2] dx dy. \end{aligned}$$

Двойной интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В полярных координатах уравнение окружности примет вид $r = 2 \cos \varphi$, и поэтому двойной интеграл равен

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r [6r^3 \cos\varphi + 4r^2 \cos^2\varphi - 4r^4] dr = \\
& = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{6}{5} r^5 \cos\varphi + r^4 \cos^2\varphi - \frac{2}{3} r^6 \right) \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \\
& = 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{12}{5} \cos^6\varphi + \cos^6\varphi - \frac{8}{3} \cos^6\varphi \right) d\varphi = \frac{176}{15} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6\varphi d\varphi = \\
& = \frac{176}{15} \left[\frac{5}{16} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3}{64} \sin 4\varphi - \frac{1}{48} \sin^3 2\varphi \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{11}{3} \pi.
\end{aligned}$$

Вычислим интеграл по верхней стороне области Φ_1 на плоскости $z = 2x$, учитывая, что единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ равен $\{-2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}\}$. Получаем

$$\iint_{\Phi_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy = \iint_{\Phi_1} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} x^3 + \frac{z^2}{\sqrt{5}} \right) dS.$$

Этот интеграл вычислим с помощью двойного интеграла по области D . Находим $z_x = 2$, $z_y = 0$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{5}$ и

$$\iint_{\Phi_1} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} x^3 + \frac{z^2}{\sqrt{5}} \right) dS = \iint_D (-2x^3 + 4x^2) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (-2r^3 \cos^3\varphi + 4r^2 \cos^2\varphi) r dr = \\
& = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{64}{5} \cos^8\varphi + 16 \cos^6\varphi \right) d\varphi = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, данный интеграл I равен $\frac{11\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}$.