

Криволинейные интегралы первого рода

Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl$, где кривая L – астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Решение. Запишем параметрические уравнения астроида: $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Так как $x' = -3a \cos^2 t \sin t, y' = 3a \sin^2 t \cos t$, то $x'^2 + y'^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$.

Отметим, что $x'^2 + y'^2 = 0$ в четырех точках $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, т. е. астроида является кусочно гладкой кривой.

Для вычисления криволинейного интеграла применим формулу (4). Получим

$$\begin{aligned} \int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl &= \int_0^{2\pi} a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a |\cos t \sin t| dt = \\ &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt = \\ &= 12a^{7/3} \left[-\frac{\cos^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} \right] = 4a^{7/3}. \end{aligned}$$

2. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – кривая, заданная уравнением $(x^2 + y^2)^{3/2} = a^2(x^2 - y^2)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$. Уравнение кривой L примет вид

$$r = a^2 \cos 2\varphi, \varphi \in \Phi = \{\varphi: -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4\}.$$

Для вычисления интеграла применим формулу (6). Так как

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r = a^2 \cos \varphi, \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = a^2 \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi}.$$

то

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{\varphi \in \Phi} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2a^4}{2\sqrt{3}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi} d(\sqrt{3} \sin 2\varphi) = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{3} + 2). \end{aligned}$$

3. Найти массу m материальной кривой L , заданной уравнением $y = \ln x$, где $1 \leq x \leq e$, если линейная плотность ее в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы, т. е. $\rho(x, y) = kx^2$.

Решение. По формуле для массы m имеем $m = \int_L kx^2 dl$. Для вычисления криволинейного интеграла воспользуемся равенством (5). Так как

$$\sqrt{1 + y'^2(x)} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x},$$

то

$$m = \int_1^e kx^2 \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx = \frac{k}{3} (1 + x^2)^{3/2} \Big|_1^e = \frac{k}{3} [(1 + e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}].$$

4. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int_L (x + y) dl$, где L меньшая часть окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченная точками $A(0, 0, R)$ и $B(R/2, R/2, R/\sqrt{2})$.

Решение. Запишем параметрические уравнения данной части окружности в виде $x = t, y =$

$$t, z = \sqrt{R^2 - 2t^2}, 0 \leq t \leq R/2. \text{ Тогда } \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}, \text{ и по формуле (7) находим}$$

$$I = \int_0^{R/2} 2t \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} dt = - \frac{R\sqrt{2}}{2} \int_0^{R/2} \frac{d(R^2 - 2t^2)}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2(\sqrt{2} - 1).$$

5. Найти координаты x_0, y_0, z_0 центра тяжести первого полувитка материальной винтовой линии L , заданного уравнениями $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq \pi$, если ее линейная плотность постоянна и равна ρ .

Решение. Масса m равна $\int_L \rho dl$. Вычислим этот интеграл по формуле (7). Так как

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ то } m = \rho \int_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2} dt = \pi \rho \sqrt{a^2 + b^2}. \text{ Значения } x_0, y_0, z_0 \text{ находим по формулам}$$

$$x_0 = \frac{\rho}{m} \int_L x dl, y_0 = \frac{\rho}{m} \int_L y dl, z_0 = \frac{\rho}{m} \int_L z dl$$

Каждый из этих интегралов вычисляем с помощью равенства (7):

$$x_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0, y_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2a/\pi, z_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi bt \sqrt{a^2 + b^2} dt = b\pi/2.$$

6. Найти момент инерции I относительно диаметра окружности L , заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$, если ее линейная плотность есть $\rho = 1$.

