

Интегрируемость функции (по Риману) и определенный интеграл

Примеры решения задач

1. Постоянная функция $f(x) = C$ интегрируема на $[a, b]$, так как для любых разбиений и любого выбора точек ξ_i интегральные суммы имеют одно и то же значение

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b - a).$$

Отсюда $\int_a^b C \, dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = C(b - a).$

2. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом сегменте $[a, b]$.

Решение. В самом деле, на любом сколь угодно малом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ найдутся как рациональная, так и иррациональная точка. Если на всех сегментах выбрать рациональные ξ_i , то $I(x_i, \xi_i) = b - a$; если же все ξ_i иррациональны, то $I(x_i, \xi_i) = 0$. Чередую такие выборы при $\Delta \rightarrow 0$, получаем, что предел I не существует. Значит, функция Дирихле не интегрируема.

3. Проверить, что для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1, 4]$ выполнено условие (1)

теоремы 2, и вычислить $I = \int_{-1}^4 (1 + x) \, dx$ как предел интегральных сумм.

Решение. Согласно теореме 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ нужно указать такое разбиение сегмента $[-1, 4]$, при котором $S - s < \varepsilon$.

Разобьем сегмент $[-1, 4]$ на n равных частей. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i] = \left[-1 + \frac{5(i-1)}{n}, -1 + \frac{5i}{n}\right]$ непрерывная функция $1+x$ достигает точной нижней грани на левом конце сегмента, а точной верхней – на правом. Поэтому

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{5(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} (i-1) = \frac{5}{n} \cdot \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1), \\ S &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{5i}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot i = \frac{5}{n} \cdot \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$S - s = \frac{25}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n (i-1) \right) = \frac{25}{n^2} n = 25/n < \varepsilon,$$

если $n > 25/\varepsilon$, т. е. при таком числе n точек разбиения сегмента $[-1, 4]$ выполнено

неравенство (1). Значит, по теореме 2 интеграл $I = \int_{-1}^4 (1+x) dx$ существует.

Чтобы вычислить его как предел интегральных сумм, можно рассмотреть любую последовательность интегральных сумм, у которой $\Delta \rightarrow 0$, поскольку из существования интеграла следует, что предел любой последовательности интегральных сумм при измельчении разбиения существует и равен I .

Возьмем, например, последовательность интегральных сумм, соответствующую разбиениям сегмента $[-1, 4]$ на n равных частей ($n = 1, 2, \dots$) и выбору в качестве точек ξ_i правых концов частичных сегментов. В этом случае для возрастающей функции $f(x) = 1+x$

x интегральная сумма равна верхней сумме $S = \sum_{i=1}^n \frac{25}{n^2} i$ откуда получаем

$$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{25}{n^2} i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n(n+1)}{2n^2} = 25/2.$$

Итак, $\int_{-1}^4 (1+x) dx = 25/2$.

4. Доказать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где m и n ($n \leq 1$) – взаимно простые целые числа, интегрируема на любом сегменте $[a, b]$.

Решение. Снова воспользуемся теоремой 2. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \varphi(x) < 1$$

только в некотором конечном числе N точек.

Это вытекает из следующих соображений. Все рациональные точки сегмента $[a, b]$, т. е. точки вида m/n , можно занумеровать в таком порядке: сначала точки вида $m/1$, затем $m/2$, затем $m/3$ и т. д. Соответствующие значения функции $\varphi(x)$ в этих точках равны $1/1, 1/2, 1/3, \dots$, т. е. уменьшаются с переходом к каждой следующей группе точек, причем точек каждого вида имеется конечное число. Таким образом, в число указанных N точек попадут

такие, для которых $1/n > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, откуда $n < 2(b-a)/\varepsilon$. Ясно, что таких точек конечное число (пусть оно равно N).

