Двойные интегралы

Примеры решения задач

1. Свести двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ к повторному двумя способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если G – область, ограниченная кривыми $x = 1$, $y = x^2$, $y = 2x$ ($x \le 1$).

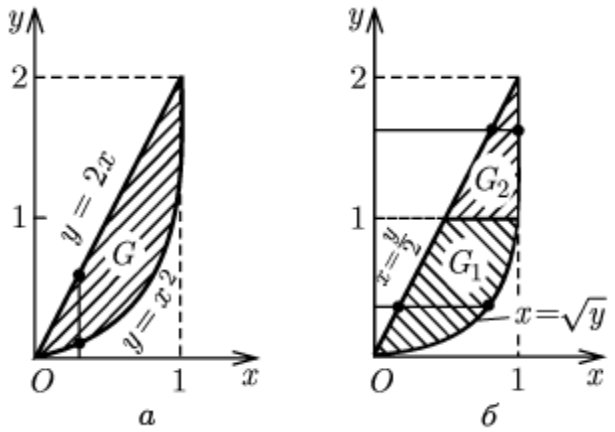

Рис. 36

Решение. I способ. Область G изображена на рис. 36, *а*. При каждом значении x из отрезка [0, 1] переменная y изменяется от x^2 до $2x$, т. е. область G можно представить в виде $G = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2x\}$. По формуле (1) получаем

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2x} f(x, y)\,dy$$

II способ. Чтобы воспользоваться формулой (2), нужно разбить область G на две части, G_1 и G_2, как показано на рис. 36, *б*. В области G_1 переменная y изменяется от 0 до 1, а при каждом значении y переменная x изменяется от $y/2$ (значение x на прямой $y = 2x$) до $\sqrt{y}$ (значение x на параболе $y = x^2$). Поэтому по формуле (2) получаем

$$\iint\limits_{G_1} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

В области G_2 переменная y изменяется от 1 до 2, а при каждом значении y переменная x изменяется от $y/2$ до 1. По формуле (2) имеем

$$\iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^1 f(x, y)\, dx.$$

Итак,

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{G_2} f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y/2}^1 f(x, y)\, dx.$$

---

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{G} (x + y^2)\, dx\, dy$ по области G, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$.

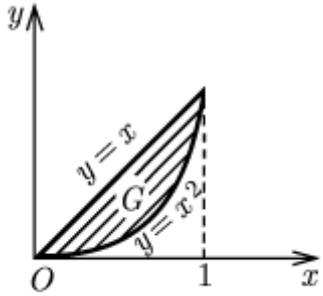

Рис. 37

Решение. Область G изображена на рис. 37. Сводим двойной интеграл к повторному по формуле (1):

$$\iint\limits_{G} (x + y^2)\, dx\, dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (x + y^2)\, dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл в повторном, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x^2}^{x} (x + y^2)\, dy = (xy + (1/3)\, y^3)\Big|_{x^2}^{x} = x^2 - (2/3)\, x^3 - (1/3)\, x^6.$$

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int_0^1 (x^2 - (2/3)\,x^3 - (1/3)\,x^6)\,dx = ((1/3)\,x^3 - (1/6)\,x^4 - (1/21)\,x^7)|_0^1 = 5/42.$$

