Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Основные понятия и формулы

1. Скалярное поле. Пусть G − область в трехмерном пространстве (или на плоскости). Говорят, что в области G задано *скалярное поле*, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле плотности зарядов на какой-либо поверхности или в сплошной среде; поле плотности масс какого-либо тела.

Поверхность (линия), на которой функция $u(M)$ принимает постоянное значение, называется *поверхностью* (*линией*) *уровня* скалярного поля (например, поверхность или линия постоянной температуры). Придавая $u(M)$ различные постоянные значения: $u(M) = C$, получаем семейство поверхностей (линий) уровня данного скалярного поля.

Физические скалярные поля не зависят от выбора системы координат: величина и является функцией лишь точки M и, быть может, времени (нестационарные поля).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$.

2. Векторное поле. Говорят, что в области G задано *векторное поле*, если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\mathbf{a}(M)$.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности $\mathbf{E}$; магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции $\mathbf{B}$; поле тяготения, создаваемое системой масс и характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения $\mathbf{F}$, действующей в этой точке на единичную массу; поле скоростей потока жидкости, описываемое в каждой точке вектором скорости $\mathbf{v}$.

Удобной геометрической характеристикой векторного поля $\mathbf{a}(M)$ служат *векторные линии* − кривые, в каждой точке M которых вектор $\mathbf{a}(M)$ направлен по касательной к кривой. Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного полей называются *силовыми линиями*, а поля скоростей − *линиями тока*. Так, например, силовые линии электрического поля двух разноименных зарядов представляют собой кривые, начинающиеся на одном заряде и заканчивающиеся на другом. Силовые линии магнитного поля тока являются замкнутыми кривыми.

Пусть векторная линия, проходящая через точку M_0, описывается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t − параметр. Условие коллинеарности вектора поля $\mathbf{a}$ и касательного вектора $\mathbf{r}(t)$ в произвольной точке этой линии имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda\mathbf{a}, \tag{1}$$

где λ − некоторое число. Условие (1) можно записать также в виде

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\mathbf{a}\right] = 0, \tag{2}$$

или, умножая на dt, в виде

$$[d\mathbf{r}\ \mathbf{a}] = 0. \tag{3}$$

Каждое из уравнений (1)−(3) является дифференциальным уравнением векторных линий в векторной форме и определяет множество векторных линий. Конкретная векторная линия, проходящая через заданную точку M_0, определяется дополнительным условием

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \tag{4}$$

где $\mathbf{r}_0$ − радиус-вектор точки M_0.

Физические векторные поля не зависят от выбора системы координат: в каждой точке M вектор $\mathbf{a}(M)$ полностью определяется своим модулем $|\mathbf{a}(M)|$ и направлением. Если в пространстве введена прямоугольная система координат Oxyz, то векторное поле $\mathbf{a}(M)$ описывается вектор-функцией трех переменных $\mathbf{a}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями − ее координатами:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\},\ (x, y, z) \in G.$$

Так как в прямоугольных координатах $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$, то векторное уравнение (3) для векторных линий эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \tag{5}$$

а дополнительное векторное условие (4) эквивалентно следующим условиям:

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0, \tag{6}$$

где x_0, y_0, z_0 − координаты точки M_0.

3. Производная по направлению. Скалярное и векторное поля $u(M) = u(x, y, z)$ и $\mathbf{a}(M) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ называются *дифференцируемыми n раз*, если функции $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ дифференцируемы n раз. В дальнейшем, не оговаривая это особо, будем считать, что рассматриваемые поля дифференцируемы нужное нам число раз.

Пусть $u(M)$ − скалярное поле, заданное в области G; $\mathbf{l}$ − единичный фиксированный вектор; M − фиксированная точка; M' − любая точка из G, отличная от M и такая, что вектор $\overrightarrow{MM'}$ коллинеарен $\mathbf{l}$. Пусть, далее, MM' − величина направленного отрезка MM' (она равна его длине $|\overrightarrow{MM'}|$, если векторы и $\mathbf{l}$ сонаправлены, и равна $-|\overrightarrow{MM'}|$, если эти векторы противоположно направлены).

О п р е д е л е н и е . Число $\lim\limits_{M' \to M} \dfrac{u(M') - u(M)}{MM'}$ называется *производной скалярного поля* $u(M)$ (функции $u(M)$) в точке M *по направлению* $\mathbf{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$.

Производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}(M)$ является скоростью изменения функции $u(M)$ по направлению $\mathbf{1}$ в точке M.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ $\mathbf{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{7}$$

В частности, если вектор $\mathbf{l}$ сонаправлен с одной из координатных осей, то производная по направлению $\mathbf{l}$ совпадает с соответствующей частной производной. Например, если $\mathbf{l} = \{1, 0, 0\}$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично определяется производная по направлению векторного поля.

О п р е д е л е н и е . Вектор $\lim\limits_{M' \to M} \dfrac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{MM'}$ называется *производной векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ (вектор-функции $\mathbf{a}(M)$) в точке M *по направлению* $\mathbf{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial l}$.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$, то

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial l}, \frac{\partial Q}{\partial l}, \frac{\partial R}{\partial l} \right\}.$$

4. Градиент скалярного поля.