Покроем эти N точек конечной системой попарно непересекающихся сегментов с общей суммой длин, меньшей $\varepsilon/2$. Длины этих сегментов обозначим $\Delta x_i'$. Получилось некоторое разбиение $[a, b]$. На сегментах с длинами $\Delta x_i'$ колебания ω_i' функции $\varphi(x)$ не больше 1, поскольку $\forall x \in [a, b] 0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Имеется также некоторое конечное число остальных сегментов (обозначим их длины $\Delta x_i''$). Колебания ω_i'' функции $\varphi(x)$ на этих сегментах не

превышают $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Поэтому для полученного разбиения справедливы оценки

$$\begin{aligned} S - s &= \sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i'' < 1 \cdot \sum \Delta x_i' + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x_i'' < 1 \cdot \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, по заданному $\varepsilon > 0$ нашлось разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$, следовательно, по теореме 2 функция Римана $\varphi(x)$ интегрируема на любом сегменте $[a, b]$.

5. Вычислить $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}$.

Решение. Этот интеграл принадлежит к типу интегралов, рассмотренных в замечании к теореме 4, поскольку

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi/2, \pi/2 < x \leq \pi, \\ \text{не определена} & \text{при } x = \pi/2. \end{cases}$$

Доопределив эту функцию в точке $\pi/2$, например, по непрерывности, т. е. полагая $f(\pi/2) = 1$, мы получим $f(x) \equiv 1 \forall x \in [0, \pi]$, и, следовательно, искомый интеграл равен π .

Свойства определенного интеграла

Примеры решения задач

1. Доказать, что сумма, произведение и частное двух неинтегрируемых функций могут быть интегрируемы.

Решение. Пусть $f(x) = 2 + D(x)$, $g(x) = 2 + D(x)$, где

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \end{cases}$$

(т. е. $D(x)$ — функция Дирихле).

Напомним, что функция $D(x)$ неинтегрируема (см. пример 2 из § 1). Функция $f(x) = 2 + D(x)$ также неинтегрируема. В самом деле, если допустить, что $f(x)$ интегрируема, то разность двух интегрируемых функций $f(x) - 2 = D(x)$ согласно свойству 3° должна быть интегрируемой, но это противоречит тому, что $D(x)$ неинтегрируема. Так как $g(x) = f(x)$, то $g(x)$ неинтегрируема. Рассмотрим функцию

$$h(x) = 1/g(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \\ 1/3, & \text{если } x - \text{рациональное число.} \end{cases}$$

Эта функция также неинтегрируема. Доказательство аналогично доказательству неинтегрируемости функции Дирихле.

Составим сумму, произведение и частное неинтегрируемых функций:

$$F_1(x) = f(x) + (-g(x)) \equiv 0, F_2(x) = f(x)h(x) \equiv 1, F_3(x) = f(x)/g(x) \equiv 1.$$

Функции F_1, F_2, F_3 как постоянные интегрируемы на любом сегменте $[a, b]$. Таким образом, из интегрируемости суммы или произведения не следует интегрируемость слагаемых или сомножителей.

2. Доказать, что произведение интегрируемой функции $f(x)$ на неинтегрируемую функцию $g(x)$ может быть: а) интегрируемой функцией; б) неинтегрируемой функцией.

Решение. а) Рассмотрим, например, интегрируемую функцию $f(x) \equiv 0$ и неинтегрируемую функцию Дирихле $D(x)$ на $[a, b]$. Так как $f(x)D(x) \equiv 0$, то $f(x)D(x)$ – интегрируемая функция на $[a, b]$.

б) Пусть $f(x) \equiv 2$, $g(x) = D(x)$ на $[a, b]$. Тогда $f(x)g(x) = 2D(x)$ – неинтегрируемая на $[a, b]$ функция.

3. Найти среднее значение функции на заданном сегменте: а) $f(x) = \cos x$ на $[0, 3\pi/2]$; б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 2]$.

Решение. Находим средние значения μ , пользуясь формулой (2):

а) $\mu = \frac{2}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx = -\frac{2}{3\pi}$. Отметим, что непрерывная функция $\cos x$ принимает на сегменте $[0, 3\pi/2]$ значение $\mu = -2/(3\pi)$, а именно $\cos \xi = -2/(3\pi)$, в точке $\xi = \arccos(-2/(3\pi)) \in [0, 3\pi/2]$.

