Ответы и указания к упражнениям для самостоятельной работы

1. $(x - y) = C$; grad $u(-1, 1) = -n\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; grad $u(1, 1) = 0$.

2. $(x - C)^2 + y^2 = C^2$, $x^2 + y^2 \neq 0$; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; $(x - 2)^2 + y^2 = 4$; grad $u(1, 1) = -e\mathbf{j}$; grad $u(2, 0) = -(e/2)\mathbf{i}$; grad $u(1, -1) = e\mathbf{j}$.

3. Пары лучей, сонаправленных с положительными полуосями Ox и Oy и имеющих общее начало на прямой $y = x$; grad $u(2, 1) = \mathbf{j}$; grad $u(1, 2) = \mathbf{i}$.

4. а) Лучи, исходящие из начала координат; б) окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных прямой, параллельной вектору $\mathbf{c}$ и проходящей через начало координат; центры этих окружностей лежат на указанной прямой; в) семейство эллиплов $x^2/a^2 + y^2/b^2 = C$; г) $x = C_1 y = C_2\sqrt{|z-|}-$.

5. $\dfrac{u}{u^2 - xy}(y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$.

6. а) grad $u(M) = 36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; б) grad $u(M_1) = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, grad $u(M_2) = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, grad $u(M_3) = 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; в) grad $u(M) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

7. а) В точках конуса $z^2 = xy$; б) в точках прямой $x = y = z$.

8. а) Во всех точках; б) в точках прямой $x = y$.

9. $\varphi = \arccos(-8/9)$.

10. В точках сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$.

11. r; $1/r$; $\sin r$; $\ln r$; $\operatorname{arctg} r$.

13. $\mathbf{c}$; $(\mathbf{cr})$ grad $u + u\mathbf{c}$.

14. а) $\dfrac{u}{u^2 - xy}(y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$; б) $(e^u - 1)^{-1}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$; в) $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

15. а) 0; б) $2(x^2 + y^2 + z^2)$; в) 0; г) 0; д) 3; е) $f_1(y, z) + f_2(x, z) + f_3(x, y)$.

16. а) 3; б) $2/r$; в) $7r^4$.

17. min div $\mathbf{a} = 0$ при $x = a$, $y = b$.

19. а) $(\mathbf{cr})/r$; б) $2(\mathbf{rc})$; в) $(f'(r)/r)(\mathbf{rc})$; г) $(\mathbf{ab})$; д) $4(\mathbf{ra})$; е) 0; ж) $2(\mathbf{ab})$.

20. а) 0; б) $-2\omega^2$.

21. 0 вне масс.

22. 0 вне зарядов.

23. а) $-(1/y)\mathbf{i} - (1/z)\mathbf{j} - (1/x)\mathbf{k}$.

24. а) 0; б) $2xyz(3z - 2)\mathbf{i} + 2yz^2(1 - z)\mathbf{k}$; в) 0; г) $-(1/x^2)\mathbf{j} - (2/x^3)\mathbf{k}$; д) 0; е) $(1/x^2)\mathbf{i} + 2(y/x^3)\mathbf{j}$.

25. а) $-4\mathbf{i} - \mathbf{j}$; б) $4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; в) $4\mathbf{i}$.

26. а) 0; б)0; в) 0.

27. а) $(\mathbf{rc})\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} + [\mathbf{ca}]$; б) $(1/r)[\mathbf{rc}]$; в) $(f'(r)/r)[\mathbf{rc}]$; г) $2f(r)\mathbf{c} + (f'(r)/r)[\mathbf{cr}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{cr})]$.

30. $(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = yz(x + y)\mathbf{i} + zx(y + z)\mathbf{j} + xy(z + x)\mathbf{k}$; $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = y(z^2 + x^2)\mathbf{i} + z(x^2 + y^2)\mathbf{j} + x(y^2 + z^2)\mathbf{k}$;

$d\mathbf{a}/db = (z^2x^2 + x^2y^2 + y^2z^2)^{-1/2}[yz(x + y)\mathbf{i} + zx(y + z)\mathbf{j} + xy(z + x)\mathbf{k}]$;

$d\mathbf{b}/da = (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)^{-1/2}[y(z^2 + x^2)\mathbf{i} + z(x^2 + y^2)\mathbf{j} + x(y^2 + z^2)\mathbf{k}]$.