Определение. *Градиентом* скалярного поля $u(x, y, z)$ называется вектор-функция

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Из равенства (7) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{l}), \tag{8}$$

откуда $\frac{\partial u}{\partial l}(M) = |\operatorname{grad} u||\mathbf{l}| \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$, так как $|\mathbf{l}| = 1$. Здесь φ − угол между векторами $\mathbf{l}$ и grad u в точке M. Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial l}$ принимает наибольшее значение при $\varphi = 0$, т. е. в направлении grad u в данной точке. Иначе говоря, вектор grad u в данной точке указывает направление наибольшего роста поля u (функции u) в этой точке, а |grad u| есть скорость роста функции и в этом направлении. Таким образом, вектор grad u не зависит от выбора системы координат, а его модуль и направление в каждой точке определяются самой функцией $u(M)$.

5. Потенциальное поле.

Определение. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным* в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u. \tag{9}$$

Функция $u(M)$ называется *скалярным потенциалом* векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Если $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$, то из равенства (9) следует, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \ Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Иногда потенциалом векторного поля $\mathbf{a}$ называют такую функцию u, что $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} u$.

Рассмотрим, например, поле тяготения точечной массы m, помещенной в начале координат. Оно описывается вектор-функцией $\mathbf{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3}\mathbf{r}$ (γ − гравитационная постоянная, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). С такой силой действует это поле на единичную массу, помещенную в точку $M(x, y, z)$. Поле тяготения является потенциальным. Его можно представить как градиент скалярной функции $u(M) = \frac{\gamma m}{r}$, называемой *ньютоновским потенциалом поля тяготения* точечной массы m. Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma m \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma m}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = -\gamma m \frac{x}{r^3}.$$

Аналогично, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma m \frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma m \frac{z}{r^3}$, откуда

$$\operatorname{grad} u = -\gamma \frac{m}{r^3}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) = -\gamma \frac{m}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}(M).$$

В качестве еще одного примера рассмотрим электрическое поле точечного заряда e, помещенного в начале координат. Оно описывается в точке $M(x, y, z)$ вектором напряженности

$$\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r} \ (\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Это также потенциальное поле. Его можно представить в виде $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{ke}{r}$. Функция $u(M) = \frac{ke}{r}$ называется *потенциалом электрического поля* точечного заряда e.

Поверхности уровня потенциала $u(M)$ называются *эквипотенциальными поверхностями*. В рассмотренных примерах эквипотенциальными поверхностями являются сферы с центром в начале координат.

6. Дивергенция.

О п р е д е л е н и е . *Дивергенцией* векторного поля $\mathbf{a} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Слово "дивергенция" означает "расходимость" ("расхождение"). Дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Рассмотрим, например, электрическое поле точечного заряда e, помещенного в начале координат:

$$\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r} = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}),$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Так как $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{r^3 - x\cdot 3r^2\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$ и, аналогично $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$, то

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = ke\,\frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

(при $r \neq 0$). Физически этот результат означает отсутствие источников поля в любой точке, кроме начала координат. В начале координат div **E** = ∞ (бесконечная плотность заряда).

7. Ротор.

О п р е д е л е н и е . *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля $\mathbf{a} = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ называется вектор-функция

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

В частности, для плоского поля $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y), 0\}$ имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ротор характеризует завихренность поля **a** в данной точке.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (рис. 74). Векторное поле скоростей $\mathbf{v}(M)$ точек этого тела можно представить в виде

$$\mathbf{v}(M) = [\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}.$$

Найдем ротор поля скоростей $\mathbf{v}(M)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 0 + \mathbf{j}\cdot 0 + 2\omega\,\mathbf{k} = 2\omega\,\mathbf{k}.$$

Таким образом, rot **v** является постоянным вектором, направленным вдоль оси вращения Oz, а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения тела: $|\operatorname{rot}\mathbf{v}| = 2\omega$.

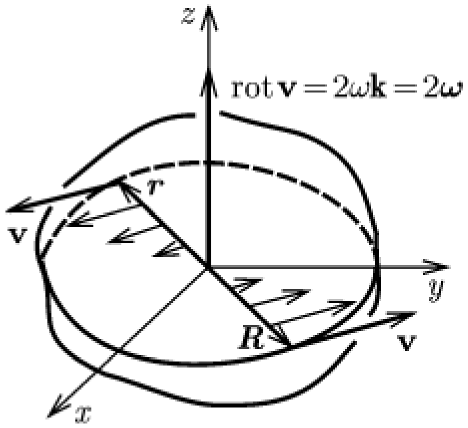

Рис. 74

Рассмотрим потенциальное поле

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

Его потенциал $u = r^2/2 = (x^2 + y^2 + z^2)/2$. Вычислим ротор этого поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\cdot 0 + \mathbf{j}\cdot 0 + \mathbf{k}\cdot 0 = 0.$$

Вообще, ротор любого потенциального поля равен нулю (см. также § 2). Поэтому говорят, что потенциальное поле является безвихревым.

8. Соленоидальное поле. Векторное поле **a**(M) называется соленоидалъным в области G, если в этой области div **a** = 0. Так как div **a** характеризует плотность источников поля **a**, то в той области, где поле **a** соленоидально, нет источников этого поля.

