Несобственные интегралы (н.и.)

		I рода (по бесконечному промежутку)	II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)
Определение н.и.	1	$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$
	3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Определение сходимости н.и.		Несобственный интеграл ***сходится***, если существуют **конечные пределы** в правых частях равенств, определяющих эти интегралы. Если эти **пределы бесконечны или не существуют**, то несобственный интеграл ***расходится***. $\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл сходится}; \\ \left.\begin{matrix}\infty \\ \nexists\end{matrix}\right\} - \text{интеграл расходится.} \end{cases}$	
Признаки сходимости н.и.	1	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a,+\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a,b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$
		$0 \le \varphi(x) \le f(x)$	
		Сходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ Расходимость	Сходимость $\int_a^{b}\varphi(x)dx \quad \int_a^{b} f(x)dx$ Расходимость
	2	$\varphi(x) > 0, f(x) > 0, \forall x \in [a,+\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a,b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$
		$\exists \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0, \quad A < \infty$	$\exists \lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A \ne 0, \quad A < \infty$
		Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся	
	3	$\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно}; \\ \text{расходится.}\end{cases}$	$\int_a^{b}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно}; \\ \text{расходится.}\end{cases}$
Эталонные н.и.		$\int\limits_{a>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^k} = \begin{cases}\frac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k>1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k \le 1.\end{cases}$	$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases}\frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k<1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \ge 1.\end{cases}$ $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases}\frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k<1, \\ \infty - \text{расходится, если } k \ge 1.\end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема. Если величина Q обладает на $[a,b]$

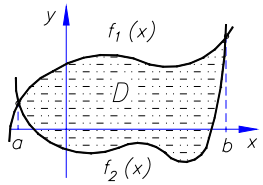
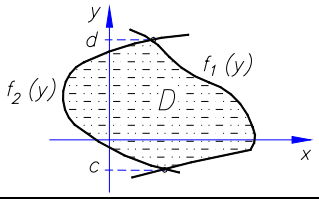
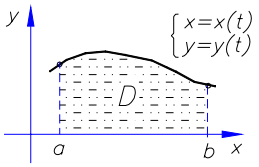
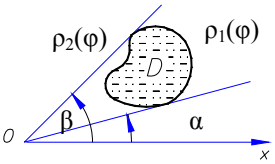
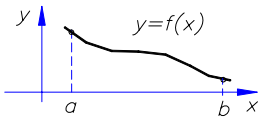
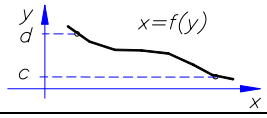
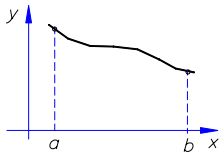
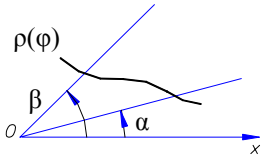
1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$,

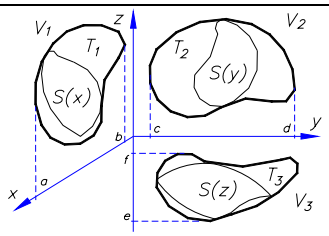
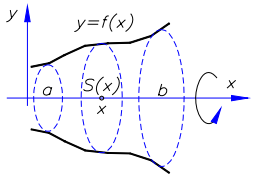
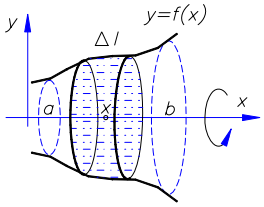
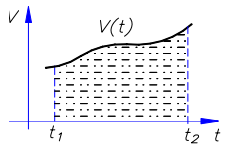
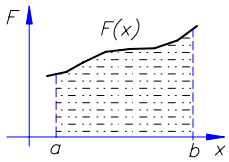
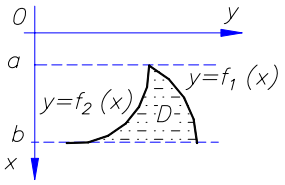
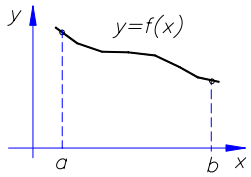
то $Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \ldots + \Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$;

