

Интегрируемость функции (по Риману) и определенный интеграл

Основные понятия и теоремы

1. Интегральные суммы и определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b]$ (где $a < b$).

Произвольное разбиение промежутка $[a, b]$

точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

на n элементарных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

будем обозначать символом $T[a, b]$ или просто T .

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем на каждом элементарном промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму:

$$J(x, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Число $J(x_i, \xi_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению $T[a, b]$

и данному выбору точек ξ_i на промежутках $[x_{i-1}, x_i]$.

Введем обозначение

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Определение. Число J называется *пределом интегральных сумм* $J(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для всякого разбиения $T[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $|J(x_i, \xi_i) - J| < \varepsilon$

при любом выборе промежуточных точек ξ_i на $[x_{i-1}, x_i]$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой (по Риману)*

на промежутке $[a, b]$, если существует $\lim_{\Delta \rightarrow 0} J(x_i, \xi_i) = J$.

При этом число J называется *определенным интегралом*

от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ и обозначается так:

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta \xi_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Определенный интеграл	
Область определения функции Ω	$M \in R_1$ $\Omega: \{\forall x \in [a, b]\}$ отрезок оси OX
Элемент разбиения $\Delta \Omega$; точки M_i	$\Delta \Omega = \Delta x$ $M_i = \xi_i \in \Delta x_i$
Определение, обозначение интеграла	$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta \xi_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$
Геометрический смысл.	S — площадь криволинейной трапеции $\int_a^b f(x) dx = S$; $f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$

2. Суммы Дарбу. Пусть $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$. Для произвольного

разбиения $T[a, b]$ введем обозначения $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ и составим суммы:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Числа s и S называются *нижней* и *верхней суммами* (суммами Дарбу), соответствующими данному разбиению $T[a, b]$.

Очевидно, что для фиксированного разбиения $T[a, b]$ и любого выбора промежуточных точек на этом разбиении $s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S$.

Приведем свойства сумм Дарбу.

1°. Для любого фиксированного разбиения

$$s = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}, S = \sup_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi_i}} \{I(x_i, \xi_i)\}.$$

2°. Если разбиение T_2 получено из разбиения T_1 добавлением нескольких новых точек (т. е. получено измельчением T_1), то нижняя сумма s_2 разбиения T_2 не меньше нижней суммы s_1 разбиения T_1 а верхняя сумма S_2 разбиения T_2 не больше верхней суммы S_1 разбиения T_1 : $s_1 \leq s_2, S_2 \leq S_1$.

3°. Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

4°. Пусть $\{s\}$ и $\{S\}$ — множества всевозможных нижних и верхних сумм для любых разбиений $[a, b]$. Числа

$$\overline{I} = \inf_{\text{по всем разбиениям}} \{S\}, \underline{I} = \sup_{\text{по всем разбиениям}} \{s\}$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Дарбу*.

Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего: $\underline{I} \leq \overline{I}$.

5°. Лемма Дарбу:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \overline{I}, \lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \underline{I}.$$

3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Теорема 1. Для того чтобы ограниченная на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на промежутке $[a, b]$ функция была интегрируемой на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение $T[a, b]$ (хотя бы одно), для которого

$$S - s < \varepsilon. \quad (1)$$

Напомним, что число $\omega_i = M_i - m_i$ называется *колебанием функции*

на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$.

Условие (1) можно записать в виде

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

4. Некоторые классы интегрируемых функций.

Теорема 3. *Непрерывная на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

Следствие. *Всякая элементарная функция интегрируема на любом промежутке, целиком лежащем в области определения этой функции (так как она непрерывна на этом промежутке).*

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ ограничена на промежутке $[a, b]$. Если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва $f(x)$ и имеющих сумму длин, меньшую ε , то $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$.*

Следствие. *Кусочно непрерывная функция (т. е. имеющая на промежутке $[a, b]$ конечное число точек разрыва I рода) интегрируема на этом промежутке.*

З а м е ч а н и е . Если выполнены условия теоремы 4, то значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$

не зависит от значений $f(x)$ в точках разрыва. Поэтому часто ставят и решают задачу вычисления интеграла от функции, которая не определена либо в конечном числе точек промежутка $[a, b]$, либо на множестве точек, которое можно покрыть конечным числом интервалов сколь угодно малой длины. При этом считают, что функция $f(x)$ доопределена в этих точках произвольно, но остается, конечно, ограниченной на промежутке $[a, b]$ и, следовательно, интегрируемой.