Например, электрическое поле **E** точечного заряда соленоидально (удовлетворяет условию div **E** = 0) всюду вне точки, где находится заряд (в этой точке div **E** = ∞). Векторные линии соленоидального поля не могут начинаться или заканчиваться внутри области соленоидальности; они либо начинаются и заканчиваются на границе области, либо являются замкнутыми кривыми. Примером соленоидального поля с замкнутыми векторными линиями является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.

Если векторное поле **a**(M) можно представить как ротор некоторого векторного поля **b**(M), т. е. **a** = rot **b**, то вектор-функция **b**(M) называется *векторным потенциалом поля* **a**(M).

Можно проверить (см. подробнее § 2), что div rot **b** = 0, т. е. поле **a** = rot **b** является соленоидальным.

Любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей (см. § 2).

9. Уравнения Максвелла. Уравнения Максвелла − фундаментальные уравнения классической электродинамики, описывающие электромагнитные явления в любой среде (и в вакууме). Они связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, т. е. напряженность электрического поля **E**, электрическую индукцию **D**, напряженность магнитного поля **H** и магнитную индукцию **B** с источниками поля, т. е. с распределением в пространстве электрических зарядов и токов.

В дифференциальной форме уравнения Максвелла записываются с помощью понятий дивергенции и ротора. В системе СИ эти уравнения имеют следующий вид.

I. $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Это уравнение является обобщением закона Био-Савара и выражает тот факт, что магнитное поле порождается токами проводимости (**j** − плотность тока) и токами смещения .

II. $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Это уравнение выражает закон электромагнитной индукции Фарадея и показывает, что одним из источников электрического поля является изменяющееся во времени магнитное поле.

III. $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$.

Это уравнение выражает факт отсутствия магнитных зарядов (соленоидальность магнитного поля).

IV. $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$.

Это уравнение выражает закон Кулона и показывает, что вторым источником электрического поля являются электрические заряды с плотностью ρ.

К уравнениям Максвелла следует присоединить так называемые материальные уравнения поля.

V. $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

VI. $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

VII. $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

Здесь ε − диэлектрическая проницаемость, μ − магнитная проницаемость, σ − удельная проводимость среды.

10. Оператор Гамильтона. Напомним, что символ $\frac{\partial}{\partial x}$ называется оператором частной производной по x. Под произведением этого оператора на функцию $u = u(x, y, z)$ будем понимать частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, т. е. $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ операторы частных производных по y и по z.

Введем векторный *оператор* "*набла*", или *оператор Гамильтона*:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

С помощью этого символического (операторного) "вектора" удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения вектора ∇ на скалярную функцию $u(x, y, z)$ получается grad u:

$$\nabla u = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u.$$

Скалярное произведение вектора ∇ на вектор-функцию $\mathbf{a}(x, y, z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ дает div $\mathbf{a}$:

$$(\nabla\, \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q + \frac{\partial}{\partial z}R = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Векторное произведение вектора ∇ на вектор-функцию $\mathbf{a}(x, y, z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ дает rot $\mathbf{a}$:

$$[\nabla\, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \mathbf{a}.$$

11. Правила вычислений с оператором ∇.

а) Если оператор ∇ действует на линейную комбинацию $\Sigma_i\, a_i F_i$, где F_i − скалярные или векторные функции a_i − числа, то

$$\nabla\left(\sum_i a_i F_i\right) = \sum_i a_i \nabla F_i.$$

б) Если оператор ∇ действует на произведение нескольких функций F, G, H (скалярных или векторных), то результат этого действия аналогичен результату дифференцирования произведения в том смысле, что оператор ∇ последовательно применяют к каждому сомножителю, отмеченному знаком ↓, а другие сомножители при этом считают фиксированными. Затем результаты складывают. Итак,

$$\nabla(FGH) = \nabla(\overset{\downarrow}{F}GH) + \nabla(F\overset{\downarrow}{G}H) + \nabla(FG\overset{\downarrow}{H}). \tag{10}$$

При этом следует иметь в виду, что слагаемые в правой части равенства (10) предварительно преобразуют по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором ∇ стоял тот множитель, который отмечен знаком ↓. После вычислений знаки ↓ опускают.

Пользуясь этим правилом, докажем, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}). \tag{11}$$

Учитывая, что $\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\nabla\cdot[\mathbf{ab}])$, по формуле (10) имеем

$$(\nabla\cdot[\mathbf{ab}]) = (\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) + (\nabla\cdot[\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]). \tag{12}$$

Чтобы в первом из двух смешанных произведений (12) оператор ∇ действовал на вектор **a**, воспользуемся свойством смешанного произизведения:

$$(\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) = ([\nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]\,\mathbf{b}).$$

Переставляя сомножители $[\nabla\mathbf{a}]$ и **b** в скалярном произведении и учитывая, что $[\nabla\mathbf{a}] = \operatorname{rot}\mathbf{a}$, получаем

$$(\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) = (\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}).$$

Во втором слагаемом (12) поменяем местами сомножители в векторном произведении:

$$(\nabla\cdot[\mathbf{a}\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}\mathbf{a}]).$$

После этого находим

$$(\nabla\cdot[\mathbf{a}\ \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\nabla\cdot[\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}\ \mathbf{a}]) = -(\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}).$$

Складывая полученные результаты, получаем формулу (11).

