

Площадь поверхности

Основные понятия и теоремы

1. Уравнения поверхности. В § 4 гл. X была рассмотрена поверхность, являющаяся графиком непрерывной функции

$$z = f(x, y), (x, y) \in G. \quad (1)$$

Задание поверхности уравнением (1), а также уравнением

$$x = f(y, z) \quad (1')$$

или уравнением

$$y = f(z, x) \quad (1'')$$

называется *явным*.

Поверхность может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

не разрешенным относительно ни одной из переменных (*неявное* задание). При этом поверхность представляет собой множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2). Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

задает сферу радиуса R с центром в начале координат.

Наконец, поверхность может быть задана *параметрически*:

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in g, \quad (4)$$

где φ, ψ, χ – непрерывные функции в области g . Переменные u и v называются *параметрами*. По формулам (4) каждой точке (u, v) области g ставится в соответствие некоторая точка (x, y, z) трехмерного пространства. Множество этих точек и образует поверхность.

Например, уравнения

$$x = R \sin u \cos v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos u,$$

$$(u, v) \in g = \{(u, v): 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\} \quad (5)$$

задают ту же самую сферу, что и уравнение (3).

Уравнения (4) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{r} = \varphi(u, v) \mathbf{i} + \psi(u, v) \mathbf{j} + \chi(u, v) \mathbf{k}, (u, v) \in g, \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, а $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ – ортогональный базис.

В дальнейшем, рассматривая поверхности, заданные параметрически уравнениями (4), будем считать выполненными следующие условия.

I. Область g ограничена и замкнута; ее границей является кусочно гладкая кривая без самопересечений.

II. Функции φ, ψ и χ непрерывно дифференцируемы (т. е. имеют непрерывные частные производные первого порядка) в области g .

III. Различным внутренним точкам (u, v) области g соответствуют различные точки (x, y, z) поверхности.

Если условие, аналогичное III, выполнено также для граничных точек области g , то поверхность будем называть *простой*. Множество точек поверхности, соответствующих граничным точкам области g , образует в этом случае *границу* (или *край*) поверхности. На рис. 62 изображена часть конической поверхности $x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, (u, v) \in g = \{(u, v) : 0 < a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq \pi\}$, краем которой является замкнутый контур $A'B'C'D'$, соответствующий прямоугольнику $ABCD$ – границе области g . Точки поверхности, не принадлежащие краю, называются ее *внутренними* точками. Если же условие типа III не выполнено для граничных точек области g , то поверхность может не иметь края (в таком случае она называется *замкнутой*). Примером такой поверхности является сфера, заданная уравнениями (5).

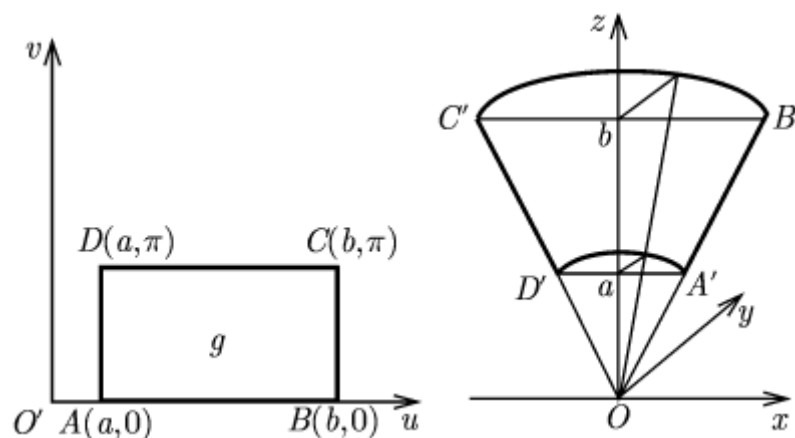


Рис. 62

З а м е ч а н и е . Определение внутренних и граничных точек поверхности можно ввести еще и так: точка M поверхности называется *внутренней*, если существует окрестность точки M такая, что множество точек этой окрестности, не принадлежащих поверхности, является несвязным; точка поверхности, не являющаяся внутренней, называется *граничной*.