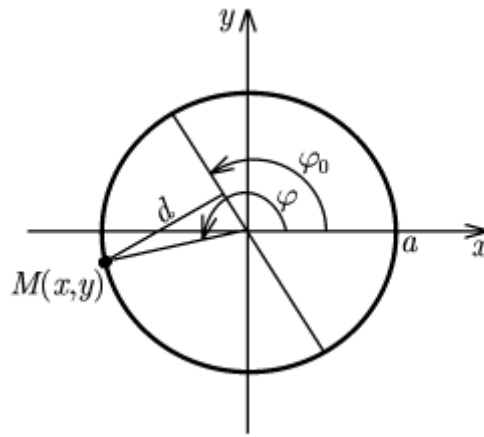


Рис. 53

Решение. Зафиксируем какой-нибудь диаметр окружности. Имеем

$$I = \int_L d^2(x, y) dl,$$

где $d(x, y)$ – расстояние от точки $M(x, y) \in L$ до диаметра. Перейдем к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тогда уравнение окружности L примет вид $r = a$. Пусть диаметр лежит на прямой, образующей угол φ_0 с осью Ox , где $\varphi_0 \in [0, \pi)$ (Рис. 53). При этом

$$d(x, y) = d(a \cos \varphi, a \sin \varphi) = a |\sin(\varphi - \varphi_0)|.$$

Пользуясь формулой (6) и учитывая, что $\sqrt{r^2 + r'^2} = a$, находим

$$I = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) a d\varphi = a^3 \int_0^{2\pi} [1/2 - 1/2 \cos(2\varphi - 2\varphi_0)] d\varphi = \pi a^3.$$

7. Пусть $\mathbf{c} = \{u(x, y), v(x, y)\}$ – скорость плоского потока несжимаемой жидкости в точке $M(x, y)$. Найти количество Q жидкости, вытекающей за единицу времени из области G , ограниченной гладким контуром L .

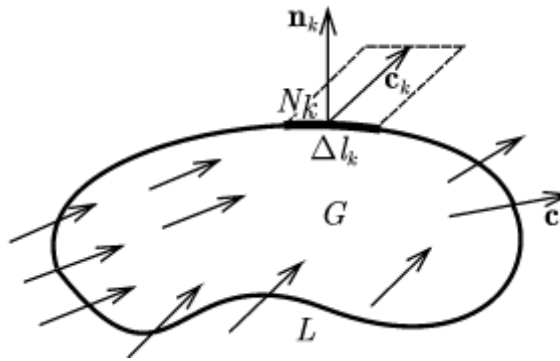


Рис. 54

Решение. Разобьем кривую L на n частичных дуг. Пусть $\mathbf{n}_k$ – единичный вектор внешней нормали к кривой L в точке $N_k(\xi_i, \eta_i)$ (т. е. вектор $\mathbf{n}_k$ направлен во вне области G), $|\Delta Q_k|$ – количество жидкости, вышедшей (вошедшей) за единицу времени через дугу длины Δl_k из области (в область) G (Рис. 54).

Так как $|\Delta Q_k|$ есть площадь параллелограмма со сторонами Δl_k и $|\mathbf{c}_k|$, где $\mathbf{c}_k = \{u_k, v_k\}$, $u_k = u(\xi_i, \eta_i)$, $v_k = v(\xi_i, \eta_i)$ то $\Delta Q_k = \Delta l_k (\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k)$. Если скалярное произведение $(\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k)$ положительно, то жидкость вытекает из области G ($\Delta Q_k > 0$), а если отрицательно, то втекает в G ($\Delta Q_k < 0$).

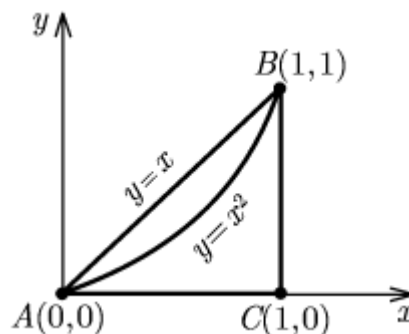
Далее, составим сумму $\sum_{k=1}^n (\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k) \Delta Q_k$ и перейдем к пределу при $\max \{\Delta l_k\} \rightarrow 0$.