Формулу (8) для производной по направлению с помощью оператора ∇ можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{l}\nabla u).$$

С другой стороны, $\frac{\partial u}{\partial l}$ можно вычислить, "умножая" скалярное произведение векторов $\mathbf{l}$ и ∇ на скаляр u:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{l}\nabla)u. \tag{13}$$

Символ $\frac{\partial}{\partial l} = (\mathbf{l}\nabla)$ будем называть оператором производной по направлению $\mathbf{l}$. В частном случае, когда вектор $\mathbf{l}$ сонаправлен с одной из координатных осей, например, с Ox ($\mathbf{l} = \mathbf{i}$), имеем

$$\frac{\partial}{\partial l} = (\mathbf{i}\ \nabla) = \frac{\partial}{\partial x},$$

т. е. оператор производной по направлению координатной оси − это оператор соответствующей частной производной.

Используя оператор производной по направлению, запишем с помощью оператора Гамильтона производную векторного поля $\mathbf{a}$ по направлению $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l} = (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{a}. \tag{14}$$

Формула (14) эквивалентна совокупности трех формул (13) для координат вектора $\mathbf{a}$.

12. Нестационарные поля. Пусть в области G определено нестационарное скалярное поле $u(x, y, z, t)$: величина u является функцией точки $M(x, y, z) \in G$ и времени t. Физический пример такого поля − изменяющееся со временем распределение температуры в какой-либо среде (например, в потоке жидкости). Рассмотрим движущуюся в области G точку (частицу жидкости) $M(x(t), y(t), z(t))$. Координаты точки (частицы) изменяются со временем по известному закону $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Величина u в движущейся точке M является сложной функцией t:

$$u = u(x(t), y(t), z(t), t).$$

Вычислим производную по t этой функции (она называется *полной производной*). По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Введя в точке M вектор скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right\}$, получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_x\frac{\partial u}{\partial x} + v_y\frac{\partial u}{\partial y} + v_z\frac{\partial u}{\partial z},$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \mathrm{grad}\ u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \nabla)u. \qquad (15)$$

Аналогично, если в области G задано нестационарное векторное поле $\mathbf{a}(x, y, z, t)$, то Для движущейся точки $M(x(t), y(t), z(t))$ векторная величина $\mathbf{a}$ является сложной функцией t: $\mathbf{a}(x(t), y(t), z(t), t)$. Полную производную по t для каждой координаты вектор-функции $\mathbf{a}$ можно вычислить по формуле (15). Умножая результаты на базисные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и складывая, получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}\ \nabla)\mathbf{a}. \qquad (16)$$

В формулах (15) и (16) слагаемые $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$ выражают скорости изменения величин u и $\mathbf{a}$ со временем при фиксированных координатах, т. е. характеризуют локальное изменение этих величин, и поэтому называются *локальными производными*. Слагаемые $(\mathbf{v}\ \nabla)u$ и $(\mathbf{v}\ \nabla)\mathbf{a}$ образуются за счет изменения координат точки, ее движения (конвекции). Поэтому эти слагаемые в выражениях полных производных называются *конвективными производными*.

Локальные производные характеризуют нестационарность рассматриваемого физического поля в данной точке пространства. Конвективные производные характеризуют неоднородность поля в данный момент времени.

Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Основные понятия и формулы

---

1. Дифференциальные операции второго порядка. Пусть в области G заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$, причем функции u,$P$, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные второго порядка. Тогда grad $u(M)$ и rot $\mathbf{a}(M)$ являются дифференцируемыми векторными полями, а div $\mathbf{a}(M)$ − дифференцируемым скалярным полем.

К векторным полям grad $u(M)$ и rot $\mathbf{a}(M)$ можно применить операции вычисления дивергенции и ротора, а к скалярному полю div $\mathbf{a}(M)$ − операцию вычисления градиента. Таким образом, получаем повторные операции: div grad u, rot grad u, div rot $\mathbf{a}$, rot rot $\mathbf{a}$, grad div $\mathbf{a}$.

Операцию div grad называют *оператором Лапласа* и обозначают также символом Δ:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u.$$

С помощью оператора Гамильтона оператор Лапласа записывается в виде

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla \cdot (\nabla u)) = \nabla^2 u.$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

получаем

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Функция u, удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической* в этой области. Например, линейная функция $u = ax + by + cz$ является гармонической в любой области. Оператор Лапласа широко используется в уравнениях математической физики. Отметим, в частности, что потенциал электрического поля точечного заряда или поля тяготения точечной массы, имеющий вид $u = k/r$ {k = const, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), при $r \neq 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Как было отмечено в § 1,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla \cdot \nabla u] = 0$$

(потенциальное векторное поле grad u является безвихревым) и

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla[\nabla \cdot \mathbf{a}]) = 0$$

(векторное поле rota является соленоидальным).

Две остальные повторные операции rot rot **a** и grad div **a** связаны соотношением (см. пример 3)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}, \qquad (1)$$

где $\Delta\mathbf{a} = \Delta(P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) = \Delta P\,\mathbf{i} + \Delta Q\,\mathbf{j} + \Delta R\,\mathbf{k}$ − вектор-функция, координатами которой являются результаты применения оператора Лапласа к функциям P, Q, R.

2. Разложение векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей. Произвольное непрерывно дифференцируемое векторное поле $\mathbf{a}(M)$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}_1(M) + \mathbf{a}_2(M), \qquad (2)$$

где $\mathbf{a}_1(M)$ − потенциальное поле, $\mathbf{a}_2(M)$ − соленоидальное поле.