Например, строго говоря, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad (2)$$

не существует, так как в точке $x = 0$ функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена. Однако интеграл $\int_0^1 f(x) dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x = 0, \\ C & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

(C – произвольное число), существует и не зависит от выбора C . Поэтому считают, что

интеграл (2) также существует и равен $\int_0^1 f(x) dx$.

Теорема 5. *Монотонная на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.*

Свойства определенного интеграла

Основные понятия и теоремы

1. Свойства определенного интеграла.

1°. По определению $\int_a^a f(x) dx = 0$.

2°. По определению $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

3°. Линейность интеграла. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, α и β – любые вещественные числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

4°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$$

5°. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

6°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема также на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$. $\square$

7°. *Аддитивность интеграла.* Если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема также на $[a, b]$, причем

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b .

В дальнейших свойствах 8°–10° полагаем $a < b$.

8°. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

9°. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

10°. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$, то $\exists K > 0$ такое, что $\int_a^b f(x) dx \geq K$.

2. Формулы среднего значения.

Теорема 6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$) $\forall x \in [a, b]$, $M =$

$$\sup_{[a,b]} f(x), m = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Тогда существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (1)$$

Следствие 1. Если в формуле (1) положить $g(x) = 1$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \mu (b - a), \mu \in [m, M]. \quad (2)$$

Число $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется *средним значением функции* $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 6 и функция $f(x)$ непрерывна, то $\exists \xi \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (3)$$

Следствие 3. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists \xi \in [a, b]$ такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a).$$

Формула Ньютона-Лейбница

Основные понятия и теоремы

1. Первообразная непрерывной и кусочно непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема 7. Непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (1)$$

З а м е ч а н и е . Интеграл с переменным верхним пределом определен для любой интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$. Однако для того чтобы функция $F(x)$ вида (1) оказалась первообразной для $f(x)$, существенно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна.

Приведем пример, показывающий, что интегрируемая функция может не иметь первообразной. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad x \in [-1, 1].$$

Эта функция интегрируема на сегменте $[-1, 1]$, поскольку является кусочно непрерывной, но, как уже отмечалось в гл. V, не имеет первообразной. В самом деле, любая функция вида

$$f(x) = \begin{cases} -x + C_1 & \text{при } x < 0, \\ x + C_2 & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные числа, имеет производную, равную $\operatorname{sgn} x$, при всех $x \neq 0$. Но даже "самая хорошая" из этих функций – непрерывная функция $F(x) = |x| + C$ (если $C_1 = C_2 = C$) – не имеет производной при $x = 0$. Поэтому функция $\operatorname{sgn} x$ (и вообще всякая кусочно непрерывная функция) не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку разрыва.

Дадим теперь расширенное определение первообразной, пригодное и для кусочно непрерывных функций.

О п р е д е л е н и е . Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если:

1°) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$;

2°) $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$.

З а м е ч а н и е . Непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ является частным случаем кусочно непрерывной ("кусочек ее непрерывности" совпадает со всем сегментом $[a, b]$). Поэтому для непрерывной функции расширенное определение первообразной совпадает со старым, так как $F(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$, а непрерывность $F(x)$ следует из ее дифференцируемости.

Приведем пример функции, имеющей первообразную в "новом" смысле и не имеющей в "старом". Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 1]$ в "старом" смысле не имела первообразной. В "новом" смысле ее первообразной является функция $F(x) = |x|$, поскольку она непрерывна на $[-1, 1]$ и $F'(x) = f(x)$ для $x \neq 0$, т. е. всюду, кроме точки разрыва, $x = 0$.

Ценность расширенного определения первообразной ясна из следующего результата, сохраняющего для кусочно непрерывных функций теорему 7 с "новым" определением первообразной.

