§ Интеграл по площади поверхности (первого рода)

Задача о вычислении массы поверхности	Найти массу m поверхности σ, ограниченной замкнутой кривой L, если поверхностную плотность на этой поверхности задаёт функция $\mu = f(M) = f(x, y, z)$.

Определение поверхностного интеграла 1-го рода	Разобьём поверхность σ на n непересекающихся элементарных поверхностей, найдём элемент массы i-го элемента разбиения $\Delta m_i = f(M_i)\Delta\sigma_i$, $M_i \in \Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Предел интегральной суммы $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} diam\Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = m,$$ если он существует, не зависит от способа разбиения поверхности σ на элементарные поверхности и выбора точек M_i на каждой из них, называется поверхностным интегралом по площади поверхности (первого рода) и равен массе m поверхности σ, ограниченной замкнутой кривой L, если поверхностную плотность на этой поверхности задаёт функция $\mu = f(x, y, z)$.

Правило вычисления поверхностных интегралов 1-го рода	Чтобы вычислить поверхностный интеграл по площади поверхности (I рода), нужно привести его к двойному интегралу: 1) в подынтегральную функцию вместо z подставить его выражение из уравнения поверхности; 2) элемент поверхности $d\sigma$ заменить дифференциальным выражением $\sqrt{1+(z_x^/)^2+(z_y^/)^2}dS = \sqrt{1+(z_x^/)^2+(z_y^/)^2}dxdy$; 3) вычислить полученный двойной интеграл по области D_{xy} – проекции поверхности σ на плоскость XOY.

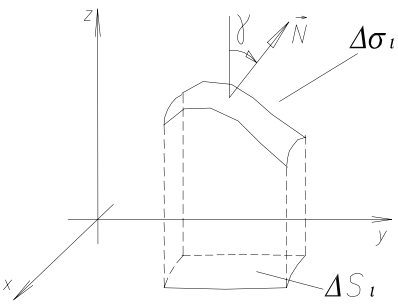
Определение двусторонней ориентированной поверхности	Поверхность называется односторонней, если её всю можно окрасить одним цветом, не переходя границу этой поверхности (лист Мёбиуса). Остальные поверхности называют двусторонними. Двусторонняя поверхность, одна из сторон которой выбрана для построения нормалей, называется ориентированной.

Свойства поверхностных интегралов 1-го рода	Интеграл по площади поверхности обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл (с учётом теоремы существования двойных интегралов). Поверхностный интеграл по площади поверхности **не зависит от выбора стороны поверхности**.

Пример. Вычислить координаты центра тяжести однородной полусферы радиуса R.

§ Поверхностный интеграл по координатам (второго рода)

Задача о потоке жидкости через поверхность	Вычислить поток жидкости через поверхность σ (количество жидкости, протекающее через поверхность в единицу времени), считая плотность жидкости $\mu = 1$, а движение жидкости – стационарным (не зависящим от времени).

Определение поверхностного интеграла 2-го рода 	Пусть в каждой точке двусторонней поверхности σ задана вектор-функция $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k} = (P,Q,R)$ и единичный вектор нормали $\overline{n^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Разобьём поверхность σ на n непересекающихся элементов $\Delta\sigma_i$ и найдём элемент потока $\Delta\Pi_i$ вектора $\overline{\Phi}$ через элемент поверхности $\Delta\sigma_i$: $\Delta\Pi_i = (\overline{\Phi}(M_i), \overline{n_i^0}) \cdot \Delta\sigma_i$ $(M_i \in \Delta\sigma_i, \quad \overline{n_i^0} = \overline{n^0}(M_i), \quad i = 1,2,\ldots n)$. Предел интегральной суммы $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} diam\Delta\sigma_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{\Phi}(M_i), \overline{n_i^0})\Delta\sigma_i = \iint_\sigma (\overline{\Phi}, \overline{n^0}) d\sigma =$$ $$= \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma =$$ $$= \iint_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \Pi,$$ если он существует, не зависит от способа разбиения поверхности σ на элементарные поверхности и выбора точек M_i на каждой из них, называется поверхностным интегралом по координатам (2-го рода) и равен потоку Π вектора $\overline{\Phi}$ через поверхность σ.

Свойства поверхностных интегралов 2-го рода	1. Поверхностный интеграл по координатам изменяет знак при изменении ориентации поверхности. 2. Поверхностный интеграл по координатам обладает всеми свойствами двойных интегралов с учётом условий теоремы существования двойных интегралов.