Действительно, по определению потенциальное векторное поле $\mathbf{a}_1(M)$ есть градиент некоторого скалярного поля $u(M)$: $\mathbf{a}_1(M) = \operatorname{grad} u(M)$. Поэтому для вектора $\mathbf{a}_2(M)$ из равенства (2) имеем

$$\mathbf{a}_2(M) = \mathbf{a}(M) - \operatorname{grad} u(M). \qquad (3)$$

Чтобы векторное поле $\mathbf{a}_2(M)$ было соленоидальным, оно должно удовлетворять условию $\operatorname{div}\mathbf{a}_2(M) = 0$, откуда, учитывая равенство (3), находим

$\operatorname{div}\mathbf{a}_2(M) = \operatorname{div}\mathbf{a}(M) - \operatorname{div}\operatorname{grad} u(M) = \operatorname{div}\mathbf{a}(M) - \Delta u(M) = 0.$

Таким образом, для скалярного потенциала поля $\mathbf{a}_1(M)$ получаем уравнение

$$\Delta u = \operatorname{div}\mathbf{a}, \qquad (4)$$

где $\operatorname{div}\mathbf{a}$ − известная функция данного поля $\mathbf{a}(M)$.

Итак, если функция и есть решение уравнения (4), то, полагая $\mathbf{a}_1(M) = \operatorname{grad} u(M)$, $\mathbf{a}_2(M) = \mathbf{a}(M) - \operatorname{grad} u(M)$, получаем представление поля $\mathbf{a}(M)$ в виде (2), где $\mathbf{a}_1(M)$ − потенциальное, $\mathbf{a}_2(M)$ − соленоидальное поле.

Уравнение (4) − неоднородное уравнение в частных производных второго порядка, называемое *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,\ f = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Отметим, что это уравнение имеет (бесконечное) множество решений, поэтому представление поля $\mathbf{a}(M)$ в виде (2) не единственно.

Интегральные характеристики векторных полей

Основные понятия и формулы

---

1. Поток векторного поля. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}(M)$, определенное в пространственной области G, и некоторую кусочно гладкую ориентированную поверхность Φ □ G. Пусть $\mathbf{n}(M)$ − поле единичных нормалей на выбранной стороне поверхности Φ.

Как было отмечено в § 3 из гл. XIV, поверхностный интеграл

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS = \iint_{\Phi} a_n\, dS \qquad (1)$$

называется *потоком векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *через поверхность* Φ *в сторону, определяемую вектором* $\mathbf{n}$ (говорят также: *поток через выбранную сторону поверхности* Φ).

Если взять другую сторону поверхности (изменить ориентацию), то вектор $\mathbf{n}$ изменит направление на противоположное; поэтому скалярное произведение $(\mathbf{an})$, а значит, и поток (поверхностный интеграл (1)) изменит знак.

Если $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ − скорость движущейся жидкости, то $\iint_{\Phi} (\mathbf{vn})\, dS$ представляет собой количество (объем) жидкости, протекающей через поверхность Φ в заданную сторону в единицу времени. Эта величина называется в физике (гидродинамике) *потоком жидкости* через поверхность Φ. Поэтому и в случае произвольного векторного поля $\mathbf{a}(M)$ интеграл (1) называется потоком векторного поля через поверхность Φ.

Рассмотрим электрическое поле $\mathbf{E}$ точечного заряда e, помещенного в точку N. Найдем поток векторного поля $\mathbf{E}$ через внешнюю сторону сферы Φ радиуса r с центром в точке N.

Пусть $\mathbf{r} = \overrightarrow{NM}$ (M − точка на сфере Ф); тогда $|\overrightarrow{NM}| = r$, $\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\mathbf{r}$, $\mathbf{n}(M) = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $(\mathbf{En}) = \frac{ke}{r^4}(\mathbf{rr}) = \frac{ke}{r^4}r^2 = \frac{ke}{r^2}$. Поэтому

$$\iint\limits_{\Phi} (\mathbf{En})\, dS = \frac{ke}{r^2}\iint\limits_{\Phi} dS = \frac{ke}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi ke = e/\varepsilon,$$

где ε − диэлектрическая проницаемость φеды, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$.

Если в системе координат $Oxyz$ $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$, а $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то выражение (1) для потока векторного поля $\mathbf{a}(M)$ можно ззаписать в виде

$$\iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{2}$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (2) зависит от выбора системы координат, однако их сумма, т. е. поток $\iint\limits_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS$, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

2. Формула Остроградского−Гаусса в векторной форме. Пусть в области G определено векторное поле $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$; Ф − замкнутая поверхность, ограничивающая область G; $\mathbf{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ − единичный вектор внешней нормали к поверхности Ф в точке M.

Пусть, далее, для векторного поля $\mathbf{a}$ (т. е. для функций P, Q, R) и поверхности Ф выполнены условия теоремы 5 из гл. XIV. Тогда справедлива формула Остроградского−Гаусса

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS. \tag{3}$$

Подынтегральная функция в тройном интеграле есть div **a**, а поверхностный интеграл представляет собой поток векторного поля **a** через поверхность Φ. Поэтому формулу (3) можно записать в векторной форме:

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \iint_\Phi (\mathbf{an})\, dS. \tag{4}$$

Физический смысл формулы Остроградского−Гаусса: поток векторного поля а через замкнутую поверхность в сторону внешней нормали равен тройному интегралу по области, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции векторного поля **a**. Чтобы поток был отличен от нуля, внутри области G должны быть источники (или стоки) поля. Из формулы Остроградского−Гаусса следует, что тогда и div **a** будет отлична от нуля. Таким образом, div **a** характеризует источники поля. Само векторное поле как бы расходится от источников. Отсюда и происходит название "расходимость" или "дивергенция".