2. Понятие гладкой поверхности. Пусть поверхность Φ задана либо явно, либо неявно, либо параметрически. Будем называть поверхность Φ *гладкой*, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая вырезает часть поверхности Φ , допускающую явное представление вида (1) или (1') или (1'') где f – непрерывно дифференцируемая функция.

Из этого определения следует, что в каждой внутренней точке гладкой поверхности существует касательная плоскость и нормаль (см. § 4 гл. X).

Если поверхность Φ задана явно уравнением (1) и функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области G , то поверхность, очевидно, является гладкой. Уравнение касательной плоскости и координаты вектора нормали в данной точке поверхности Φ приведены в § 4 гл. X.

Пусть поверхность Φ задана неявно уравнением (1) и пусть функция $F(x, y, z)$ непрерывно дифференцируема. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности Φ называется *неособой*, если в этой точке $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$. В противном случае точка называется *особой*. Если поверхность не содержит особых точек, то она является гладкой. Уравнение касательной плоскости к поверхности Φ в неособой внутренней точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Вектор

$$\mathbf{N} = \{F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)\} \quad (7)$$

является вектором нормали к поверхности Φ в точке M_0 .

Пусть поверхность Φ задана параметрически уравнениями (4), или, что то же самое, уравнением (6). Точка $M_0(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ называется *неособой* точкой поверхности Φ , если в этой точке векторы

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} \varphi_u(u, v) + \mathbf{j} \psi_u(u, v) + \mathbf{k} \chi_u(u, v),$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{i} \varphi_v(u, v) + \mathbf{j} \psi_v(u, v) + \mathbf{k} \chi_v(u, v),$$

неколлинеарны (линейно независимы). В противном случае точка M_0 называется *особой*.

Простая поверхность, не имеющая особых точек, является гладкой.

Уравнение касательной плоскости к поверхности Φ в неособой внутренней точке $M(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$ имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

где $x_0 = \varphi(u, v)$, $y_0 = \psi(u, v)$, $z_0 = \chi(u, v)$,

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v] = \mathbf{i} A + \mathbf{j} B + \mathbf{k} C$ есть вектор нормали к поверхности Φ в точке M . Векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, отложенные от точки M , лежат в касательной плоскости (рис. 63).

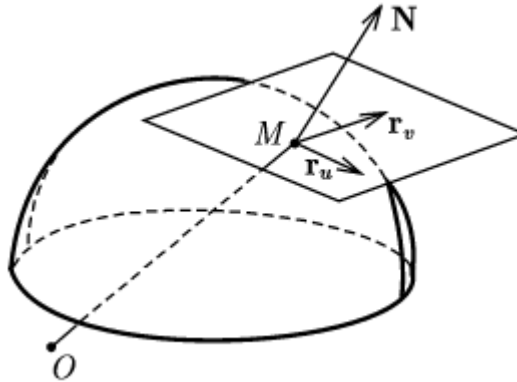


Рис. 63

3. Понятие площади поверхности. Пусть Φ — гладкая ограниченная поверхность. Разобьем ее с помощью кусочно гладких кривых на конечное число n частей Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы каждая часть Φ_i однозначно проектировалась на касательную плоскость, проведенную в любой точке этой части (предполагается, что такое разбиение возможно). На каждой части Φ_i возьмем произвольную точку M_i и проведем через нее касательную плоскость к поверхности. Обозначим через S_i площадь проекции Φ_i на касательную плоскость (эта проекция ограничена кусочно гладкими кривыми и потому квадрируема).

Составим сумму $S(\Phi, M_i) = \sum_{i=1}^n S_i$. Пусть d_i — диаметр Φ_i , $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

Определение. Число S называется *пределом сумм* $S(\Phi_i, M_i)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists d > 0$ такое, что для любого разбиения поверхности Φ , у которого $d < \delta$, и для любого выбора точек M_i выполняется неравенство

$$|S(\Phi_i, M_i) - S| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{d \rightarrow 0} S(\Phi_i, M_i) = S$, то поверхность Φ называется *квадрируемой*, а число S – *площадью поверхности* Φ .