б) $\mu = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x \, dx = 1/3$. В данном случае разрывная функция $\operatorname{sgn} x$ не принимает на сегменте $[-1, 2]$ значение $\mu = 1/3$.

Формула Ньютона-Лейбница

Примеры решения задач

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) \, dt}{x}$$

1. Найти

Решение. Данный предел представляет собой неопределенность вида $0/0$. Интеграл с

переменным верхним пределом $\int_0^x \cos(t^2) \, dt$ есть первообразная непрерывной функции $\cos$

x^2 , т. е. $\left(\int_0^x \cos(t^2) \, dt \right)' = \cos(x^2)$. Поэтому, применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Отметим, что первообразная для $\cos(x^2)$ не является элементарной функцией, т. е. $\int_0^x \cos(t^2) dt$ не выражается через элементарные функции. Это, однако, не помешало вычислению искомого предела.

2. Найти первообразную кусочно непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1; \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}.$$

Решение. Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом, причем в качестве нижнего предела интегрирования можно взять любое число, например $x = -2$. Итак,

$$F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ x + 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 2 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

(рис. 15).

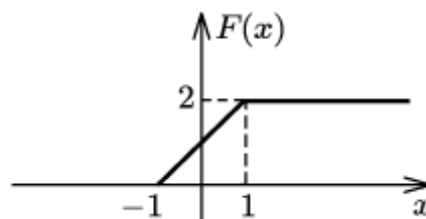


Рис. 15

3. Вычислить $I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$

Решение. I способ. Подынтегральная функция $f(x)$ не определена в точке $x = \pi/2$. Разобьем сегмент $[0, \pi]$ на два: $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$. Полагая на первом сегменте $f(\pi/2) = 1$, получим интеграл от непрерывной функции $f \equiv 1$:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2.$$

На втором сегменте положим $f(\pi/2) = -1$ и снова получим интеграл от непрерывной функции $f \equiv -1$:

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} (-1) \, dx = -x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\pi/2.$$

Окончательно имеем $I_1 + I_2 = 0$.

II способ. Воспользуемся расширенным определением первообразной. Функция $F(x)$, удовлетворяющая этому определению, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x & \text{при } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

В самом деле, $F(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$ и $F'(x) = f(x) \, \forall \, x \in [0, \pi], x \neq \pi/2$, т. е. $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$. (Напомним, что $x = \pi/2$ — точка разрыва $f(x)$.)

Согласно формуле Ньютона-Лейбница, справедливой для кусочно непрерывных функций и расширенного определения первообразной, получаем

$$I = \int_0^{\pi} f(x) \, dx = F(x) \Big|_0^{\pi} = \pi - x|_{x=\pi} - x|_{x=0} = 0.$$

Следующие два примера показывают, что формальное применение формулы Ньютона-Лейбница (т. е. использование этой формулы без учета условий ее применимости) может привести к неверному результату.

4. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Взяв в качестве первообразной подынтегральной

функции $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ функцию $F(x) = \sqrt{x}$ и формально применив формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1.$$

Однако этот результат неверен, так как функция $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$ не ограничена на $[0, 1]$, и,

следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ не существует.

5. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

На первый взгляд может показаться, что функция $\operatorname{arctg}(1/x)$ является первообразной подынтегральной функции $\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)$, и тогда по формуле Ньютона-Лейбница получаем

$$I = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2.$$

Однако этот результат неверен, поскольку функция $\operatorname{arctg}(1/x)$ не является первообразной для $\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)$ на сегменте $[-1, 1]$.