---

3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)dy.$$

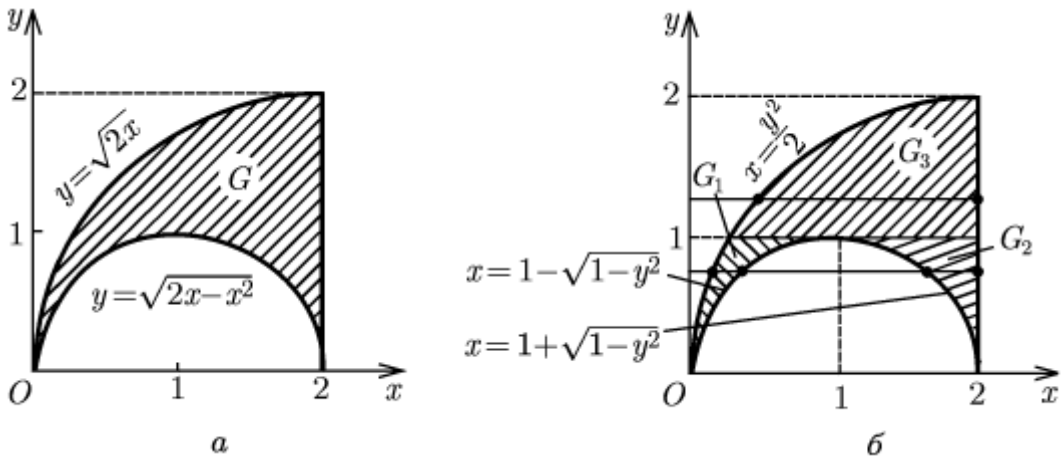

Рис. 38

Решение. Кривые $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = \sqrt{2x}$ и отрезок прямой $x = 2$ ограничивают область G, изображенную на рис. 38, *а*. Данный повторный интеграл равен двойному интегралу по этой области. Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, нужно разбить область G на три части, как показано на рис. 38, *б*. Кривая $y = \sqrt{2x - x^2}$ является верхней полуокружностью окружности $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Разрешая это уравнение относительно x, получим два решения: $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$. В областях G_1 и G_2 переменная y изменяется от 0 до 1, а при каждом значении y переменная x изменяется в области G_1 от $y^2/2$ (значение x на кривой $y = \sqrt{2x}$) до $\sqrt{1 - y^2}$ (значение x на окружности), а в области G_2 – от $1 + \sqrt{1 - y^2}$ до 2. Поэтому по формуле (2) получаем

$$\iint_{G_1} f(x, y)\,dx\,dy + \iint_{G_2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+\int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx = \int_0^1 dy \left[\int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx \right].$$

Аналогично для области G3 имеем

$$\iint_{G_3} f(x, y)\, dx\, dy = \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^{2} f(x, y)\, dx.$$

Таким образом, окончательно находим

$$\iint_G f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 dy \left[\int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx \right] + \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^{2} f(x, y)\, dx.$$

---

4. В двойном интеграле $I = \iint_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, где G – круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$, перейти к полярным координатам с полюсом в точке $O(0, 0)$ и вычислить полученный интеграл.

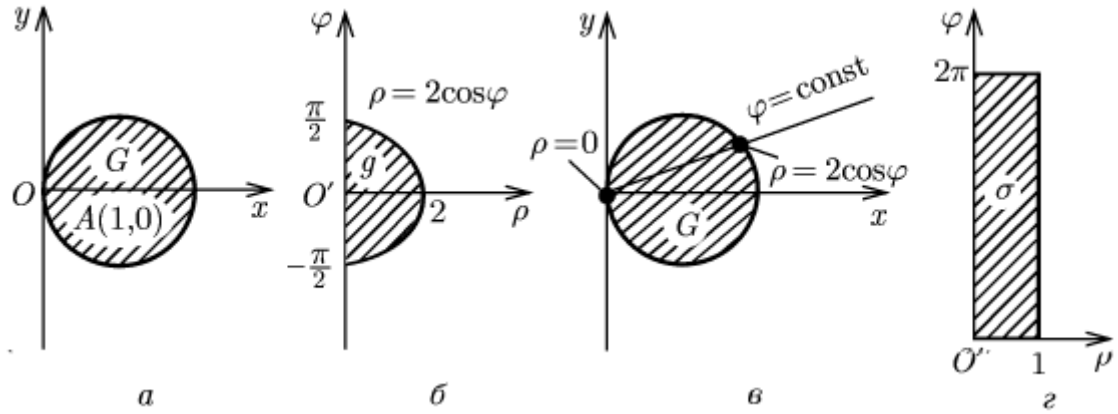

Рис. 39

Решение. Круг G изображен на рис. 39, *а*. Уравнения, связывающие (x, y) и полярные координаты (ρ, φ) с полюсом в точке $O(0, 0)$, имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi, \tag{10}$$

причем наглядно видно, что в качестве промежутка изменения φ можно взять сегмент $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Подставляя выражения (10) в уравнение окружности, получим $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$, откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\cos\varphi$. Эти две кривые на плоскости (ρ,φ) при $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ ограничивают область g (рис. 39, *б*), являющуюся прообразом области G при отображении (10). Якобиан $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}$ отображения (10) равен ρ. Отметим, что $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = 0$ на границе $\rho = 0$ области g, однако формула (4) замены переменных применима (см. замечание после теоремы 4). Подынтегральная функция $x^2 + y^2$ в новых переменных равна ρ^2. По формуле (4) имеем

$$I = \iint\limits_g \rho^3\, d\rho\, d\varphi.$$

Полученный двойной интеграл по области g сводим к повторному:

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho, \tag{11}$$

и вычисляем повторный интеграл, применяя формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi\, d\varphi = 4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\pi/2.$$

З а м е ч а н и е 1. Расстановку пределов интегрирования в повторном интеграле (11) можно произвести, рассматривая не область g, а изменение полярных координат в исходной области G. На рис. 39, *в* видно, что при каждом значении φ из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ переменная ρ изменяется от 0 (значение ρ в полюсе) до $2\cos\varphi$ (значение ρ на окружности, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$). Таким образом, пределы интегрирования по φ – от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а по ρ – от 0 до $2\cos\varphi$.