Замечание 1. Поверхность, составленная из нескольких гладких поверхностей, называется *кусочно гладкой*. Если каждая из этих гладких поверхностей квадрируема, то сумма их площадей принимается за площадь *кусочно гладкой* поверхности.

Замечание 2. Определение площади естественным образом распространяется на поверхности, не имеющие касательной плоскости и нормали в конечном числе внутренних точек. Примером такой поверхности является коническая поверхность, которая не имеет касательной плоскости в своей вершине.

4. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла.

Теорема 1. Гладкая параметрически заданная поверхность, не имеющая особых точек, квадрируема, и ее площадь S выражается формулой

$$S = \iint_g \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \quad (9)$$

где A, B и C определяются по формуле (8).

Замечание 1. При наличии конечного числа особых точек формула (9) остается в силе.

Замечание 2. Введем функции

$$\begin{aligned} E = \mathbf{r}_u^2 &= \varphi_u^2(u, v) + \psi_u^2(u, v) + \chi_u^2(u, v), \\ G = \mathbf{r}_v^2 &= \varphi_v^2(u, v) + \psi_v^2(u, v) + \chi_v^2(u, v), \\ F = (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v) &= \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v. \end{aligned} \quad (10)$$

Справедливо равенство

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2, \quad (11)$$

и поэтому формулу (9) можно записать в виде

$$S = \iint_G \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (12)$$

З а м е ч а н и е 3. Поверхность, определенную явно уравнением (1), можно рассматривать как заданную параметрически – роль параметров играют x и y . Параметрические уравнения (4) для такой поверхности можно записать в виде

$$x = u, y = v, z = f(u, v), (u, v) \in G.$$

Если область G удовлетворяет условию I п. 1, а функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области G , то, используя равенство (12), получим формулу для площади поверхности, заданной явно,

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy, \quad (13)$$

Поверхностные интегралы первого рода

Основные понятия и теоремы

1. Определение поверхностного интеграла первого рода. Пусть на квадратуемой поверхности Φ определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем Φ кусочно гладкими

кривыми на n квадратуемых частей: $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$. На каждой части Φ_i выберем произвольную точку M_i и составим *интегральную сумму*

$$I(\Phi, M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i) S_i(\Phi_i),$$

где $S(\Phi_i)$ – площадь Φ_i . Пусть d_i – диаметр Φ_i , $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

О п р е д е л е н и е . Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(\Phi, M_i)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists d > 0$ такое, что для любого разбиения Φ , у которого $d < \delta$, и для любого выбора точек M_i выполняется неравенство

$$|I(\Phi, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Предел I интегральных сумм называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по поверхности Φ и обозначается

$$\iint_{\Phi} f(M) dS$$

или

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS. \quad (1)$$

2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода с помощью двойного интеграла.

Теорема 2. Пусть Φ – гладкая поверхность, не имеющая особых точек, заданная параметрически уравнениями $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, $(u, v) \in g$, и пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на Φ . Тогда существует интеграл (1) и справедливо равенство

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_g f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (2)$$

функции E, G, F переменных u, v определены формулами (10) из § 1.

З а м е ч а н и е 1. Если поверхность Φ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, то имеет место равенство

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (3)$$

З а м е ч а н и е 2. Формулы (2) и (3) остаются справедливыми для кусочно гладкой поверхности.

3. Физические приложения поверхностных интегралов первого рода. Пусть Φ – материальная поверхность с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z) \in \Phi$.

Тогда справедливы следующие формулы:

а) $M = \iint_{\Phi} \rho(x, y, z) dS$ – масса поверхности;

б) $M_{xy} = \iint_{\Phi} z \rho(x, y, z) dS$, $M_{xz} = \iint_{\Phi} y \rho(x, y, z) dS$, $M_{yz} = \iint_{\Phi} x \rho(x, y, z) dS$ – статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz ;

в) $x_0 = \frac{M_{yz}}{M}$, $y_0 = \frac{M_{xz}}{M}$, $z_0 = \frac{M_{xy}}{M}$ – координаты центра тяжести поверхности;

г) $I_x = \iint_{\Phi} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$ – момент инерции поверхности относительно оси Ox ;

д) $I_{yz} = \iint_{\Phi} x^2 \rho(x, y, z) dS$ – момент инерции поверхности относительно плоскости Oyz ;

е) $I_0 = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$ – момент инерции поверхности относительно начала координат;

ж) $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 материальной поверхностью Φ , где

$$F_y = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \quad F_x = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS,$$

$$F_z = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS,$$

$\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $r = |\mathbf{r}|$, γ – гравитационная постоянная.