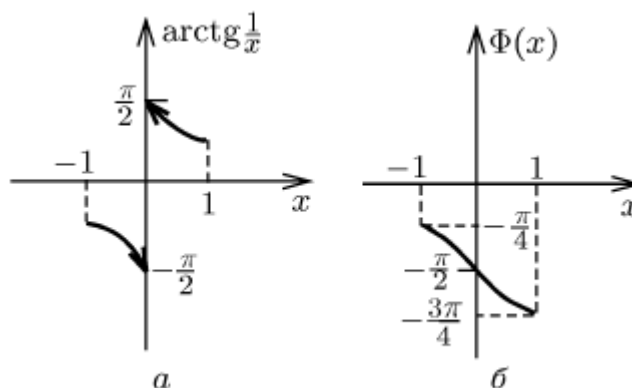


Рис. 16

В самом деле, на рис. 16, а изображен график функции $\operatorname{arctg}(1/x)$. Наглядно видно, что эта функция имеет в точке $x = 0$ разрыв I рода, в то время как первообразная по самому определению должна быть непрерывной во всех точках.

Чтобы вычислить интеграл I , заметим, что

$$\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доопределяя эту функцию в точке $x = 0$ по непрерывности, получим непрерывную функцию

$$f(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Первообразной для $f(x)$ является $F(x) = -\operatorname{arctg} x$, поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$I = -\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = -\pi/4 + (-\pi/4) = -\pi/2.$$

Отметим, что первообразную для $f(x)$ можно построить также с помощью функции $\operatorname{arctg} (1/x)$, а именно:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} (1/x) & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ -\pi/2 & \text{при } x = 0, \\ \operatorname{arctg} (1/x) - \pi & \text{при } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

График $\Phi(x)$ изображен на рис. 16, б. По формуле Ньютона-Лейбница снова получаем

$$I = \Phi(x) \Big|_{-1}^1 = -3\pi/4 - (-\pi/4) = -\pi/2.$$

6. Применяя подходящую замену переменной, вычислить

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Решение. Положим $x = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Такая замена переменной удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Так как $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$, то

$$I = a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = a^4/4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt =$$

$$= a^4/8 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = a^4/8 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi a^4/16.$$

Следующий пример показывает, что формальное применение формулы замены переменной (без учета условий ее применимости) может привести к неверному результату.

7. Если в интеграле $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$ сделать формально замену переменной $x = 1/t$ и написать

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+1/t^2} \left(-\frac{1}{t^2} \right) = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\pi/2, \quad (2)$$

то получается, очевидно, неверный результат.

Ошибка связана с тем, что изменению x сегменте $[-1, 1]$ соответствует изменение $t = 1/x$ не на сегменте $[-1, 1]$, как написано в равенстве (2), а на объединении полупрямых $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Тем самым указанная замена переменной не удовлетворяет требованиям теоремы 4.

8. Вычислить $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$ непрерывна на сегменте $[0, 2\pi]$ и, следовательно, имеет первообразную. Для нахождения первообразной функции $f(x)$ подходящей заменой переменной является $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (см. гл. V). Однако для определенного интеграла I такая замена не удовлетворяет условиям теоремы 4, поскольку изменению x на сегменте $[0, 2\pi]$ не соответствует изменение t на некотором сегменте: $t = \operatorname{tg}(x/2) \rightarrow +\infty (-\infty)$ при $x \rightarrow \pi - 0 (\pi + 0)$. Поэтому воспользуемся указанной заменой переменной для нахождения первообразной подынтегральной функции. Рассмотрим

неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$. На каждом из промежутков $0 \leq x < \pi$ и $\pi < x \leq 2\pi$ для него допустима замена переменной $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

В первом случае обратной функцией является $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ($0 \leq t < +\infty$), во втором $x = 2(\pi + \operatorname{arctg} t)$ ($-\infty < t \leq 0$). В каждом случае $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, и мы получаем

$$\Phi(x) = \int \frac{dx}{1+0,5 \cos x} = 4 \int \frac{dt}{3+t^2} \Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} + C = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

При любой постоянной C функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$ на промежутках $[0, \pi)$ и $(\pi, 2\pi]$. Так как она имеет в точке $x = \pi$ разрыв I рода: $\Phi(\pi+0) - \Phi(\pi-0) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$, то $\Phi(x)$ не является первообразной для $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$ на всем сегменте $[0, 2\pi]$. Однако с помощью $\Phi(x)$ теперь уже легко построить первообразную для $f(x)$ на всем сегменте $[0, 2\pi]$. Положим