3. Свойства соленоидального поля. Как известно, векторное поле $\mathbf{a}(M)$, удовлетворяющее в области G условию div $\mathbf{a} = 0$, называется соленоидальным в этой области. Пусть область V является *объемно односвязной*. Это означает, что если кусочно гладкая замкнутая поверхность Φ лежит в области G, то и область, ограниченная поверхностью Φ, целиком принадлежит области G. Примерами объемно односвязных областей являются шар, параллелепипед, тор. Отметим, что тор не является поверхностно односвязной областью. Область, заключенная между двумя сферами, не является объемно односвязной (но является поверхностно односвязной; см. п. 3 § 4 из гл. XIV).

Из формулы Остроградского−Гаусса следует, что соленоидальное поле в объемно односвязной области обладает следующим свойством: *поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность, расположенную в этой области, равен нулю*. Иногда это свойство принимают за определение соленоидального поля.

Отметим, что если область не является объемно односвязной, то поток соленоидального (в этой области) поля через замкнутую поверхность, расположенную в области, может быть отличен от нуля. Так, электрическое поле $\mathbf{E}(M)$ точечного заряда, помещенного в точку N, является соленоидальным в шаре с выброшенным центром N (div $\mathbf{E}(M) = 0$ при $M \neq N$). Шар с выброшенным центром не является объемно односвязной областью, и, как мы установили в п. 1, поток поля $\mathbf{E}(M)$ через сферу с центром в точке N отличен от нуля.

Слово "соленоидальное" означает "трубчатое". Для соленоидального поля имеет место закон сохранения интенсивности векторной трубки. Он состоит в следующем.

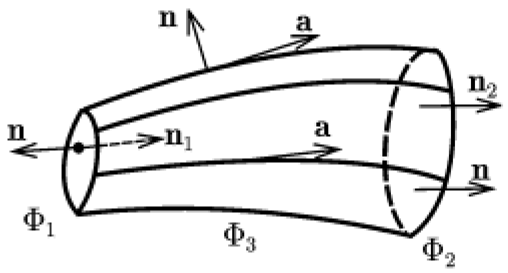

Рис. 76

Пусть $\mathbf{a}(M)$ − соленоидальное поле. Рассмотрим отрезок "векторной трубки", т. е. область, ограниченную двумя сечениями, Φ_1 и Φ_2, и боковой поверхностью Φ_3, состоящей из векторных линий (рис. 76). Применим к такой области формулу Остроградского−Гаусса (4). Так как в соленоидальном поле div $\mathbf{a} = 0$, то поток векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через поверхность области равен нулю: $\iint\limits_{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3} (\mathbf{an})\, dS = 0$ ($\mathbf{n}$ − единичный вектор внешней нормали). На боковой поверхности Φ_3 имеем $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$, поэтому $\iint\limits_{\Phi_3} (\mathbf{an})\, dS = 0$. Значит,

$$\iint\limits_{\Phi_1+\Phi_2} (\mathbf{an})\, dS = \iint\limits_{\Phi_1} (\mathbf{an})\, dS + \iint\limits_{\Phi_2} (\mathbf{an})\, dS = 0.$$

Изменим на сечении Φ_1 направление нормали $\mathbf{n}$ на противоположное ($\mathbf{n}_1$ − внутренняя нормаль к Φ_1). Тогда получим

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\mathbf{an}_1)\, dS + \iint\limits_{\Phi_2} (\mathbf{an}_2)\, dS = 0.$$

где оба потока через сечения Φ_1 и Φ_2 вычисляются в направлении векторных линий.

Таким образом, *в соленоидальном* (*трубчатом*) *векторном поле* **a** *поток через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение*. Это и есть закон сохранения интенсивности векторной трубки.

4. Инвариантное определение дивергенции. Пусть в области G, ограниченной поверхностью Φ, определено векторное поле $\mathbf{a}(M)$. Запишем формулу (4) для векторного поля $\mathbf{a}$ в области G. Применяя к левой части этой формулы теорему о φ еднем, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) \cdot V(G) = \iint\limits_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS,$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) = \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{an})\, dS}{V(G)},$$

где $V(G)$ − объем области G, а M^* − некоторая точка области G.

Зафиксируем точку $M \in G$ и будем стягивать область G к точке M так, чтобы M оставалась внутренней точкой области G. Тогда $V(G) \to 0$, а M^* будет стремиться к M. В силу непрерывности div **a** значение div $\mathbf{a}(M^*)$ будет стремиться к div $\mathbf{a}(M)$. Таким образом, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in G}} \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{an})\,dS}{V(G)}. \qquad (5)$$

В правую часть формулы (5) входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (поток векторного поля через поверхность и объем области). Поэтому формула (5) дает *инвариантное определение дивергенции векторного поля*. Итак, дивергенция векторного поля зависит только от самого поля и не зависит от выбора системы координат.