Поверхностные интегралы второго рода

Основные понятия и формулы

1. Двусторонние и односторонние поверхности. Если поверхность ограничивает некоторое тело, то у нее различают *внешнюю* и *внутреннюю* стороны. Примером такой

поверхности является сфера. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то у нее различают *верхнюю* и *нижнюю* стороны. Указанные поверхности имеют две стороны. Наряду с ними существуют так называемые *односторонние* поверхности. Сформулируем теперь строгие определения.

Если каждой точке M области G поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(M)$, то говорят, что в области G задано *векторное поле*. Векторное поле $\mathbf{a}(M) = \{a_1(M), a_2(M), a_3(M)\}$ называется *непрерывным* в области G , если его координаты – функции $a_1(M), a_2(M), a_3(M)$ – являются непрерывными в области G . Гладкая поверхность Φ в каждой внутренней точке M имеет нормаль $\mathbf{N}(M)$, причем существует окрестность этой точки, вырезающая часть поверхности, на которой поле нормалей непрерывно.

Если можно задать векторное поле нормалей, непрерывное на всей поверхности, то такая поверхность называется *двусторонней*. Поверхность, на которой не существует непрерывного векторного поля нормалей, называется *односторонней*.

Двусторонняя поверхность Φ характеризуется следующим свойством: для любой точки $M \in \Phi$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Φ и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке M направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления (на противоположное) при возвращении в точку M .

На односторонней поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

На каждой двусторонней поверхности можно задать два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению: $\mathbf{N}(M)$ и $-\mathbf{N}(M)$. Выбор одного из этих полей называется выбором *стороны поверхности*. Таким образом, двусторонняя поверхность имеет две стороны.

Двусторонние поверхности называются также *ориентируемыми*, а выбор определенной стороны (выбор поля $\mathbf{N}(M)$ или $-\mathbf{N}(M)$) называется *ориентацией поверхности*. Например, плоскость, сфера, гиперболоиды – двусторонние поверхности, лист Мёбиуса – односторонняя поверхность. На рис. 66 изображен лист Мёбиуса и указан контур, при обходе по которому направление нормали изменяется на противоположное.

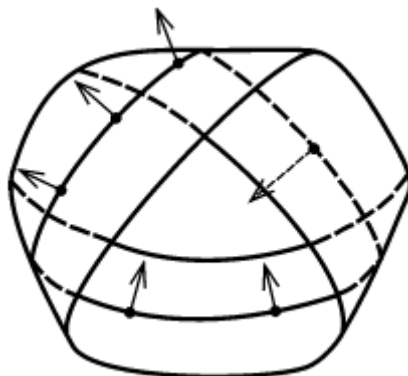


Рис. 66

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, то на верхней стороне поверхности непрерывное поле нормалей можно задать вектор-функцией

$$\mathbf{N}(M) = \{-f_x(M), -f_y(M), 1\}, \quad (1)$$

на нижней стороне – вектор-функцией

$$-\mathbf{N}(M) = \{f_x(M), f_y(M), -1\}. \quad (2)$$

Если гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически, то на одной ее стороне непрерывное поле нормалей можно задать вектор-функцией $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$, а на другой – вектор-функцией $-\mathbf{N} = \{-A, -B, -C\}$.

Понятия двусторонней и односторонней поверхности можно ввести и для кусочно гладких поверхностей. Примером кусочно гладкой двусторонней поверхности является поверхность параллелепипеда.

2. Определение поверхностного интеграла второго рода. Пусть Φ – гладкая или кусочно гладкая ограниченная поверхность. Выберем одну из ее сторон, определяемую полем нормалей $\mathbf{N}(M)$. Пусть $\alpha(M)$, $\beta(M)$, $\gamma(M)$ – углы, которые вектор $\mathbf{N}(M)$ составляет с осями координат, и пусть на поверхности Φ заданы три функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$.