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi, \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тем самым на $[0, \pi)$ мы взяли $C = 0$, в точке $x = \pi$ доопределили $\Phi(x)$ (при $C = 0$) по

непрерывности слева, а на $(\pi, 2\pi]$ взяли $C = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Получилась функция $F(x)$, производная которой во всех точках сегмента $[0, 2\pi]$, в том числе и в точке $x = \pi$, равна функции $f(x)$ (для точки $x = \pi$ докажете этот факт самостоятельно), т. е. $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[0, 2\pi]$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$I = F(x) \Big|_0^{2\pi} = F(2\pi) - F(0) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

З а м е ч а н и е . Можно было бы разбить интеграл I на два интеграла: $I = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx$, и воспользоваться тем, что первообразной для $f(x)$ на $[0, \pi]$ является функция

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi, \end{cases}$$

а на $[\pi, 2\pi]$ – функция

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } \pi < x \leq 2\pi, \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi \end{cases}$$

($F_1(x)$ получается из $\Phi(x)$ при $C = 0$ с помощью доопределения $\Phi(x)$ в точке $x = \pi$ по непрерывности слева, а $F_2(x)$ – справа). В этом случае, применяя формулу Ньютона-Лейбница к каждому из интегралов, получаем

$$I = F_1(x) \Big|_0^\pi + F_1(x) \Big|_\pi^{2\pi} = F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_1(\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 + 0 - \left(-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

9. Вычислить $I = \int_{1/e}^e |\ln x| dx$.

Решение. Разбивая интеграл I на сумму интегралов по сегментам $[1/e, 1]$ и $[1, e]$ (чтобы "освободиться от модуля") и применяя в каждом интеграле формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} I &= - \int_{1/e}^1 \ln x \, dx + \int_1^e \ln x \, dx = -x \ln x \Big|_{1/e}^1 + \int_{1/e}^1 \frac{1}{x} dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx = \\ &= -1/e + (1 - 1/e) + e - (e - 1) = 2(1 - 1/e). \end{aligned}$$

10. Вычислить $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\pi x \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = - \int_0^\pi x \, d(\operatorname{arctg}(\cos x)) = \\ &= -x \operatorname{arctg}(\cos x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x) \, dx = -\pi(-\pi/4) - 0 + I_1 = \pi^2/4 + I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx$.

Чтобы найти I_1 , заметим, что график функции $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$ центрально симметричен относительно точки $(\pi/2, f(\pi/2)) = (\pi/2, 0)$. Поэтому интегралы от этой функции по сегментам $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$ равны по модулю и противоположны по знаку, а значит, в сумме равны нулю, т. е. $I_1 = 0$. Этот же факт можно установить таким образом: разобьем I_1 на два интеграла по сегментам $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$ соответственно и во втором интеграле сделаем замену переменной $x = \pi - t$. Получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^0 \operatorname{arctg}(-\cos t) (-dt) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos t) dt = 0 \end{aligned}$$

Итак, $I_1 = 0$, поэтому $I = \pi^2/4$.

Вычисление длин плоских кривых

Примеры решения задач

1. Найти длину параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

Решение. По формуле (4) получаем

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17}).$$

2. Найти длину одной "арки" циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. По формуле (2) находим

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = 8a.$$

3. Найти переменную дугу эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b$) между точкой $(0, b)$ и любой точкой эллипса в первой четверти.

Решение. Полагая $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, по формуле (3) получаем (считая от верхнего конца малой полуоси)

$$l(t) = a \int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} \, dt = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \, dt,$$

где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

Таким образом, переменная дуга эллипса выражается интегралом

$$l(t) = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} \, dt = a E(\varepsilon, t),$$

который называется *эллиптическим интегралом II рода*.

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Он широко используется в математике. Его название объясняется как раз связью с рассмотренной задачей.

Если $t = \pi/2$, то интеграл выражает $1/4$ длины эллипса. В этом случае эллиптический интеграл $E(\varepsilon, \pi/2)$ называют *полным эллиптическим интегралом* и обозначают $E(\varepsilon)$.