Получим $Q = \int_L (\mathbf{c} \mathbf{n}) dl$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали в точке $M(x, y) \in L$.

Криволинейные интегралы второго рода

Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy$ по трем кривым, соединяющим точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, изображенным на рис. 55.



Решение. 1) Пусть кривая AB задана уравнением $y = x$. Тогда $y' = 1$, и, пользуясь формулой (7), получим

$$I_1 = \int_0^1 2x \cdot x \, dx + x^2 \, dx = \int_0^1 3x^2 \, dx = x^3 \Big|_0^1 = 1.$$

2) Для кривой AB , заданной уравнением $y = x^2$, имеем $y' = 2x$, откуда

$$I_2 = \int_0^1 2x \cdot x^2 \, dx + x^2 \cdot x \, dx = \int_0^1 4x^3 \, dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

3) Интегрируя по ломаной ACB , воспользуемся свойством аддитивности интеграла и представим его как сумму двух интегралов – по отрезкам AC и CB . Так как для отрезка AC $y = 0$, $y' = 0$ и $0 \leq x \leq 1$, то по формуле (7) получаем

$$\int_{AC} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 2x \cdot 0 \, dx + x^2 \cdot 0 \, dx = 0.$$

Для отрезка CB имеем $x = x(y) = 1$, $x' = 0$ и $0 \leq y \leq 1$; поэтому

$$\int_{CB} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0 \, dy + 1^2 \, dy = y \Big|_0^1 = 1.$$

Следовательно,

$$I_3 = \int_{AC} 2xy \, dx + x^2 \, dy + \int_{CB} 2xy \, dx + x^2 \, dy = 1.$$

Таким образом, $I_1 = I_2 = I_3 = 1$. Этот результат не случаен. Можно доказать, что значение данного интеграла I не зависит от кривой, соединяющей точки A и B . Вопрос о том, в каких случаях криволинейный интеграл второго рода не зависит от кривой, соединяющей две данные точки, будет рассмотрен в § 3.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int_{AB} (4x + y) \, dx + (x + 4y) \, dy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^4$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$.

Решение. Вычислим интеграл, пользуясь формулой (7). Учитывая, что $y = x^4$, $dy = 4x^3 dx$ и

$$x \text{ изменяется от } 1 \text{ до } -1, \text{ получаем } I = - \int_{-1}^1 (4x + x^4 + (x + 4x^4)x^3) dx = -2.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$, где L – окружность $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Решение. Запишем параметрические уравнения данной окружности: $x = 1 + 2 \cos t$, $y = 1 + 2 \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Вычисляем интеграл, пользуясь формулой (5). Так как $dx = -2 \sin t dt$, $dy = 2 \cos t dt$, то

$$\begin{aligned} \oint_L (x + y) dx + (x - y) dy &= \int_0^{2\pi} (2 + 2 \cos t - 2 \sin t)(-2 \sin t) dt + \\ &+ (2 \cos t - 2 \sin t)2 \cos t dt = \int_0^{2\pi} (-4 \sin t - 8 \sin t \cos t + 4 \cos 2t) dt = 0. \end{aligned}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $I = \int_L (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, где L – кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t .

Решение. Вычислим интеграл по формуле (6). Так как $dx = dt$, $dy = 2t dt$, $dz = 3t^2 dt$, $0 \leq t \leq 1$, то

$$I = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2) dt = 1/35.$$

5. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

вдоль замкнутого контура L , являющегося границей части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в I октанте: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, причем направление обхода контура таково, что в плоскости Oxy движение происходит от точки $A(1, 0, 0)$ к точке $B(0, 1, 0)$.

Решение. Контур L состоит из трех кривых, l_1, l_2, l_3 , каждая из которых является дугой единичной окружности, лежащей соответственно в координатной плоскости $Oxy, Oyz,$

Oxz . Поэтому $I = \sum_{k=1}^3 \int_{l_k} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$.