З а м е ч а н и е 2. Обычно замена переменных в двойном интеграле производится с целью упрощения области интегрирования. Если в данном примере перейти к полярным координатам с полюсом не в точке $O(0, 0)$, а в точке $A(1, 0)$ (центре круга), т. е. по

формулам $x - 1 = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, то прообразом круга G окажется прямоугольник (наиболее простая область) $\sigma = \{(\rho, \varphi)\colon O \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ (рис. 39, *г*). Выражение для подынтегральной функции примет вид $x^2 + y^2 = 1 + 2\rho\cos\varphi + \rho^2$. В этом случае, используя формулу (4) и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$I = \iint\limits_{g} (1 + 2\rho\cos\varphi + \rho^2)\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho + 2\rho^2\cos\varphi + \rho^3) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} (3/4 + 2/3\cos\varphi)\, d\varphi = 3\pi/2.$$

---

5. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_G x^2y^2\, dx\, dy$, где $G = \{(x, y)\colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

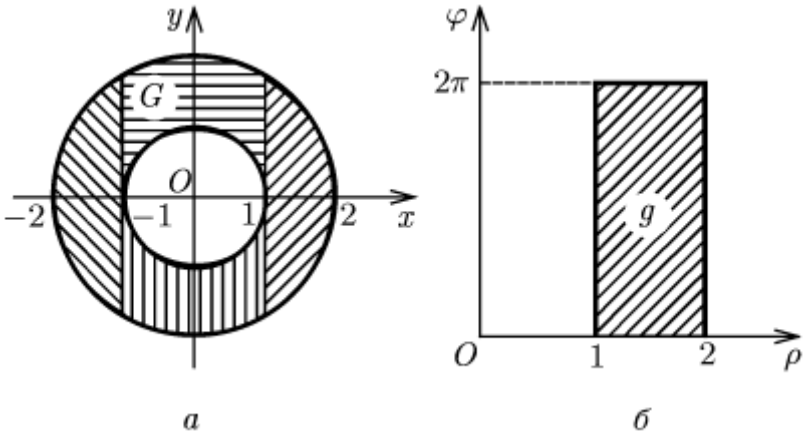

Рис. 40

Решение. Область G представляет собой кольцо (рис. 40, *а*). Его можно разбить на трапециевидные части, к которым применима формула сведения двойного интеграла к повторному, например так, как показано на рис. 40, *а*. Однако удобнее сделать замену переменных − перейти к полярным координатам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник $g = \{(\rho, \varphi)\colon 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ (рис. 40, *б*). Применяя формулу (4) и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$I = \int\limits_1^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} \rho^5 \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \int\limits_1^2 \rho^5\, d\rho \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\, \varphi\, d\varphi = 63/6 \cdot \pi/4 = 21\pi/8.$$

---

6. Найти площадь фигуры G, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = 4xy,\ (a>0,\ b>0). \qquad (12)$$

Решение. Так как левая часть уравнения кривой неотрицательна при любых x и y, то и правая часть должна быть неотрицательной, а значит, x и y должны иметь одинаковые знаки. Следовательно, кривая расположена в I и III квадрантах, причем она симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка M(x, y) лежит на кривой, т. е. x и y удовлетворяют уравнению (12), то $-x$ и $-y$ также удовлетворяют этому уравнению, т. е. точка $M'(-x, -y)$, симметричная точке M относительно начала координат, также лежит на кривой. Поэтому и вся фигура G состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно начала координат. Найдем площадь S_1 части фигуры, расположенной в I квадранте. Для этого удобно перейти к новым переменным − *обобщенным полярным координатам*. Они вводятся по формулам

$$x - x_0 = a\rho^{\beta}\cos^{\alpha}\varphi,\ y - y_0 = b\rho^{\beta}\sin^{\alpha}\varphi, \qquad (13)$$

где x_0, y_0, a, b, α, β − некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства. Якобиан отображения (13) равен $ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1}\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$.