Вычисление площадей плоских фигур

Примеры решения задач

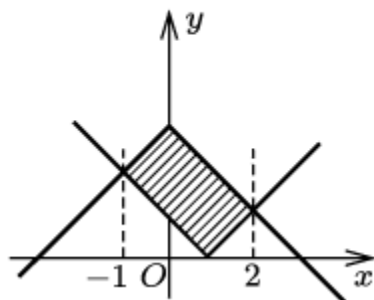


Рис. 19

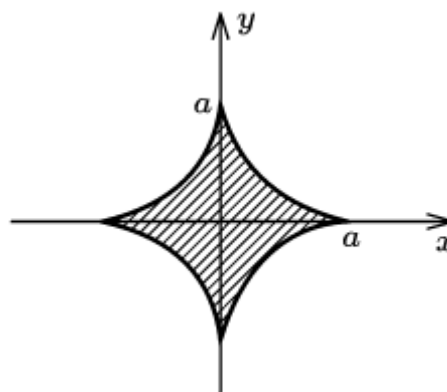


Рис. 20

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = |x - 1|$, $y = 3 - |x|$.

Решение. Данные кривые пересекаются в двух точках (рис. 19). Решив уравнение $3 - |x| = |x - 1|$, найдем абсциссы этих точек: $x = -1$, $x = 2$. Поэтому

$$S = \int_{-1}^2 (3 - |x| - |x - 1|) dx.$$

Разобьем интеграл на три интеграла соответственно по сегментам $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$. Получим

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 [(3 + x) - (1 - x)] dx + \int_0^1 [(3 - x) - (1 - x)] dx + \\ &+ \int_1^2 [(3 - x) - (x - 1)] dx = 1 + 2 + 1 = 4. \end{aligned}$$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 20).

Решение. Полагая $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, приходим к параметрическим уравнениям астроиды (параметр t играет роль полярного угла точки (x, y) на астроиде). По формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} S &= 1/2 \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt = \\ &= 3/2 a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = 3/8 \pi a^2. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 1. Симметричная формула (4) привела здесь к более простому интегралу, чем тот, который получился бы в результате применения формул (2) или (3).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что интеграл по сегменту $[0, \pi/2]$

$$3a^2/2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 3/32 \pi a^2$$

дает площадь той части фигуры, которая лежит в I квадранте (рис. 21), хотя в этом случае вся граница фигуры уже не описывается уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, поскольку содержит отрезки осей координат. Почему же получился правильный результат? Дело в том, что параметрически отрезок $[a, 0]$ оси Oy можно задать уравнениями $x = 0$, $y = 2a(1 - t/\pi)$, $\pi/2 \leq t \leq \pi$, а отрезок $[0, a]$ оси Ox — уравнениями $x = 2a(t/\pi - 1)$, $y = 0$, $\pi \leq t \leq 3\pi/2$. На этих отрезках параметр t не играет роли полярного угла. Используя теперь полную параметризацию границы фигуры (параметр t изменяется от 0 до $3\pi/2$) и разбивая интеграл по сегменту $[0, 3\pi/2]$ на три интеграла, соответствующих криволинейному и двум прямолинейным участкам границы, получаем, что интегралы по отрезкам координатных осей обращаются в нуль, так как на каждом из них одна координата и ее производная по параметру равны нулю.

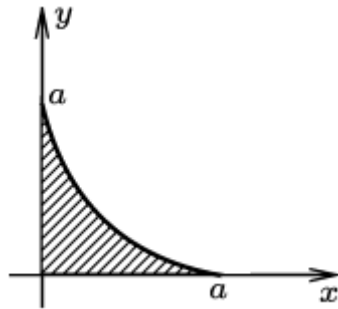


Рис. 21

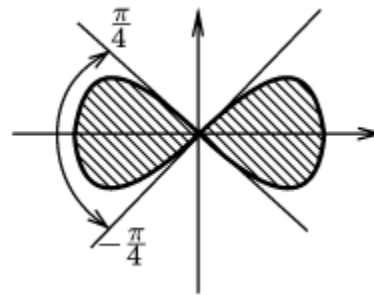


Рис. 22

По той же причине формула (2) остается справедливой для криволинейной трапеции, ограниченной отрезком оси Ox , двумя вертикальными отрезками и кривой, заданной параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leq t \leq T$, если при изменении t от 0 до T точка $(\varphi(t), \psi(t))$ пробегает кривую так, что трапеция остается слева от точки. В противном случае в формуле (2) перед интегралом нужно поставить знак плюс.