Найдем интеграл I_1 по кривой l_1 . Так как кривая l_1 лежит в плоскости Oxy , то $z = 0, dz = 0$ и

$I_1 = \int_{l_1} y^2 dx - x^2 dy$, где $l_1: x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0$. Запишем параметрические уравнения l_1 : $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$. По формуле (5) получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^3 t - \cos^3 t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = 2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = -4/3. \end{aligned}$$

Точно так же вычисляются интегралы I_2 и I_3 . При этом $I_1 = I_2 = I_3 = -4/3$. Следовательно, $I = -4$.

6. Найти магнитную индукцию $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$ магнитного поля, создаваемого током I , протекающим по замкнутому проводнику L , в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Рассмотрим произвольное разбиение кривой L на малые дуги $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ такие, что направление по дуге кривой от точки $M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$ к точке $M_k(x_k, y_k, z_k)$ совпадает с направлением тока. На дуге $M_{k-1}M_k$ выберем некоторую промежуточную точку $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. Каждую из дуг $M_{k-1}M_k$ заменим прямолинейным отрезком. Согласно закону Био-Савара электрический ток I , протекающий по отрезку $M_{k-1}M_k$, создает магнитное поле, индукция которого в точке M_0 равна

$$\Delta \mathbf{B}_k = \{\Delta B_{kx}, \Delta B_{ky}, \Delta B_{kz}\} = \frac{\gamma I}{r_k^3} [\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \mathbf{r}_k],$$

где $\mathbf{r}_k = \overrightarrow{M_0N_k} = \{\xi_k - x_0, \eta_k - y_0, \zeta_k - z_0\}$, $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \{x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}, z_k - z_{k-1}\} = \{\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k\}$, $r_k = |\mathbf{r}_k|$, γ – коэффициент пропорциональности. Поэтому

$$\Delta B_{kx} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\zeta_k - z_0)\Delta y_k - (\eta_k - y_0)\Delta z_k),$$

$$\Delta B_{ky} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\xi_k - z_0)\Delta z_k - (\zeta_k - z_0)\Delta x_k),$$

$$\Delta B_{kz} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\eta_k - y_0)\Delta x_k - (\xi_k - x_0)\Delta y_k).$$

Суммируя по k от 1 до n и переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, получим

$$B_x = \gamma I \oint_L \frac{(z - z_0) dy - (y - y_0) dz}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$B_y = \gamma I \oint_L \frac{(x - x_0) dz - (z - z_0) dx}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$B_z = \gamma I \oint_L \frac{(y - y_0) dx - (x - x_0) dy}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}.$$

Если ввести векторы $\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ и $\{dx, dy, dz\}$, то вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \gamma I \oint_L \frac{[\vec{dl} \cdot \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Отметим, что направление обхода контура L совпадает с направлением тока в контуре.

7. Привести пример, показывающий, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения

$$\int_{AB} P(x, y) dx = P(x^*, y^*) \int_{AB} dx,$$

где AB — гладкая кривая, $P(x, y)$ — непрерывная вдоль AB функция, (x^*, y^*) — некоторая точка кривой AB .

Решение. Рассмотрим полуокружность $\{x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\}$ с направлением обхода от точки $A(0, 1)$ к точке $B(0, -1)$. На полуокружности AB зададим непрерывную функцию $P(x, y) =$

у. Пользуясь параметрическими уравнениями кривой AB $x = \cos t, y = \sin t, \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$, вычислим криволинейные интегралы, входящие в формулу среднего значения:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{AB} y dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin t (-\sin t) dt = -\pi/2 \neq 0,$$

$$\int_{AB} dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\sin t) dt = 0.$$

Следовательно, не существует такого промежуточного значения $P(x^*, y^*)$ непрерывной

подынтегральной функции $P(x, y) = y$, для которого $\int_{AB} P(x, y) dx = P(x^*, y^*) \int_{AB} dx$.