2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция,

то величину Q можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$:

$$Q = \int_a^b f(x)dx$$

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
S, площадь плоской фигуры D	1		Д. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} a \le x \le b \\ f_2(x) \le y \le f_1(x) \end{matrix} \right\}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$	S, площадь плоской фигуры D
	2		Д. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} c \le y \le d \\ f_2(y) \le x \le f_1(y) \end{matrix} \right\}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S = \int_c^d (f_1(y) - f_2(y))dy$	
	3		Д. С. К. $\alpha \le t \le \beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t) \ge 0,\ \forall t \in [\alpha, \beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически	$S = \int_\alpha^\beta y(t)x_t^{/}dt$	
	4		П. С. К. $D = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho_2(\varphi) \le \rho \le \rho_1(\varphi) \end{matrix} \right\}$	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\varphi) - \rho_2^2(\varphi))d\varphi$	
l, длина кривой L	1		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} a \le x \le b \\ y = f(x) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y_x^{/})^2}dx$	l, длина кривой L
	2		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} c \le y \le d \\ x = f(y) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x_t^{/})^2}dy$	
	3		Д. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le t \le \beta \\ x = x(t),\ y = y(t) \\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b \end{matrix} \right\}$ Линия L задана параметрически	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t^{/})^2 + (y_t^{/})^2}dt$	
	4		П. С. К. $L = \left\{ \begin{matrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho = \rho(\varphi) \end{matrix} \right\}$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho^{/})^2}d\varphi$	

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула	Q
V, объем тела T	1		Д. С. К. $T_1 = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ S(x) \perp 0X \end{Bmatrix}$ $T_2 = \begin{Bmatrix} c \le y \le d \\ S(y) \perp 0Y \end{Bmatrix}$ $T_3 = \begin{Bmatrix} e \le z \le f \\ S(z) \perp 0Z \end{Bmatrix}$	$V_1 = \int_a^b S(x)dx$ $V_2 = \int_a^b S(y)dy$ $V_3 = \int_e^f S(z)dz$	V, объем тела T
	2		Д. С. К. $T = \begin{Bmatrix} a \le x \le b,\ y = f(x) \\ \pi y^2 = S(x) \perp 0X \end{Bmatrix}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$V = \pi \int_a^b y^2(x)dx$	
σ, площадь поверхн. ω	1		Д. С. К. $\omega_x = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ \Delta\sigma = 2\pi\, y(x)\Delta l \end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$\sigma_x = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	σ, площадь поверхн. ω
			Д. С. К. $\omega_x = \begin{Bmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ y = y(t),\ x = x(t) \\ \Delta\sigma = 2\pi\, y(t)\Delta l \end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x(t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$	$\sigma_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_x^{/})^2}\,dt$	
S, путь	1		Д. С. К. $V = \begin{Bmatrix} t_1 \le t \le t_2 \\ V = V(t) \end{Bmatrix}$ V – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1,t_2]$	$s = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$	S, путь
A, работа	1		Д. С. К. $F = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ F = F(x) \end{Bmatrix}$ Сила F направлена параллельно оси $0X$ на промежутке $[a,b]$	$A = \int_a^b F(x)dx$	A, работа
P, давл	1		Д. С. К. $D = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ f_2(x) \le y \le f_1(x) \\ \Delta P = gx\mu(x)(f_1(x) - f_2(x)) \end{Bmatrix}$ μ – плотность жидкости, давящей на пластину D	$P = g\int_a^b x\mu(x)(f_1(x) - f_2(x))dx$	P, давл.
m, масса	1		Д. С. К. $L = \begin{Bmatrix} a \le x \le b,\ y = f(x) \\ \Delta m = \mu(x)\Delta l \end{Bmatrix}$ μ – линейная плотность кривой L	$m = \int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$	m, масса

Статические моменты относительно координатных осей S_x, S_y,, моменты инерции M_x, M_y, координаты центра тяжести x_c, y_c плоской кривой

$$y = f(x),\ a \le x \le b,\ dl = \sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx = \sqrt{(x_t^{/})^2 + (y_t^{/})^2}\,dt = \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi^{/})^2}\,d\varphi$$

$$S_x = \int_a^b \mu(x)y\,dl \quad S_y = \int \mu(x)x\,dl \quad M_x = \int_a^b \mu(x)y^2\,dl \quad M_y = \int_a^b \mu(x)x^2\,dl \quad x_c = \frac{S_y}{m} \quad y_c = \frac{S_x}{m}$$