Теорема 8. *Кусочно непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную на этом сегменте в смысле расширенного определения. Одной из первообразных является*

функция $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

2. Формула Ньютона—Лейбница.

Теорема 9. *Для кусочно непрерывных функций справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$ в смысле расширенного определения.

Например, $\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = |x| \Big|_{-1}^2 = 2 - 1 = 1$.

3. Метод замены переменной.

Теорема 10. Пусть:

- 1) $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$;
- 2) $x = g(t)$ определена и непрерывна вместе с производной на $[\alpha, \beta]$, где $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ и $a \leq g(t) \leq b$.

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$.

4. Метод интегрирования по частям.

Теорема 11. Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Несобственные интегралы I и II рода

Основные понятия и теоремы

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a < x < \infty$ и интегрируема на любом сегменте, лежащем целиком внутри данного интервала.

Определение 1. Несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на

промежутке $[a; +\infty)$ называют символ $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Если существует $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$, то несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называют

сходящимся и в этом случае $\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$, т.е. символ $\int_a^{\infty} f(x) dx$ имеет числовое

значение, равное $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$.

В противном случае несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называют расходящимся и символ $\int_a^{\infty} f(x) dx$ не имеет числового значения.

Аналогично определяется $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^a f(x) dx$.

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на конечном промежутке $[a; b]$, но неограниченную на этом промежутке. Пусть на любом промежутке $[a; b - \varepsilon]$ функция ограничена и интегрируема, но $f(x)$ неограниченна на каждом промежутке $[b - \varepsilon; b]$. Точку b назовем особой точкой функции $f(x)$.

Определение 2. Несобственным интегралом второго рода называется

$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ и обозначается он как обычно, $I = \int_a^b f(x) dx$.

Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, если

предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

Для вычисления несобственных интегралов I рода можно применять формулу Ньютона-Лейбница следующим образом: сначала вычислить по этой формуле интеграл по конечному промежутку, а потом перейти к пределу. Пусть у функции $f(x)$ существует

первообразная $F(x)$ на всем промежутке интегрирования и существует $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

Тогда формула Ньютона-Лейбница записывается следующим образом для интегралов I рода:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a), \text{ где } F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$$

Для интегралов II рода с особой точкой b формула Ньютона-Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ где } F(b) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon).$$

Для несобственных интегралов I и II рода можно применять формулу замены переменной и интегрирования по частям так же, как и для определенного интеграла. Формула метода интегрирования по частям для интеграла I рода записывается как

$$\int_a^{+\infty} f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x) g(x) dx, \text{ где бесконечная граница изменения переменной понимается в смысле предела.}$$

Рассмотрим два эталонных интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha}$, где $a > 0$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)_a^A, & \alpha \neq 1, \\ (\ln x)_a^A, & \alpha = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \alpha \neq 1, \\ (\ln A - \ln a), & \alpha = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha > 1, \\ \mathbb{A}, & \alpha \leq 1, \end{cases}$$

а)

интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ является сходящимся при $a > 1$ и расходящимся при $a \leq 1$.

$$\text{Если } a > 1, \text{ то } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_\delta^a \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \begin{cases} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right)_\delta^a, & \alpha \neq 1; \\ (\ln x)_\delta^a, & \alpha = 1; \end{cases} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} (\delta^{-\alpha+1} - a^{-\alpha+1}), & \alpha \neq 1, \\ \ln a - \ln \delta, & \alpha = 1. \end{cases}$$

б)

Очевидно, что интеграл сходится при $a < 1$ и расходится при $a \geq 1$.

Для неотрицательных функций можно применять признаки сравнения.

Теорема 1. Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $x \geq a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемые функции

на любом сегменте $[a; A]$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Следствия. 1) $0 \leq f(x) \leq \frac{c}{x^\alpha}$ при $x \geq a$ $c = \text{const} > 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится при $a > 1$, если $f(x) \geq \frac{c}{x^\alpha}$ то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится при $a \geq 1$.

2) $f(x) \geq 0$ и $g(x) > 0$ при $x \geq a$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, то интегралы $\int_a^\infty f(x) dx$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$ при $a < x \leq b$, то из сходимости $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x) dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x) dx$.