В данном случае удобно взять $x_0 = y_0 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Тогда левая часть уравнения (12) будет равна ρ^4 и уравнение примет вид

$$\rho^4 = 4ab\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi,$$

откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$, причем $0 \le \varphi \le \pi/2$ (I квадрант). Кривые $\rho = 0$ и $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$ на плоскости (ρ, φ) ограничивают область g − прообраз части фигуры G, лежащей в I квадранте. Якобиан отображения (13) в данном случае равен $2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$. По формуле (8) получаем

$$S_1 = \iint\limits_g 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi} 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi\,d\rho =$$

$$= 4a^2b^2\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = 4a^2b^2\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi) = a^2b^2/3.$$

Искомая площадь фигуры G равна $2S_1$ т. е. $2/3\ a^2b^2$.

---

7. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$.

Решение. Данное тело можно представить в виде $T = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in G, \mathrm{O} \le z \le x^2 + y^2\}$, где G – область на плоскости (x, y), ограниченная кривыми $y = x^2$ и $y = 1$, т. е. $G = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$. Применяя формулу (9) и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$V = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[x^2 (1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 - x^6) \right] dx = 88/105.$$

---

8. Найти моменты инерции I_x и I_y относительно осей Ox и Oy пластины с плотностью $\rho = 1$, ограниченной кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$ и расположенной в I квадранте.

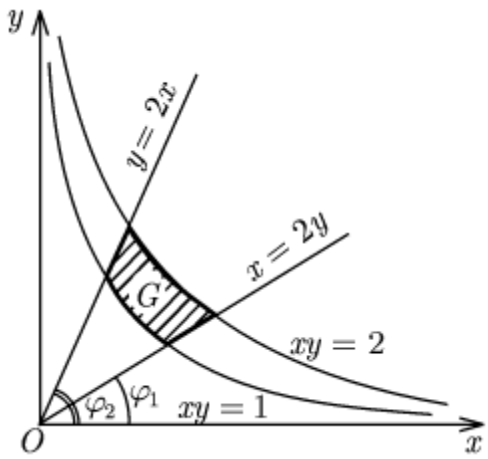

Рис. 41

Решение. Данная пластинка G изображена на рис. 41. По формулам для I_x и I_y имеем

$$I_x = \iint\limits_G y^2\, dx\, dy,\ I_y = \iint\limits_G x^2\, dx\, dy$$

Чтобы свести каждый из этих двойных интегралов к повторному, нужно область G разбить на три части. Удобнее перейти к полярным координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тогда φ изменяется от $\varphi_1 = \operatorname{arctg}(1/2)$ до $\varphi_2 = \operatorname{arctg} 2$ (см. рис. 41), а при каждом значении φ из сегмента $[\varphi_1, \varphi_2]$ переменная ρ изменяется от $\rho_1(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$ (значение ρ на кривой $xy = 1$, уравнение которой в полярных координатах в I квадранте имеет вид $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$) до $\rho_2(\varphi) = \dfrac{2}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}$ (значение ρ на кривой $xy = 2$). Следовательно,

$$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho^3 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\rho =$$

$$= 1/4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\varphi \, [\rho_2^4(\varphi) - \rho_1^4(\varphi)] \, d\varphi = 3/4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = 3/4 \operatorname{tg}\varphi \Big|_{\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\varphi_2 = \operatorname{arctg} 2} = 9/8.$$

Аналогично получаем $I_y = 9/8$.

Тройные интегралы

Примеры решения задач

---

1. Дан тройной интеграл $\iiint\limits_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, где T – область, ограниченная поверхностями $z = 0$, $z = xy$, $y = x$, $x = 1$. Свести данный интеграл к повторному двумя способами: а) так, чтобы внутренний интеграл был определенным интегралом с переменной интегрирования z; б) так, чтобы внутренний интеграл был двойным интегралом с переменными интегрирования y и z. В каждом случае свести тройной интеграл к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