З а м е ч а н и е 3. Найти площадь фигуры, ограниченной циклоидой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, и осью Ox .

Решение. По формуле (2) (где в силу замечания 2 перед интегралом взят знак плюс) имеем

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

З а м е ч а н и е 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = 2a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

Решение. Учитывая неотрицательность ρ , находим, что $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ и $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$ (рис. 22). По формуле (5) вычисляем площадь одной из двух равных частей фигуры и удваиваем результат:

$$S = 2 \cdot (1/2) \cdot 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2.$$

Вычисление объемов тел

Примеры решения задач

- 1.** Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox .

Решение. По формуле (2) имеем

$$V = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 4/3 \pi ab^2.$$

- 2.** Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = \sqrt{3}y$, $z = 0$ ($y \geq 0$).

Решение. I способ. Рассмотрим сечения этого тела плоскостями $x = \text{const}$. В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

$$S(x) = 1/2 y(x)z(x) = 1/2 \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{3} \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{3}/2 (a^2 - x^2).$$

По формуле (1) находим

$$V = \sqrt{3}/2 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 2\sqrt{3}/3 a^3.$$

II способ. Рассекая это же тело плоскостями $y = \text{const}$, в сечениях получаем прямоугольники с площадями

$$S(y) = 2 x(y)z(y) = 2 \sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{3} y.$$

Поэтому

$$V = 2 \sqrt{3} \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2 \sqrt{3} / 3 a^3.$$

Физические приложения определенного интеграла

Примеры решения задач

1. Найти статические моменты и координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = f_2^2(x) = 2px$ и прямыми $y = f_1(x) = 0$ и $x = 1$.

Решение. По формулам (1) и (2) находим

$$M_x = 1/2 \int_0^1 f_2^2(x) dx = (1/2) \cdot 2p \int_0^1 x dx = p/2,$$

$$M_y = \int_0^1 x f_2(x) dx = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{3/2} dx = 2 \sqrt{2p} / 5.$$

Вычислим площадь этой криволинейной трапеции:

$$S = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{1/2} dx = 2 \sqrt{2p} / 3.$$

Теперь по формулам (3) находим координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{M_y}{S} = 3/5, y_0 = \frac{M_x}{S} = 3/8 \sqrt{2p}.$$

2. Применяя вторую теорему Гульдена (см. ниже упр. 44), найти координаты центра тяжести плоской фигуры G , ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, и осью Ox .

Решение. Объем тела, полученного от вращения фигуры вокруг оси Ox , равен

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3.$$

Площадь фигуры G равна

$$S = \int_0^{2\pi a} y \, dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \, dt = 3\pi a^2.$$

Пусть y_0 – ордината центра тяжести. Согласно второй теореме Гульдена $S \cdot 2\pi y_0 = V$, откуда $y_0 = 5a/6$. Из симметрии фигуры G относительно прямой $x = \pi a$ следует, что абсцисса центра тяжести есть $x_0 = \pi a$.

Несобственные интегралы I и II рода

Примеры решения задач

1. Вычислите несобственный интеграл, используя определение.

1.1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{\pi}{2}.$$

1.2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x \, dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{1+x^2} = +\infty$$
, интеграл расходится, но можно также сказать, что он равен $+\infty$.

1.3.
$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \sin x \, dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-\cos x) \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (1 - \cos(A))$$
, предел не существует, интеграл расходится.

2. Исследуйте сходимость интеграла $\int_1^{\infty} x^a \sin \frac{1}{x} \, dx$ с помощью признаков сравнения.