Следствие. Если $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ при $x \in (a; b]$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0$, то интегралы $\int_a^b g(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Основные понятия и теоремы

Теорема 1. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

I рода. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists A > a: \forall A', A'': A' > A, A'' > A$, выполнялось неравенство $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \varepsilon$.

Теорема 2. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

II рода. Для того чтобы несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists$ такое $\delta > 0$, что $\forall \delta', \delta'': 0 < \delta' < \delta, 0 < \delta'' < \delta$, выполнялось условие: $\left| \int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x) dx \right| < \varepsilon$.

Эти теоремы редко используются при решении задач, но незаменимы при доказательстве различных утверждений.

Для исследования сходимости интегралов от знакоопределенных функций чаще всего используются следующие признаки сравнения.

Теорема 3. Если подынтегральная функция в несобственном интеграле I рода представляется как $\frac{C}{x^a}$, $C \neq 0$ при $x \rightarrow \infty$,

то интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится при $a > 1$ и расходится при $a \leq 1$.

Теорема 4. Если подынтегральная функция в несобственном интеграле II рода

представляется как $\frac{C}{(b-x)^a}$, $C \neq 0$, где b – особая точка, то $\int_a^b f(x) dx$ сходится при $a < 1$ и расходится при $a \geq 1$.

Если подынтегральная функция не является знакоопределенной, то для исследования сходимости несобственных интегралов I рода применяется следующая теорема.

Теорема 5. Признак Дирихле сходимости несобственного

интеграла I рода. Рассмотрим $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$.

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном промежутке полупрямой $[a,$

$A]$ ($A > a$), и интеграл $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq K$, $K = \text{const}$, $a < A < \infty$.

2. Пусть функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Тогда интеграл $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ сходится.

Отметим, что признак Дирихле дает только достаточное условие сходимости несобственного интеграла. Расходимость интеграла с помощью одного лишь признака Дирихле доказать невозможно

Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы

Основные понятия и теоремы

Определение 1. Несобственный интеграл первого рода $\int_a^\infty f(x) dx$ называется

сходящимся абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)| dx$.

Если интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится, а интеграл $\int_a^\infty |f(x)| dx$ расходится, то интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ называется сходящимся условно.

Теорема 1. Если $\int_a^\infty |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x) dx$ также сходится.

Таким образом, если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Определение 2. Несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x) dx$, где b – особая точка, называется сходящимся абсолютно, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$. Если сходится интеграл $\int_a^b f(x) dx$, а интеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ расходится, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется сходящимся условно.

Теорема 2. Если сходится несобственный интеграл второго рода $\int_a^b |f(x)| dx$, где b – особая точка, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ также сходится.

Исследование на абсолютную и условную сходимость проводится по следующей схеме.

1. Начинаем с исследования сходимости интеграла $\int_a^\infty |f(x)| dx$ (или $\int_a^b |f(x)| dx$ для интегралов второго рода). Если этот интеграл сходится, то исследование окончено, интеграл сходится абсолютно.
2. Если интеграл $\int_a^\infty |f(x)| dx$ (или $\int_a^b |f(x)| dx$ для интегралов второго рода) расходится, то исследуется сходимость $\int_a^\infty f(x) dx$ (или $\int_a^b f(x) dx$). Если этот интеграл сходится, то имеет место условная сходимость.
3. В противном случае интеграл является расходящимся

Вычисление длин плоских кривых

Основные понятия и формулы

1. Длина кривой. Рассмотрим на плоскости кривую L , заданную параметрически:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции, причем различным значениям $t \in [\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки (x, y) (т. е. нет кратных точек). Такую кривую назовем *простой (плоской) незамкнутой кривой*.

Если точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая L называется *простой замкнутой кривой*.

Пусть L – простая (замкнутая или незамкнутая) кривая, заданная уравнениями (1).

Рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$.

Ему соответствует разбиение кривой L точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$, где $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Впишем в кривую L ломаную $AM_1M_2\dots B$. Обозначим длину ломаной через

$$l(M_i) \text{ и положим } \Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

Определение. Число l называется *пределом длин ломаных* $l(M_i)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, у которого $\Delta t \rightarrow 0$, выполняется неравенство $0 \leq l - l(M_i) < \varepsilon$.