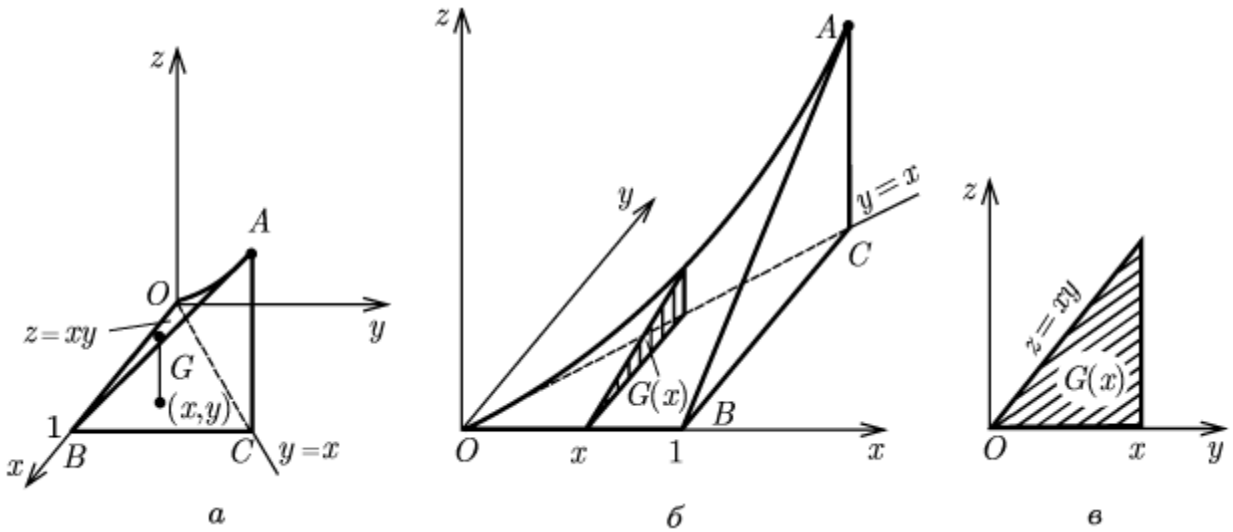

Рис. 46

Решение. а) Область T представляет собой "криволинейную пирамиду" $AOBC$ (рис. 46, *а*), основанием которой является треугольник OBC в плоскости (x, y) (обозначим этот треугольник буквой G). Для каждой точки (x, y) области G переменная z изменяется от 0 (значение z в области G) до xy (значение z на поверхности $z = xy$), т. е. область T можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z): (x, y) \in G,\ 0 \le z \le xy\}.$$

По формуле (1) имеем

$$I = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_0^{xy} f(x, y, z)\,dz.$$

Сводя двойной интеграл по области G к повторному, получим

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f(x, y, z)\,dz. \qquad (9)$$

б) Область T заключена между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$. Сечение области T плоскостью x = const (рис. 46, *б*) представляет собой треугольник $G(x)$. Проекция этого треугольника на плоскость Oyz изображена на рис. 46, *в*. По формуле (2) имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx \iint\limits_{G(x)} f(x, y, z)dy\,dz.$$

Сводя двойной интеграл по области $G(x)$ к повторному, получим

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} f(x, y, z)\,dz.$$

что совпадает с равенством (9).

---

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_T xy\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$ где T − область, ограниченная поверхностями $z = 0$, $z = y$, $y = x^2$, $y = 1$.

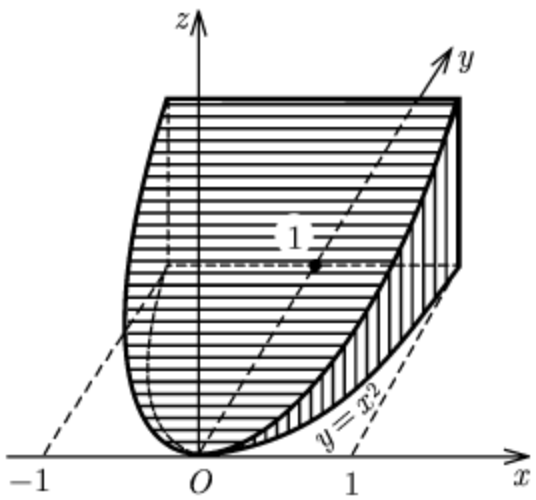

Рис. 47

Решение. Область T изображена на рис. 47. Ее можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z)\colon (x, y) \in G,\ 0 \le z \le y\},$$

где $G = \{(x, y)\colon -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$. Сводя тройной интеграл к повторному, получим

$$I = \iint\limits_G dx\,dy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}\,dz = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 dy \int\limits_0^y xy\sqrt{z}\,dz =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 2/3\, xy^{5/2}\,dy = 4/21 \int\limits_{-1}^1 x(1 - |x|^7)\,dx =$$

$$= 4/21 \left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^1 + \int\limits_{-1}^0 x^8\,dx - \int\limits_0^1 x^8\,dx \right) = 0.$$

---

3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_T [(x + y)^2 - z]\,dx\,dy\,dz$, если область T ограничена поверхностями $z = 0$ и $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$.