О п р е д е л е н и е . Поверхностные интегралы первого рода

$$I_1 = \iint_{\Phi} P(M) \cos \alpha(M) dS, I_2 = \iint_{\Phi} Q(M) \cos \beta(M) dS, \quad (3)$$

$$I_3 = \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS$$

называются *поверхностными интегралами второго рода* соответственно от функций P , Q , R по выбранной стороне поверхности Φ .

Они обозначаются также следующим образом:

$$I_1 = \iint_{\Phi} P(M) dy dz, I_2 = \iint_{\Phi} Q(M) dz dx, I_3 = \iint_{\Phi} R(M) dx dy.$$

Такие обозначения связаны с тем, что элемент площади $dy dz$ можно рассматривать как площадь проекции элемента поверхности с площадью dS на координатную плоскость Oyz , т. е. $dy dz = dS \cos \alpha$ (или $dy dz = -dS \cos \alpha$ в зависимости от знака $\cos \alpha$) и, аналогично, $dz dx = dS \cos \beta$, $dx dy = dS \cos \gamma$.

Из определения следует, что поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности. Если взять другую сторону поверхности, то вектор $\mathbf{N}(M)$ изменит направление на противоположное; поэтому направляющие косинусы вектора $\mathbf{N}(M)$, а следовательно, и интегралы I_1, I_2, I_3 изменят знак.

Сумма

$$I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{\Phi} P(M) dy dz + Q(M) dz dx + R(M) dx dy \quad (4)$$

называется *общим поверхностным интегралом второго рода*.

3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода с помощью двойного интеграла. Поверхностные интегралы второго рода (3) по выбранной стороне поверхности Φ являются поверхностными интегралами первого рода соответственно от функций $P(M) \cos \alpha(M)$, $Q(M) \cos \beta(M)$, $R(M) \cos \gamma(M)$. Поэтому на основании теоремы 2, считая, что функции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ непрерывны на Φ , получаем формулы для вычисления поверхностных интегралов второго рода.

Пусть гладкая двусторонняя поверхность Φ задана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in g,$$

и не имеет особых точек. Выберем ту сторону поверхности, на которой $\mathbf{N}(M) = \{A, B, C\}$. Тогда, пользуясь формулой (11) из § 1, находим

$$\cos \alpha(M) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \beta(M) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\cos \gamma(M) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

По формуле (2) из § 2 получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Phi} P(M) \cos \alpha(M) dS = \\ &= \iint_g P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} \sqrt{EG - F^2} du dv = \end{aligned}$$

$$= \iint_g P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) A(u, v) du dv. \quad (5)$$

Аналогично,

$$I_2 = \iint_{\Phi} Q(M) \cos \beta(M) dS = \iint_g Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) B(u, v) du dv, \quad (6)$$

$$I_3 = \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS = \iint_g R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) C(u, v) du dv. \quad (7)$$

Если гладкая поверхность Φ задана уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, и выбрана верхняя

сторона поверхности, т. е. $\mathbf{N}(M) = \{-f_x(M), -f_y(M), 1\}$, то $\cos \gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$, и по формуле (3) из § 2 находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS = \\ &= \iint_G R(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \\ &= \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Для нижней стороны поверхности имеем $\cos \gamma(M) = -\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$, откуда

$$I_3 = - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (9)$$

Аналогично получаются формулы для вычисления интегралов I_1 и I_2 , если поверхность Φ задана соответственно уравнением $x = x(y, z)$, $(y, z) \in G$, и уравнением $y = y(z, x)$, $(z, x) \in G$.

4. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода. Запишем общий поверхностный интеграл второго рода (4) в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} [P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \cos \beta(M) + R(M) \cos \gamma(M)] dS. \quad (10)$$

Направляющие косинусы $\cos \alpha(M)$, $\cos \beta(M)$, $\cos \gamma(M)$ являются координатами единичного вектора нормали $\mathbf{n}(M)$ к поверхности Φ в точке M . Если ввести вектор $\mathbf{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$, то подынтегральное выражение будет представлять собой скалярное произведение векторов $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{n}(M)$, а интеграл (10) можно записать в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \quad (11)$$

Интеграл (11) называется *поток вектора (векторного поля)* через выбранную сторону поверхности Φ (определяемую вектором $\mathbf{n}(M)$). В частности, если $\mathbf{a}(M) = \mathbf{v}(M)$ – скорость

течения жидкости в точке M , то $\Pi = \iint_{\Phi} (\mathbf{v}\mathbf{n}) dS$ представляет собой поток жидкости через выбранную сторону поверхности (см. также § 2 из гл. XV).

Формула Стокса

Основные понятия и теоремы

1. Согласование ориентации поверхности с направлением обхода ее границы. Пусть Φ – ориентированная поверхность, ограниченная замкнутым контуром L . Введем *положительное направление обхода контура, согласованное с ориентацией поверхности*: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (т. е. направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали), то при обходе контура L в положительном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 67).

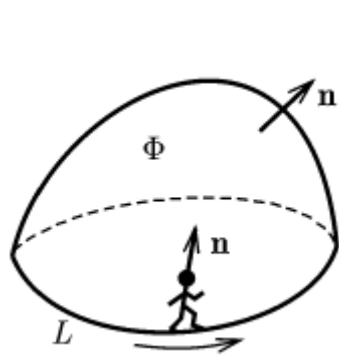


Рис. 67

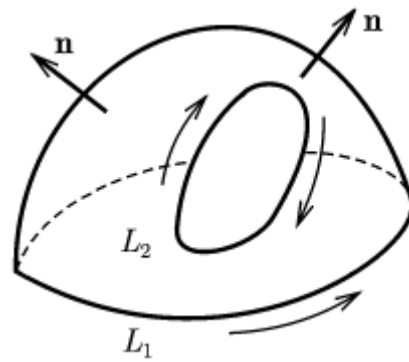


Рис. 68

Если граница поверхности состоит из нескольких замкнутых контуров, то для каждого из них положительное направление обхода определяется таким же образом (рис. 68).

Поверхность Φ называется *хуз-проектируемой*, если она однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$. Такую поверхность можно задать с помощью любого из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} z &= z(x, y), & (x, y) &\in G_1; \\ x &= x(y, z), & (y, z) &\in G_2; \\ y &= y(z, x), & (z, x) &\in G_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Примером такой поверхности является часть плоскости, изображенная на рис. 69.

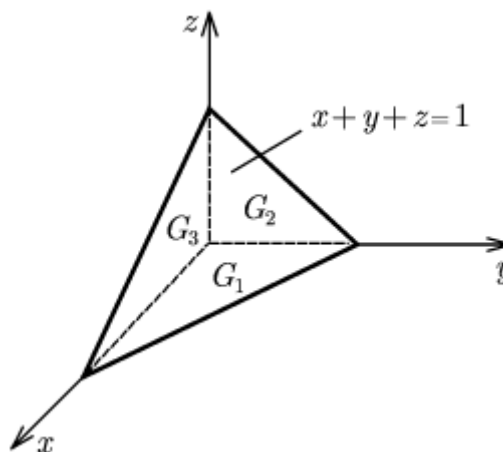


Рис. 69

2. Формула Стокса.

Теорема 3. Пусть гладкая хуз-проектируемая ориентированная поверхность Φ ограничена кусочно гладким контуром L и расположена внутри области G , в которой функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Тогда справедлива формула

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2)$$

где контур L обходится в положительном направлении.

Эта формула называется *формулой Стокса*. Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру L через поверхностный интеграл второго рода по поверхности Φ , ограниченной контуром L .

З а м е ч а н и е 1. Формула Стокса остается справедливой, если поверхность Φ не является x - y -проектируемой, но ее можно разбить кусочно гладкими кривыми на конечное число x - y -проектируемых частей.