Решение. Так как $0 \leq f(x) = x^a \sin \frac{1}{x}$, то при $x \rightarrow \infty$ получаем: $\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

При этом: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{-a+1}}} = 1$, так как $f(x) = x^a \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{x^{-a+1}} + o\left(\frac{1}{x^{-a+1}}\right) \Rightarrow$ исходный интеграл сходится и расходится одновременно с интегралом: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{-a+1}} \, dx$.

Ответ. Сходится при $-a + 1 > 1 \Leftrightarrow a < 0$, расходится при $a \geq 0$.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Примеры решения задач

1. Исследуйте сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx$.

Решение. Во-первых, отметим, что подынтегральная функция неотрицательна. Во-вторых, необходимо исследовать сходимость интеграла в точке $x = 0$ и на бесконечности, то есть данный интеграл одновременно является несобственным интегралом I и II рода. Пользуясь свойством аддитивности интеграла, разобьем его на сумму двух интегралов

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\arctg x}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx.$$

Промежуточное значение 1 выбрано произвольно. Рассмотрим эти интегралы по отдельности.

Интеграл $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^n} dx$ исследуем на сходимость в точке $x = 0$.

В окрестности этой точки $\arctg x = x + o(x)$, поэтому функция $\frac{\arctg x}{x^n} = \frac{x + o(x)}{x^n} = \frac{1 + o(1)}{x^{n-1}}$. Тогда $\int_0^1 \frac{\arctg x}{x^n} dx$ сходится одновременно с $\int_0^1 \frac{1}{x^{n-1}} dx$, то есть при $n - 1 < 1 \Leftrightarrow n < 2$.

Рассмотрим $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx$. Функция $\arctg x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx$ сходится одновременно с $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$, то есть при $n > 1$.

Объединяя оба результата, получаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^n} dx$ сходится при $1 < n < 2$.

2. Исследуйте сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^2) dx$.

Решение. Снова необходимо исследовать сходимость интеграла в точке $x = 0$ и на бесконечности, поэтому опять разобьем интеграл на сумму двух интегралов. Подынтегральная функция не является знакоопределенной на всей области

интегрирования, но можно выбрать достаточно малый промежуток вблизи нуля, чтобы функция сохраняла знак.

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^2) dx = \int_0^{0.5} x^p \sin(x^2) dx + \int_{0.5}^{+\infty} x^p \sin(x^2) dx$$

Тогда первый интеграл $\int_0^{0.5} x^p \sin(x^2) dx$ по признаку сравнения сходится одновременно с $\int_0^{0.5} x^{p+2} dx$, то есть при $p > -3$.

Для исследования второго интеграла применим признак Дирихле. Сначала сделаем

замену переменной $t = x^2$. Тогда $\int_{0.5}^{+\infty} x^p \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{0.25}^{+\infty} t^{\frac{p-1}{2}} \sin t dt$. При этом функция $f(t) =$

$\sin t$ имеет ограниченную первообразную, так как $\left| \int_{0.25}^A \sin t dt \right| = |-\cos A + \cos 0.25| \leq 2$, а

функция $g(t) = t^{\frac{p-1}{2}}$ монотонно стремится к нулю при $p < 1$.

Ответ: интеграл сходится при $-3 < p < 1$.

Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы

Примеры решения задач

1. Исследуйте интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Исследуем сходимость $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx$. Так как $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится, то исходный интеграл сходится абсолютно. Данный интеграл является сходящимся, но не является условно сходящимся.

2. Исследуйте интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ на абсолютную и условную сходимость.

Решение. Интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится по признаку Дирихле-Абеля, так как функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, а функция $\sin x$ имеет ограниченную

первообразную на любом промежутке области интегрирования. Теперь исследуем

сходимость $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| dx$. Докажем, что этот интеграл не является сходящимся.

Действительно, $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \cos 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$. Интеграл от первой функции $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ расходится по признаку сравнения, а интеграл от второй функции $\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}}$ сходится

по признаку Дирихле-Абеля (доказывается аналогично сходимости $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$). Поэтому

интеграл от разности этих функций расходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right| dx$

расходится, а интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится условно.