§ Вычисление поверхностных интегралов по координатам (второго рода)

Способы задания единичного вектора нормали к поверхности	1. Если поверхность σ задана **явно** функцией $z = z(x, y)$, то $\overline{n^0} = \dfrac{-z'_x\bar{i} - z'_y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (угол γ – острый); 2. Если поверхность σ задана **неявно** функцией $F(x, y, z) = 0$, то $\overline{n^0} = \dfrac{F'_x\bar{i} + F'_y\bar{j} + F'_z\bar{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$ (формулы 1 и 2 связаны равенством: $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$).

Правило вычисления поверхностных интегралов 2-го рода	Чтобы вычислить поверхностный интеграл по координатам (второго рода), нужно привести его к двойному интегралу: 1) выбрать знак +, если угол γ между нормалями к поверхности и осью *OZ* острый, и знак –, если угол γ – тупой; 2) в скалярное произведение $(\overline{\Phi}, \overline{n^0})$ вместо *z* подставить его выражение из уравнения поверхности; 3) элемент поверхности $d\sigma$ заменить дифференциальным выражением $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$; 4) вычислить полученный двойной интеграл по области D_{xy} – проекции поверхности σ на плоскость *XOY*.

Замечание. Можно вычислять каждое слагаемое поверхностного интеграла по координатам

$$\iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x,z), z)dxdz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y))dxdy$$

1) по области D, которая является проекцией поверхности σ на плоскость переменных под знаками дифференциала,
2) выбирая знак плюс, если угол между осью, перпендикулярной к этой плоскости и нормалями к поверхности σ – острый и знак минус, если – тупой,
3) заменив в подынтегральной функции переменную, не входящую под знаки дифференциалов, из уравнения поверхности.

Пример. Найти поток вектора $\overline{\Phi} = xy^2\bar{i} + \dfrac{yz}{2}\bar{j} + x^2 z\bar{k}$ через часть параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, вырезанную цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, принимая в качестве направления нормали то, при котором нормальный вектор образует с осью oZ острый угол.

§ Формула Остроградского – Гаусса

Теорема Остроградского – Гаусса	Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка в правильной кубируемой области V, то справедлива формула Остроградского – Гаусса: $\iiint\limits_V (\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \oiint\limits_\sigma Pdydz+Qdxdz+Rdxdy = \oiint\limits_\sigma (\overline{\Phi},\overline{n^0})d\sigma$, где интегрирование ведётся по внешней стороне замкнутой поверхности σ, ограничивающей область интегрирования V.

Определение дивергенции векторного поля	Дивергенцией $div\overline{\Phi}$ векторного поля $\overline{\Phi}=(P,Q,R)$ называется скалярная функция $div\overline{\Phi}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

Пример. Найти поток вектора $\overline{\Phi}=3x\overline{i}+2y\overline{j}-4z\overline{k}$ через внешнюю сторону поверхности σ, ограниченной плоскостями: $x+y+z=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0$.

Определение дивергенции векторного поля, инвариантное относительно выбора системы координат	Дивергенцией $div\overline{\Phi}$ векторного поля $\overline{\Phi}=(P,Q,R)$ в точке M называется предел отношения потока Π вектора $\overline{\Phi}$ через поверхность, окружающую точку M, к объёму V, ограниченному этой поверхностью, при условии, что объём V стягивается к точке M: $div\overline{\Phi}(M)=(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})_M=\lim\limits_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}=\lim\limits_{V\to 0}\frac{\oiint\limits_\sigma(\overline{\Phi},\overline{n^0})d\sigma}{V}$.

Физический смысл дивергенции векторного поля	Дивергенция векторного поля характеризует наличие источников и стоков в точке M. Если $div\overline{\Phi}(M)>0$, то точку M называют источником, если $div\overline{\Phi}(M)<0$, точку M называют стоком, если $div\overline{\Phi}(M)=0$, то в точке M нет источников и стоков или они одинаковой мощности.

Векторная форма записи формулы Остроградского – Гаусса	Поток Π вектора $\overline{\Phi}$ через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля $\overline{\Phi}$ по области, ограниченной этой поверхностью: $\Pi=\oiint\limits_\sigma(\overline{\Phi},\overline{n^0})d\sigma=\iiint\limits_V div\overline{\Phi}dV=\iiint\limits_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dxdydz$

Пример. Вычислить дивергенцию поля $\overline{\Phi}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$, где a,b,c $-const$.