

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Ответы и указания к упражнениям для самостоятельной работы

---

1. а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} - \sqrt{3} = 0$ ; б)  $2x + \sqrt{3}y - z$ ; в)  $ax + ay - \sqrt{2}z = 0$ .

2. а)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = -\frac{1}{2}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -1$ .

3. а)  $\frac{2\pi a^2(2\sqrt{2}-1)}{3}$ ; б)  $\frac{a^2(20-3\pi)}{9}$ ; в)  $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{a}}$ ; г)

$\frac{1}{3}abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1} \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{3/2} - \frac{1}{c^3}\right]$ ; д)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ; е)  $\pi\sqrt{2}$ .

4. а)  $4\pi a^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$ ; б)  $R^2 |u_2 - u_1| |\cos u_1 - \cos u_2|$ ; в)  $8a^2$ ; г)  $2a^2$ ; д)  $(20 - 3\pi)/9$ ; е)  
 $\left(a\sqrt{a^2 + h^2} + h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}\right)$ ; ж)  $4\pi^2 ab$ .

5. а)  $4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2$ ; б)  $\frac{\pi a^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ .

6.  $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4$ .

7.  $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$ .

8. а)  $\pi a^3$ ; б)  $\frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{2}$ ; в)  $0,5(3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$ ; г)  $\frac{125\sqrt{5} - 1}{420}$ ; д)

$\pi^2(a\sqrt{1 + a^2} + \ln(1 + \sqrt{1 + a^2}))$ ; е)  $0,5\pi a^4 \sin \alpha \cos^2 \alpha$ ; ж)  $\frac{64a^4\sqrt{2}}{15}$ .

9. а)  $\frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$ ; б)  $\pi a^2$ .

10.  $\frac{a^3\rho_0}{2\sqrt{3}}$ .

11.  $\frac{\pi a^4\rho_0}{2}$ .

12.  $\frac{1}{12} \pi \rho_0 a (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2 + b^2}$

13.  $40a^4, \pi R \left( R(R+H)^2 + \frac{2H^3}{3} \right)$

14.  $x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = 0, z_0 = \frac{16a}{9\pi}; x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}, z_0 = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\pi}$

15.  $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ , где  $F_1 = F_2 = 0, F_3 = \pi \gamma m \rho_0 \ln \left( \frac{a}{b} \right)$

16. а)  $4\pi a^3$ ; б)  $abc \times \left( \frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right)$ ; в) 0; г)  $\frac{4\pi}{abc} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$

17. а) 0; б)  $\pi h^3$ ; в) 0; г) 0; д)  $\pi$ ; е)  $\frac{3\pi}{8}$ ; ж) 0; з)  $\frac{\pi}{5}$ .

18.  $-2\pi$  Указание: Дополните кривую  $L$  отрезком так, чтобы контур стал замкнутым; б)  $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ ; в)  $-\pi a^2 \sqrt{3}$ ; г)  $-2\pi a(a+h)$ ; д)  $2\pi R r^2$ ; е)  $-\frac{9}{2} a^3$ ; ж)  $-4$ ;

19. а)  $-53 \frac{7}{12}$ ; б) 0; в)  $b - a$ .

20.  $\frac{\int \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} t f(t) dt}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

21. а)  $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$ ; б)  $u = e^{xyz} + e^y xz + e^z xy + C$ ; в)  $u = x^2 yz + xy^2 z + xyz^2 + C$ .

22.  $-mg(z_2 - z_1)$ .

23. а) 0; б) 0.

24. а)  $4\pi a^3$ ; б) 0. Указание: Дополните поверхность  $\Phi$  до замкнутой; в) 0; г)  $\pi$ . Указание: Дополните поверхность  $\Phi$  до замкнутой; д) 0; е)  $\frac{\pi}{5}$ ; ж)  $3a^4$ ; з)  $\frac{12\pi a^5}{5}$ ; и) 1.