5. Циркуляция векторного поля. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}(M)$, определенное в пространственной области G, и некоторую кусочно гладкую кривую $L \in G$, на которой указано направление обхода (выбор направления обхода называют также ориентацией кривой). Пусть $\boldsymbol{\tau}(M)$ − единичный касательный вектор к кривой L в точке M, направленный в сторону обхода кривой.

Криволинейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\,dl = \int_L a_\tau\,dl \qquad (6)$$

называется *циркуляцией векторного поля* **a** *вдоль кривой L в заданном направлении*.

Если взять другое направление обхода кривой (изменить ориентацию), то вектор $\boldsymbol{\tau}$ изменит направление на противоположное, поэтому скалярное произведение $(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})$, а значит, и циркуляция (криволинейный интеграл (6)) изменит знак.

Если **a** = **F** − силовое векторное поле, т. е. **F** − вектор силы, то циркуляция $\int_L (\mathbf{F}\boldsymbol{\tau})\,dl$ представляет собой работу силового векторного поля вдоль кривой L в заданном направлении.

Если в прямоугольной системе координат Oxy $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$, а $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то выражение (6) для циркуляции векторного поля a можно записать в виде

$$\int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (7)$$

Каждое слагаемое в правой части (7) зависит от выбора системы координат, однако их сумма, т. е. циркуляция $\int_L (\mathbf{a}\tau)\,dl$, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

Если ввести вектор $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$, то циркуляцию можно записать в виде $\int_L (\mathbf{a}\,d\mathbf{r})$ (φ авните с правой частью равенства (7)).

6. Формула Стокса в векторной форме. Пусть в области G определено векторное поле $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$; L − замкнутый контур, лежащий в области G; Φ − произвольная поверхность, границей которой является контур L; Φ G (говорят: поверхность Φ натянута на контур L); $\mathbf{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ − единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности Φ.

Пусть для векторного поля **a** (т. е. для функций P, Q, R) и поверхности Φ выполнены условия теоремы 3 из гл. XIV. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_\Phi \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS,$$

где ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности Φ. Левая часть формулы Стокса есть циркуляция векторного поля **a** вдоль контура L, а правая часть представляет собой поток через поверхность Φ векторного поля с координатами $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, т. е. поток rot **a** через поверхность Φ. Поэтому формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$\oint_L (\mathbf{a}\tau)\,dl = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS, \qquad (8)$$

или

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \iint_\Phi (\mathrm{rot}\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Физический смысл формулы Стокса: циркуляция векторного поля **a** вдоль замкнутого контура равна потоку ротора векторного поля **a** через поверхность, натянутую на этот контур.

Чтобы циркуляция была отлична от нуля для малого контура, окружающего некоторую выбранную точку поверхности, поле **a** должно поворачиваться (иметь завихрение) вблизи этой точки. Из формулы Стокса следует, что тогда и rot **a** вблизи этой точки будет отличен от нуля. Таким образом, rot **a**(M) характеризует завихрение поля в точке M. Отсюда и происходит название "вихрь" или "ротор".

7. Свойства потенциального поля. Как известно, векторное поле **a**(M), удовлетворяющее в области G условию **a** = grad u, называется потенциальным в этой области (u − скалярный потенциал поля **a**(M)). Если поле **a**(M) = $\{P, Q, R\}$ потенциально в области G, то $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$ и выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ является полным дифференциалом функции u в области G. Это означает, что выполнено условие III теоремы 4 из гл. XIV об условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве. Из условия III вытекают остальные условия этой теоремы.

Таким образом, потенциальное в области G поле обладает следующими свойствами.

1°. *Циркуляция потенциального поля* **a**(M) *вдоль любого замкнутого контура* $L \subset G$ *равна нулю*:

$$\oint_L (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Иногда это свойство принимают за определение потенциального поля.

2°. *Для любых точек A и B из области G циркуляция потенциального поля* **a** = grad *u вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой $AB \subset G$ и равна разности значений потенциала u в точках A и B*:

$$\int_{AB} (\mathbf{a}\, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A).$$

Применительно к силовому потенциальному полю это свойство означает, что работа такого поля вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой, а зависит только от начальной и конечной точек A и B. Для поля тяготения точечной массы $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}$ этот факт был уже установлен в примере 5 из § 4 гл. XIV:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{k}{r}, \quad \int_{AB} (\mathbf{F}\, d\mathbf{r}) = k\left(\frac{1}{r(B)} - \frac{1}{r(A)}\right).$$

3°. *Потенциальное поле* $\mathbf{a}(M)$ *является безвихревым, т. е.*

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0.$$

Пусть теперь дано векторное поле $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$, удовлетворяющее в области G условию $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. Следует ли отсюда, что поле $\mathbf{a}(M)$ потенциально в области G? Ответ на этот вопрос зависит от вида области G. Если область G является поверхностно односвязной, то из условия $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ в силу теоремы 4 из гл. XIV следует, что существует функция $u(x, y, z)$ такая, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно, $\mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \operatorname{grad} u$, т. е. поле $\mathbf{a}$ является потенциальным в области G.

Таким образом, условие $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ является *необходимым и достаточным условием потенциальности поля* $\mathbf{a}(M)$ *в поверхностно односвязной области*.