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AO} (e^x \sin y - py) dx + (e^x \cos y - p) dy,$$

где кривая AO – верхняя полуокружность $x^2 + y^2 = ax, A(a, 0), O(0, 0)$ (Рис.59).

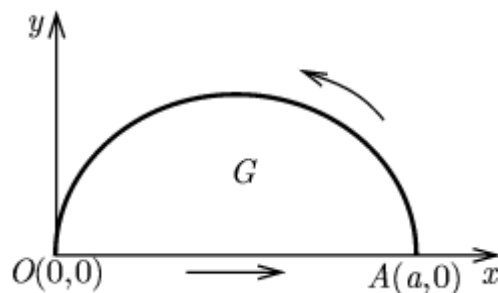


Рис. 59

Решение. Введем обозначения: $P = e^x \sin y - py, Q = e^x \cos y - p$. Дополним кривую интегрирования AO до замкнутого контура L отрезком OA оси Ox . Тогда получим

$$I = \oint_L P dx + Q dy - \int_{OA} P dx + Q dy.$$

Так как $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = p$, то по формуле Грина находим

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G p dx dy,$$

где область G – верхняя половина круга радиуса $a/2$. Поэтому

$$\iint_G p dx dy = p \cdot S(G) = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Вычислим интеграл по отрезку OA оси Ox . Учитывая, что на этом отрезке $P = 0$, $dy = 0$,

получим $\int_{OA} P dx + Q dy = 0$. Таким образом, $I = \frac{\pi a^2}{8} \cdot p$.

2. Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области G , ограниченной гладкой кривой L . Доказать, что справедлива вторая формула Грина:

$$\oint_L \left| \begin{matrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{matrix} \right| dl = \iint_G \left| \begin{matrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{matrix} \right| dx dy,$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали L , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

Решение. Сначала докажем, что

$$\oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_G \left(v \Delta u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (7)$$

Пусть $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ – единичный вектор внешней нормали к кривой L . Так как $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi$, то

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) dl.$$

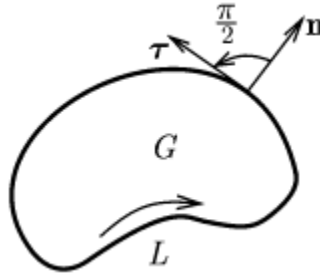


Рис. 60

Единичный касательный к L вектор $\tau = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$, направление которого соответствует положительному направлению обхода контура, получается поворотом вектора $\mathbf{n}$ на угол $\pi/2$ против часовой стрелки (Рис. 60). Поэтому

$$\alpha = \varphi + \pi/2, \cos \alpha = -\sin \varphi, \sin \alpha = \cos \varphi.$$

Учитывая эти равенства, с помощью формулы (8) из § 2 выразим криволинейный интеграл первого рода через криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) dl = \oint_L \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy.$$

Вводя обозначения $P = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial x}$, преобразуем последний интеграл по формуле Грина. Учитывая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

получим

$$\oint_L \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$= \iint_G \left(v \Delta u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

Таким образом, справедливость равенства (7) доказана.

Поменяв в равенстве (7) ролями функции $v(x, y)$ и $u(x, y)$, получим

$$\oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} dl = \iint_G \left(u \Delta v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8)$$

Составляя разность равенств (8) и (7), приходим ко второй формуле Грина:

$$\oint_L \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy.$$

3. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Пользуясь формулой (3), находим

$$S = 1/2 \oint_L x dy - y dx = 1/2 \int_0^{2\pi} (3ab \cos^4 t \sin^2 t + 3ab \sin^4 t \cos^2 t) dt =$$

$$= 3/2 ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = 3/8 ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = 3ab\pi/8.$$

4. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить криволинейный интеграл:

а) $\int_{AB} x dx - y dy$, где $A(0, 1)$, $B(3, -4)$;

б) $\int_{AB} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$, где $A(-2, -1)$, $B(3, 0)$.