З а м е ч а н и е 2. Формула Стокса справедлива и в том случае, когда поверхность Φ является плоской областью, параллельной какой-либо координатной плоскости (такая поверхность не является x - y -проектируемой). Для такой поверхности формула Стокса переходит в формулу Грина. Например, если поверхность Φ параллельна плоскости Oxy ,

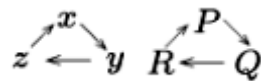
то вектор нормали $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$, $\oint_L R dz = 0$, и из равенства (2) получаем формулу Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

З а м е ч а н и е 3. Если граница поверхности Φ состоит из нескольких контуров, то формула Стокса остается в силе. При этом в левой части формулы (2) нужно записать сумму интегралов по всем контурам, пробегаемым в положительном направлении.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что третье слагаемое в правой части формулы Стокса представляет собой правую часть формулы Грина. Два первых получаются из него

циклической перестановкой переменных x, y, z и функций P, Q, R :



3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве. Для криволинейных интегралов второго рода в пространстве справедлива теорема об условиях независимости их от пути интегрирования, аналогичная теореме 6 из гл. XIII. В этой теореме будет использовано понятие поверхностно односвязной области.

О п р е д е л е н и е. Трехмерная область G называется поверхностно односвязной, если для любого замкнутого контура L , лежащего в G , внутри области G найдется поверхность, ограниченная контуром L .

Примерами поверхностно односвязных областей являются: шар, область, заключенная между концентрическими сферами; примером поверхностно неодносвязной области служит тор.

Теорема 4. 1°. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в области G . Тогда следующие три условия эквивалентны (т. е. из каждого из них следуют два другие).

I. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура L , расположенного в области G , справедливо равенство

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

II. Для любых двух точек A и B области G криволинейный интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G .

III. Выражение $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ является полным дифференциалом, т. е. в области G существует функция $u(M) = u(x, y, z)$ такая, что

$$du = P dx + Q dy + R dz.$$

При этом для любой кусочно гладкой кривой AB , лежащей в G , имеет место равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A). \quad (3)$$

2°. Пусть G – поверхностно односвязная область, а функции P, Q, R в области G имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда каждое из условий I–III эквивалентно следующему условию.

IV. В области G выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е . Функция $u(x, y, z)$ из условия III может быть найдена по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz =$$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C. \quad (5)$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) – какая-нибудь фиксированная точка, C – произвольная постоянная, и в качестве кривой интегрирования взята ломаная, отрезки которой параллельны осям координат

Формула Остроградского-Гаусса

Основные понятия и теоремы

Пусть функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области D и $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$. Область $G = \{(x, y, z): (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ называется *z-цилиндрической* (рис. 73). Аналогично определяются *x-цилиндрическая* и *y-цилиндрическая* области. Область G называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число как *x-цилиндрических*, так и *y-цилиндрических* и *z-цилиндрических* областей.

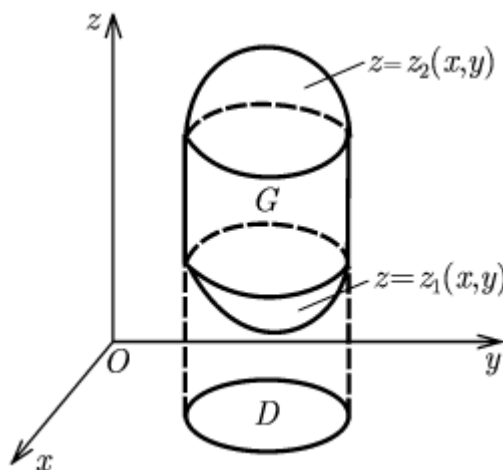


Рис. 73

Теорема 5. Пусть функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой замкнутой области G , ограниченной кусочно гладкой поверхностью Φ .

Тогда справедлива формула

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (1)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Формула (1) называется *формулой Остроградского-Гаусса*.

С л е д с т в и е . Если функции P, Q, R таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то интеграл в левой

части равенства (1) равен объему области G , т. е. $\iiint_G dx dy dz = V(G)$, и из формулы (1) получается формула для вычисления объема области G с помощью интеграла по ее поверхности

$$V(G) = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (2)$$

З а м е ч а н и е . Формула Остроградского-Гаусса остается справедливой для любой ограниченной области G , граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких поверхностей.