Потенциал $u(x, y, z)$ потенциального поля $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ в поверхностно односвязной области можно вычислить по формуле (5) из § 4 гл. XIV:

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

Если область G не является поверхностно односвязной, то условия $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ не достаточно для потенциальности поля $\mathbf{a}(M)$ в области G. Так, например, векторное поле

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

(см. пример 13) удовлетворяет условию rot **a** = 0 в шаре с выброшенным диаметром, лежащим на оси Oz. Шар с выброшенным диаметром не является поверхностно односвязной областью, и, как показано в примере 13, поле **a** не является потенциальным в этом шаре.

8. Инвариантное определение ротора. Пусть в области G определено векторное поле $\mathbf{a}(M)$. Зафиксируем точку $M \in G$ и некоторую плоскость, проходящую через эту точку. Пусть **n** − единичный вектор нормали к плоскости, L − замкнутый контур, лежащий в плоскости и ограничивающий область Ф такую, что M − внутренняя точка области Ф. Запишем формулу (8) для векторного поля **a** в области Ф. Применяя к правой части этой формулы теорему о φеднем, получим

$$\oint_L (\mathbf{a}\tau)\, dl = (\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})_{M^*}\cdot S(\Phi),$$

откуда

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})_{M^*} = \frac{\oint_L (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, dl}{S(\Phi)},$$

где $S(\Phi)$ − площадь области Ф, M^* − некоторая точка области Ф.

Будем стягивать область Ф к точке M так, чтобы M оставалась внутренней точкой области Ф. Тогда $S(\Phi) \to 0$, а M^* будет стремиться к M. В силу непрерывности rot **a** значение $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})_{M^*}$ будет стремиться к $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})_M$ Таким образом, получаем

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})_M = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint_L (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\, dl}{S(\Phi)}. \tag{10}$$

В правую часть формулы входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура и площадь плоской области). Поэтому данная формула дает *инвариантное определение проекции* rot **a** *в точке M на направление, определяемое заданным вектором* **n**.

Итак, проекция ротора векторного поля на произвольное направление, а значит, и сам rot **a** зависит только от векторного поля **a** и не зависит от выбора системы координат.

Для определения вектора rot **a** вышеуказанным способом достаточно рассмотреть в заданной точке M проекции rot **a** на три произвольных некомпланарных направления. Такими тремя проекциями rot **a** определяется однозначно.

Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

Основные понятия и формулы

---

1. Криволинейные ортогональные координаты. Пусть x, y, z − прямоугольные координаты точки M. Положение точки M, как было отмечено в гл. XII, можно задать также с помощью криволинейных координат. Будем обозначать их q_1, q_2, q_3, а формулы, связывающие криволинейные координаты с прямоугольными, запишем в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\ y = y(q_1, q_2, q_3),\ z = z(q_1, q_2, q_3). \tag{1}$$

При изменении q_1 и фиксированных значениях q_2 и q_3 точка с координатами x, y, z, определяемыми формулами (1), описывает в пространстве некоторую кривую, называемую *координатной линией* q_1. Аналогично определяются координатные линии q_2 и q_3. Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны (т. е. попарно ортогональны касательные к координатным линиям в этой точке).

Элемент dl_1 длины дуги координатной линии q_1 выражается формулой

$$dl_1 = H_1\, dq_1,$$

где

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Аналогично,

$$dl_2 = H_2\, dq_2,\ dl_2 = H_2\, dq_2,$$

где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Величины H_1, H_2, H_3. называются *параметрами Ламэ* или *масштабными коэффициентами* криволинейных координат q_1, q_2, q_3. Они характеризуют в каждой точке пространства изменение dl_1 длины координатной линии в зависимости от изменения dq_i соответствующей криволинейной координаты q_i.

2. Цилиндрические и сферические координаты. Примерами криволинейных ортогональных координат являются известные нам цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ вводятся с помощью соотношений

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi,\ z = z,$$

$$\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty. \tag{2}$$

Параметры Ламэ для цилиндрических координат имеют вид

$$H_1 = 1,\ H_2 = \rho,\ H_3 = 1.$$

Сферические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$ вводятся с помощью соотношений

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,\ y = r \sin \theta \sin \varphi,\ z = r \cos \theta,$$

$$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{2}$$

Параметры Ламэ для сферических координат имеют вид

$$H_1 = 1,\ H_2 = r,\ H_3 = r \sin \theta.$$

3. Операции grad, div, rot, Δ **в криволинейных ортогональных координатах.** Пусть q_1, q_2, q_3 − криволинейные ортогональные координаты точки M. Введем в точке M ортогональный базис, состоящий из трех единичных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, касательных к координатным линиям в точке M и направленных в сторону возрастания q_1, q_2, q_3. Отметим, что при переходе от точки к точке направления векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ изменяются (в отличие от векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$), т. е. базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ зависит от точки M (или, что то же самое, от q_1, q_2, q_3).

Пусть $u(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ − дифференцируемые скалярное и векторное поля. Вектор $\mathbf{a}(M)$ разложим по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в точке M: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$.

Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах имеют следующий вид:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\mathbf{e}_3, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right\},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\,\mathbf{e}_1 & H_2\,\mathbf{e}_2 & H_3\,\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right\}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_3H_1}\left\{\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1H_1) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3H_3)\right\}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1H_1)\right\}\mathbf{e}_3,$$

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}$$