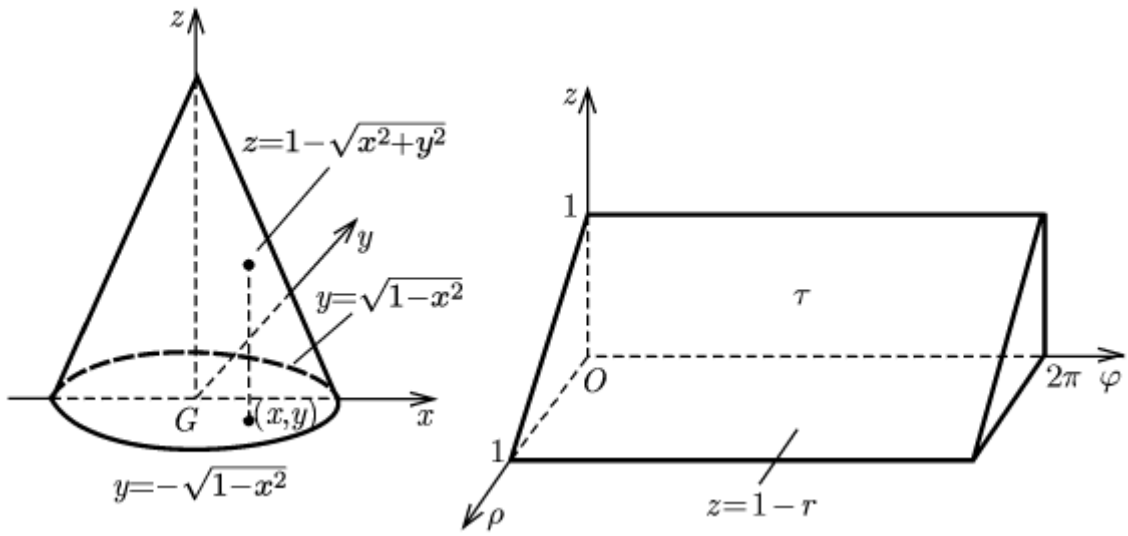

Рис. 48

Решение. Область T представляет собой конус (рис. 48, *а*). Уравнение конической поверхности, ограничивающей область T, можно записать в виде $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, а саму область T представить следующим образом: $T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$, где G − круг радиуса 1 с центром в начале координат. Поэтому данный тройной интеграл можно свести к последовательному вычислению трех определенных интегралов в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} [(x+y)^2 - z]\, dz.$$

Однако удобнее перейти к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z): $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Тогда прообраз круга G есть прямоугольник $\{(\rho, \varphi): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, прообраз конической поверхности − плоская поверхность $z = 1 - \rho$, а прообраз области T − область τ, изображенная на рис. 48, *б*. Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен ρ, подынтегральная функция в цилиндрических координатах равна $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z$. Сводя тройной интеграл по области τ к последовательному вычислению трех определенных интегралов, получим

$$I = \iiint_{\tau} [\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z]\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{1} d\rho \int_{0}^{1-\rho} [\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z]\, \rho\, dz =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{1} [\rho^2(1 - \rho)(1 + \sin 2\varphi) - 1/2\, \rho\,(1 - \rho)^2]\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} [1/20\,(1 + \sin 2\varphi) - 1/24]\, d\varphi = \pi/60. \qquad (10)$$

Отметим, что расстановку пределов интегрирования в цилиндрических координатах можно произвести, рассматривая не область τ, а изменение цилиндрических координат в области T. Наглядно видно, что в области G переменная φ изменяется от 0 до 2π, при каждом значении φ переменная ρ изменяется от 0 до 1, а для каждой точки (ρ, φ) области G переменная z изменяется в области T от 0 (значение z в области G) до $1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \rho$ (значение z на конической поверхности). Это позволяет расставить пределы интегрирования так, как сделано в равенстве (10).

---

4. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, где T – область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