31. $d\mathbf{a}/dl_1 = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$; $d\mathbf{a}/dl_2 = (1/\sqrt{2}-)[(x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$; $d\mathbf{a}/dl_3 = (1/\sqrt{2}-)[x\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}]$; $d\mathbf{a}/dl_4 = (1/\sqrt{3}-)[(x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}]$; $(\mathbf{I}_1\nabla)\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$; $(\mathbf{I}_2\nabla)\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $(\mathbf{I}_3\nabla)\mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; $(\mathbf{I}_4\nabla)\mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$.

33. $dT/dt = -2T_0t\exp\{-t^{-2} - t^2\}$; $(\mathbf{v}\nabla)T = 2T_0t^{-3}\exp\{-t^{-2} - t^2\}$; $dT/dt = dT/dt + (\mathbf{v}\nabla)T = 2T_0(-t + t^{-3})\exp\{-t^{-2} - t^2\}$.

34. $d\mathbf{E}/dt = \mathbf{i}A_0\omega\cos\omega t$; $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E} = (ke/r^5\{[a\sin t(3x^2 - r^2) - 3bx(y\cos t + z)]\mathbf{i} + [b\cos t(r^2 - 3y^2) - 3y(bz - ax\sin t)]\mathbf{j} + [b(r^2 - 3z^2) - 3z(by\cos t - ax\sin t)]\mathbf{k}\}$; $d\mathbf{E}/dt = d\mathbf{E}/dt + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{E}$.

36. а) $(\mathrm{grad}\,u)^2 + u\nabla u$; б) $f''(r) + (2/r)f'(r)$; в) $[\mathrm{grad}\,u\ \mathrm{grad}\,\upsilon]$; г) $(\mathrm{rot}\,\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathrm{rot}\mathbf{b} - \mathrm{rot}\mathbf{b}\cdot\mathrm{div}\mathbf{a}$.

37. а) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = 2(2zx - x^2)\mathbf{i} + 2(2xy - y^2)\mathbf{j} + 2(2yz - z^2)\mathbf{k}$; $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} = 2(2zx + y^2)\mathbf{i} + 2(2xy + z^2)\mathbf{j} + 2(2yz + x^2)\mathbf{k}$; $\nabla\mathbf{a} = 2(x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2(y^2 + z^2)\mathbf{j} + 2(z^2 + x^2)\mathbf{k}$.

42. а) $\mathbf{a}_{\text{пот}} = (1/3)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, $\mathbf{a}_{\text{сол}} = (2x/3 + y)\mathbf{i} + (x - 4y/3)\mathbf{j} + (2z/3 + 1)\mathbf{k}$; б) $\mathbf{a}_{\text{пот}} = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_{\text{сол}} = 0$; в) $\mathbf{a}_{\text{пот}} = 0$, $\mathbf{a}_{\text{сол}} = \mathbf{a}_3$.Следует иметь в виду, что ответы задачи не однозначны. Например, возможно $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_{\text{пот}} = \mathbf{a}_{\text{сол}}$, где $\mathbf{a}_{\text{пот}} = (x + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_{\text{сол}} = (x - y - z)\mathbf{i} + (y - x - z)\mathbf{j} + (2z + y + x)\mathbf{k}$.

43. а) 1/6; б) $4\pi/3$.

44. а) 0; б) 0.

45. а) $4\pi/3$; б) $5\pi/3$; в) $-5\pi/3$; г) $\pi/3$; д) $2\pi/3$.

46. а) 0; б) $2\pi 3\sqrt{3}-$; в) 0; г) $10\pi\sqrt{3}-/81$.

47. а) 0; 0; б) $-2\pi/3\sqrt{3}-$; $2\pi/3\sqrt{3}-$; в) 0; 0; г) $-10\pi\sqrt{3}-/81$; $10\pi\sqrt{3}-/81$.

48. $\pi\alpha(3-\alpha^2)/3\sqrt{3}-$; $\alpha = 1$; $\alpha = -1$

49. Соленоидеальными являютя поля $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_3$; 0; $8\pi/3$; 0; 0.

50. а) 3/2; б) −1/2; в) −1/2; −1/2.

51. а) $-\pi\sqrt{3}-$; б) $-2\sqrt{3}-/3$; в) $\pi/\sqrt{3}-$; г) $-2\pi/(3\sqrt{3}-)$.

52. а) $-\pi\sqrt{3}-(1-\alpha^2/3)$; $\alpha = 0$.

53. а) 2/3; б) 26/3.