Решение. а) Очевидно, $x dx - y dy = du$, где $u = x^2/2 - y^2/2$. По формуле (4) находим

$$\int_{AB} x dx - y dy = u(B) - u(A) = -7/2 - (-1/2) = -3.$$

б) Проверим выполнение условия IV теоремы 6: $P = x^4 + 4xy^3$, $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$. Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т. е. условие IV выполнено. Следовательно, по теореме 6 выражение $P dx + Q dy$ является полным дифференциалом, а криволинейный

интеграл $I = \int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную AMB , где $M(-2, 0)$. Тогда $AM = \{(x, y): x = -2, -1 \leq y \leq 0\}$, $MB = \{(x, y): y = 0, -2 \leq x \leq 3\}$.

Вдоль отрезка AM имеем $x = -2$, $dx = 0$, $-1 \leq y \leq 0$; поэтому $\int_{AM} P dx + Q dy = \int_{-1}^0 (24y^2 - 5y^4) dy = 7$. Вдоль отрезка MB имеем $y = 0$, $dy = 0$, $-2 \leq x \leq 3$; поэтому

$$\int_{MB} P dx + Q dy = \int_{-2}^3 x^4 dx = 55.$$

Искомый интеграл по ломаной AMB равен сумме вычисленных интегралов, т. е. равен 62.

5. Дважды дифференцируемая функция $u(x, y)$ называется гармонической в области G ,

если в этой области $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Доказать, что если для функции $u(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные второго порядка в односвязной области G , и для любого гладкого замкнутого контура L , лежащего в области G , справедливо равенство

$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к контуру L , то $u(x, y)$ – гармоническая функция в области G .

Решение. Пусть $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ – единичный вектор внешней нормали к кривой L . Так как

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi,$$

то

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) dl.$$

Далее, пусть $\mathbf{\tau} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ – единичный касательный вектор к кривой L , направление которого соответствует положительному направлению обхода контура. Тогда $\alpha = \pi/2 + \varphi$ (см. рис. 60), $\cos \alpha = -\sin \varphi$, $\sin \alpha = \cos \varphi$, и по формуле (8) из § 2 получим

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \right) dl = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Таким образом, $\oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0$ для любого замкнутого гладкого контура L , лежащего в односвязной области G , т. е. выполнено условие I теоремы 6. По теореме 6 из

условия I следует условие IV, т. е. $\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, откуда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, или $\Delta u = 0$. Это и означает, что функция $u(x, y)$ гармоническая в области G .

6. Вычислить интеграл $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, где L – замкнутый кусочно гладкий контур, окружающий начало координат, пробегаемый в положительном направлении и ограничивающий область G .

Решение. Покажем, что интеграл I не зависит от выбора контура L , окружающего начало

координат. Положим $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ при } x^2 + y^2 \neq 0,$$

т. е. условие IV теоремы 6 выполнено всюду в области G , за исключением точки $O(0, 0)$. Область G с выброшенной точкой O уже не является односвязной, поэтому утверждение 2° теоремы 6 использовать нельзя (нельзя утверждать, что из условия IV следует условие I).

Рассмотрим другой кусочно гладкий замкнутый контур l , окружающий начало координат. Пусть контур l лежит внутри (или вне) области G , тогда кривые L и l ограничивают некоторую область Ω .