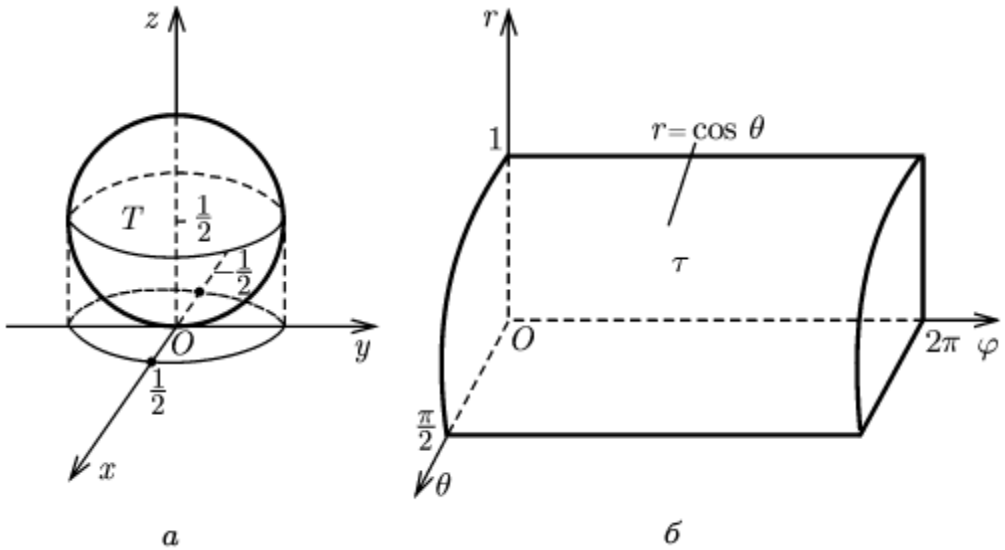

Рис. 49

Решение. Область T представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой удобно записать в виде $x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$ (рис. 49, *а*). Данный тройной интеграл можно вычислить с помощью повторного интегрирования в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{1/4-x^2}} dy \int_{1/2-\sqrt{1/2-x^2-y^2}}^{1/2+\sqrt{1/2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz.$$

Однако удобнее перейти к сферическим координатам (r, θ, φ):

$$x = r \sin\theta \cos\varphi,\ y = r \sin\theta \sin\varphi,\ z = r \cos\theta, \qquad (11)$$

причем переменная φ изменяется от 0 до 2π, а при каждом значении φ переменная θ изменяется от 0 до $\pi/2$. Подставляя выражения (11) в уравнение сферы, получим $r^2 = r \cos\theta$, откуда $r = 0$ или $r = \cos\theta$. Эти две поверхности в пространстве (r, θ, φ) при $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/2$ ограничивают снизу и сверху область τ (рис. 49, *б*), являющуюся прообразом области T при отображении (11). Якобиан отображения (11) равен $r^2 \sin\theta$, а подынтегральная функция в сферических координатах равна r. Вычисляя тройной интеграл по области τ с помощью повторного интегрирования, получаем

$$I = \iiint\limits_{\tau} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^3 \sin\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} 1/4 \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta = 2\pi \cdot 1/4 \cdot 1/5 = \pi/10.$$

Отметим, что расстановку пределов интегрирования для переменной r можно произвести, рассматривая не область τ, а изменение r при фиксированных значениях φ и θ в области T. Наглядно видно, что на каждом луче $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ переменная r изменяется в шаре T от 0 (значение r в начале координат) до $\cos\theta$ (значение r на сфере).

---

5. Найти объем тела T, ограниченного поверхностью S: $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$ и координатными плоскостями.

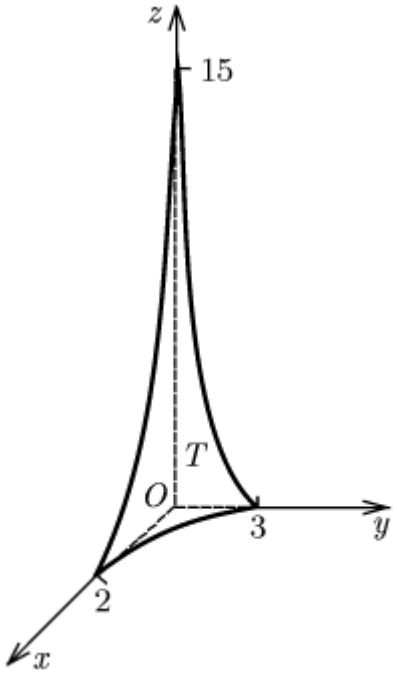

Рис. 50

Решение. Тело T изображено на рис. 50. Для вычисления его объема удобно перейти к обобщенным сферическим координатам (r, θ, φ) по формулам

$$x = 2r^2 \sin^4 \theta \cos^4 \varphi,\ y = 3r^2 \sin^4 \theta \sin^4 \varphi,\ z = 15r^2 \cos^4 \theta, \qquad (12)$$

Тогда уравнение поверхности S примет простой вид: $r = 1$. В пределах тела T переменная φ изменяется от 0 до $\pi/2$, при каждом значении $\varphi \in [0, \pi/2]$ переменная θ изменяется также от 0 до $\pi/2$, а на каждом луче $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ переменная r изменяется от 0 (значение r в начале координат) до 1 (значение r на поверхности S). Итак, прообразом тела T при отображении 912) является прямоугольный параллелепипед в пространстве (r, θ, φ):

$$\tau = \{(r, \theta, \varphi): 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\}.$$

Якобиан отображения (12) равен $2880\, r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi$ (см. формулу (6)).