54. а) 2; б) −2; в) −1; г) 1; д) −1; е) −2.

55. $$u = \int_{r_0}^{r} t f(t)dt + C$$.

56. Понециальными являются поля $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; 0; 0; 0; π.

57. $\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u_1$; $u_1 = xy + xz + yz + C$; $\mathbf{a}_2 = \operatorname{grad} u_2$;

$$u_2 = \int_0^x f_1(\xi)d\xi + \int_0^y f_2(\eta)d\eta + \int_0^z f_3(\zeta)d\zeta + C$$.

58. $\mathbf{N}_1$ образует острый угол с осью Oz.

59. $u = \ln r + C$.

60. а) rot $\mathbf{a} = 0$ при $x^2 + y^2 \neq 0$; б) rot $\mathbf{a} = 0$ при $y^2 + z^2 \neq 0$ в) rot $\mathbf{a} = [4xy/(x^2 + y^2)^2]\mathbf{k}$; г) rot $\mathbf{a} = [4yz/(y^2 + z^2)^2]\mathbf{i}$; циркуляции всех полей вдоль указанных окружностей равны нулю. Поле а) потенциально в указанной области, и его потенциал есть $u = \ln\sqrt{x^2+y^2} + z^2/2 + C$.Поле б) потенциально в указанной области, и его потенциал есть $u = \ln\sqrt{y^2+z^2} + x^2/2 + C$. Поля в) и г) не являются потенциалами.

61. 0 при $x^2 + y^2 \neq 0$; 2π, нет; да.

62. grad $u = [-|y|/(x^2 + y^2)]\mathbf{i} + [|x|/(x^2 + y^2)]\mathbf{j}$; 0; да.

63. 0 при $x^2 + y^2 \neq 0$; 2π, область не является односвязной.

75. б) 1°) $\pi/2$; 2°) 0; 3°) π; 4°) 0; в) 1°) в точке A: $\mathbf{i} = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$; в точке B: $\mathbf{i} = -\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$; 2°) в точке A: $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}$; $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$; в точке B: $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{j}$; $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}$, $\mathbf{e} = \mathbf{k}$.

76. б) 1°) $\pi/2$; 2°) 0; 3°) π; 4°) 0; в) 1°) в точке A: $\mathbf{i} = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k} = -\mathbf{e}_\theta$; в точке B: $\mathbf{i} = -\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{k} = -\mathbf{e}_\theta$; 2°) в точке A: $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{j}$; в точке B: $\mathbf{e}_r = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}$.

77. $$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$.

78. $$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right],\ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right]\mathbf{e}_z$$, где $\mathbf{a} = a_\rho(\rho, \varphi)\mathbf{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi)\mathbf{e}_\varphi$.

79. $$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi$$.

80. а) $$\operatorname{div} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \rho\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$$, где $\mathbf{a} = a_\rho\mathbf{e}_\rho + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi + a_z\mathbf{e}_z$;

б) $$\operatorname{div} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r \sin\theta) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\theta \sin\theta) + r\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$, где $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$.

81. а) $$\operatorname{rot} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho_{a\varphi}) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi}\right]\mathbf{e}_z$$, где $\mathbf{a} = a_\rho\mathbf{e}_\rho + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi + a_z\mathbf{e}_z$;.

б)

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r\sin\theta} \times \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(a_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi}\right]\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi)\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \right.$$

, где $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi$.

82. $$\Delta u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$.

83. а) $C_1 \ln \rho + C_2$; б) $C_1\varphi + C_2$; в) $C_1 z + C_2$; C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

84. $C_1/r + C_2$; б) $C_1 \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + C_2$; в) $C_1\varphi + C_2$; C_1 и C_2 – произвольный постоянные.

85. $m(m+1)r^{m-2}$.

86.

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1},\ \operatorname{div}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2},\ \operatorname{div}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3};$$

а) $\operatorname{div}\mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho},\ \operatorname{div}\mathbf{e}_\varphi = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{e}_z = 0$;

б) $\operatorname{div}\mathbf{e}_r = \frac{2}{r},\ \operatorname{div}\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta,\ \operatorname{div}\mathbf{e}_\varphi = 0$.

87. $\operatorname{rot}\mathbf{e}_\rho = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_z$, $\operatorname{rot}\mathbf{e}_z = 0$; б) $\operatorname{rot}\mathbf{e}_r = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{e}_r = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi,\ \operatorname{rot}\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta,\ \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta$.