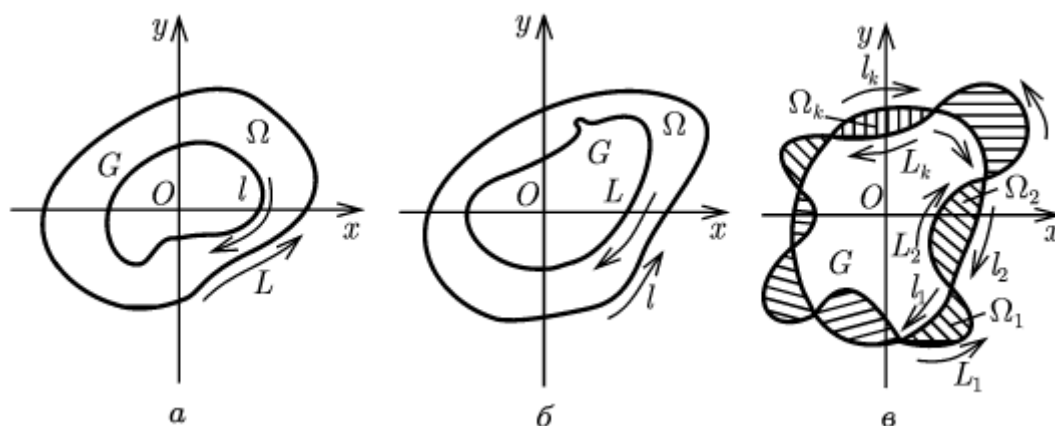


Рис. 61

Применим к этой области формулу Грина. Если кривая l лежит внутри G (Рис. 61, а), то в формуле Грина обход контура L совершается против часовой стрелки, а контура l – по часовой стрелке. Поэтому

$$\oint_L P dx + Q dy - \oint_l P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

откуда

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_l P dx + Q dy. \quad (9)$$

Если же кривая l лежит вне G (Рис. 61, б), то в формуле Грина обход контура L совершается по часовой стрелке, а контура l – против часовой стрелки. Значит,

$$\oint_l P dx + Q dy - \oint_L P dx + Q dy = 0.$$

Отсюда снова получаем равенство (9). Если контуры L и l пересекаются в n точках (Рис. 61, в), то для каждой из n полученных при этом областей n_k , не содержащих начала координат (они заштрихованы на рис. 61, в), справедлива формула Грина. Пользуясь этой формулой, находим

$$\int_{L_k} P dx + Q dy + \int_{l_k} P dx + Q dy = 0.$$

(направления обхода показаны на рис. 61, в). Просуммировав эти равенства по k от 1 до n , получим, что сумма интеграла по контуру L в положительном направлении и интеграла по контуру l в отрицательном направлении равна нулю. Отсюда снова приходим к равенству (9). Таким образом, интеграл I не зависит от выбора кривой L . Вычислив его по единичной окружности $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t dt + \sin^2 t dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\pi.$$

З а м е ч а н и е . Рассмотренный пример показывает, что если область не является односвязной, то из условия IV теоремы 6 может не следовать условие I.

7. Найти функцию $u(x, y)$, если $du = [y \cos xy - 2x \sin(x^2 - y^2)] dx + [x \cos xy + 2y \sin(x^2 - y^2)] dy$.

Решение. Нетрудно убедиться, что для дифференциального выражения выполнено равенство (5). Для вычисления функции $u(x, y)$ воспользуемся формулой (6). Находим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x [y_0 \cos xy_0 - 2x \sin(x^2 - y_0^2)] dx + \\ &+ \int_{y_0}^y [x \cos xy + 2y \sin(x^2 - y^2)] dy = \\ &= [\sin xy_0 + \cos(x^2 - y_0^2)] \Big|_{x_0}^x + [\sin xy + \cos(x^2 - y^2)] \Big|_{y_0}^y + C = \\ &= [\sin xy_0 + \cos(x^2 - y_0^2) - \sin x_0 y_0 - \cos(x_0^2 - y_0^2)] + \\ &+ [\sin xy + \cos(x^2 - y^2) - \sin xy_0 - \cos(x^2 - y_0^2)] + C = \\ &= \sin xy + \cos(x^2 - y^2) + C_1, \end{aligned}$$

где C_1 – произвольная постоянная.