Используя формулу (8) для объема тела в криволинейных координатах и вычисляя интеграл по области τ с помощью повторного интегрирования, получаем

$$V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 2880\, r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi\, dr =$$

$$= 480 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^3 \theta\, d\theta =$$

$$= 480 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi\,(1 - \sin^2 \varphi)\, d(\sin \varphi) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta\,(1 - \sin^3 \theta)\, d(\sin \theta) = 480 \cdot 1/12 \cdot 1/40 = 1.$$

---

6. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела T с плотностью $\rho = 1$, ограниченного поверхностями $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = p/2$, $z = 0$ ($p > 0$).

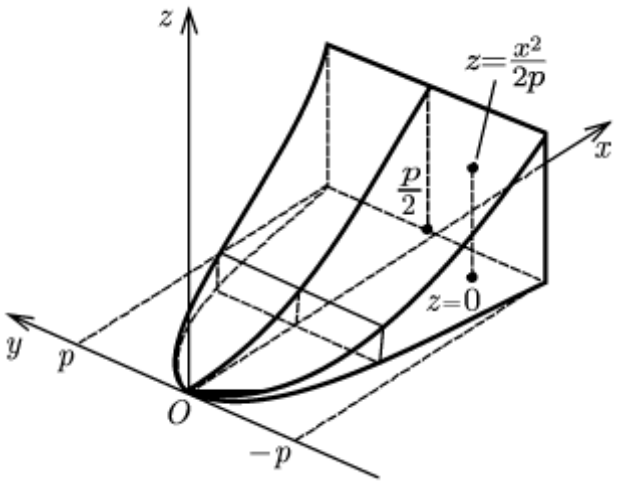

Рис. 51

Решение. Тело T изображено на рис. 51. Его можно представить в виде

$$T = \left\{ (x, y, z)\colon -p \le x \le p,\ \frac{y^2}{2p} \le y \le \frac{p}{2},\ 0 \le z \le \frac{x^2}{2p} \right\}.$$

Используя формулу для момента инерции тела относительно координатной плоскости Ozx, с помощью повторного интегрирования получаем

$$I_{zx} = \iiint_T y^2\, dx\, dy\, dz = \int_{-p}^{p} dy \int_{y^2/(2p)}^{p/2} dx \int_0^{x^2/(2p)} y^2\, dz =$$

$$= \int_{-p}^{p} dy \int_{y^2/(2p)}^{p/2} \frac{y^2 x^2}{2p}\, dx = \int_{-p}^{p} \left[\frac{p^2 y^2}{48} - \frac{y^8}{48 p^4} \right] dy = \frac{p^5}{108}.$$

Аналогично находим

$$I_{yz} = \iiint_T x^2\, dx\, dy\, dz = \frac{p^5}{176},\ I_{xy} = \iiint_T z^2\, dx\, dy\, dz = \frac{p^5}{11520}.$$

7. Найти ньютоновский потенциал поля тяготения однородного шара T радиуса R с плотностью ρ в точке A, находящейся на расстоянии d от центра шара ($d > R$).

Решение. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпало с центром шара, а точка A лежала на положительной полуоси Oz. Тогда уравнение сферы, ограничивающей шар, примет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а точка A имеет координаты (0, 0, d). По формуле для ньютоновского потенциала имеем

$$U(0, 0, d) = \gamma \iiint\limits_T \rho \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}.$$

Так как тело T – шар, то для вычисления тройного интеграла удобно перейти к сферическим координатам: $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$. Прообразом шара T при этом отображении является прямоугольный параллелепипед $\tau = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Учитывая, что якобиан отображения равен $r^2 \sin\theta$, а $\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}$, и сводя тройной интеграл по области τ к повторному, получим

$$U(0, 0, d) = \gamma \iiint\limits_\tau \rho \frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \gamma\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} =$$

$$= \gamma\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{d}\left(\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}\,\Big|_0^\pi\right) dr = \frac{2}{d}\gamma\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2\,dr = \gamma\frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\rho}{d} = \frac{\gamma m}{d},$$

где $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ – масса шара.

Таким образом, однородный шар массы m создает в пространстве вне шара такое же поле тяготения, что и точечная масса m, помещенная в центр шара.