Определение. Если существует предел длин ломаных при $\Delta t \rightarrow 0$, то кривая L называется *спрямляемой*, а число l – *длиной кривой* L (или *длиной дуги кривой* L).

2. Длина кривой, заданной параметрически.

Теорема 12. Пусть простая кривая L задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные. Тогда кривая L спрямляема, а ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (2)$$

Функция

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (3)$$

называется *переменной дугой*.

3. Длина кривой в декартовых координатах. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, причем функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (4)$$

4. Длина кривой в полярных координатах. Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, причем функция $r(\varphi)$ имеет на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Если кривая задана уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r_1 \leq r \leq r_2$, причем функция $\varphi(r)$ имеет на сегменте $[r_1, r_2]$ непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2(r)} dr.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Основные понятия и формулы

1. Площадь плоской фигуры. *Плоской фигурой* будем называть любое ограниченное множество точек плоскости.

Пусть в данную фигуру вписана многоугольная фигура и около данной фигуры описана многоугольная фигура, т. е. фигура, состоящая из конечного числа треугольников.

Множество площадей всех вписанных многоугольных фигур ограничено сверху (площадью любой описанной фигуры), а множество площадей всех описанных многоугольных фигур ограничено снизу (например, нулем).

О п р е д е л е н и е . Плоская фигура называется *квадрируемой*, если точная верхняя грань $\overline{P}$ множества площадей всех вписанных многоугольных фигур равна точной нижней грани $\underline{P}$ множества площадей всех описанных многоугольных фигур.

Число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется *площадью плоской фигуры* (по Жордану).

Теорема 13 (достаточное условие квадратуемости). *Для того чтобы плоская фигура была квадратуемой, достаточно, чтобы ее граница была спрямляемой кривой.*

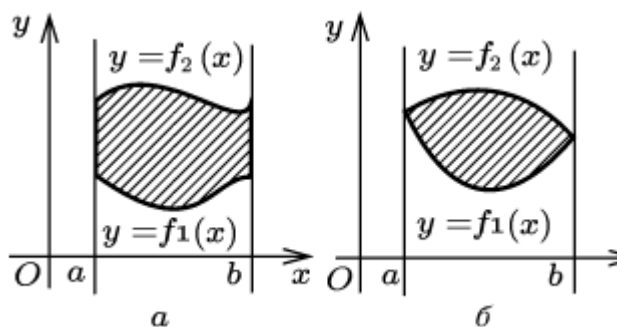


Рис. 17

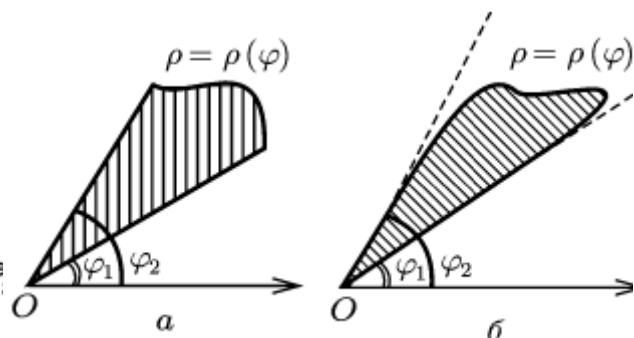


Рис. 18

2. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах. Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (где $y_1(x) \leq y_2(x)$), и двумя отрезками прямых $x = a$, $x = b$ (рис. 17, а). Отрезки прямых могут вырождаться в точку (рис. 17, б). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (1)$$

3. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания ее границы. Пусть граница плоской фигуры G – простая замкнутая кривая, заданная параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leq t \leq T$, причем точка $(\varphi(t), \psi(t))$ при изменении t от 0 до T пробегает границу G так, что фигура G остается слева от движущейся точки. Тогда площадь фигуры G может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$S = - \int_0^T \psi(t) \varphi'(t) dt, \quad (2)$$

$$S = \int_0^T \varphi(t) \psi'(t) dt, \quad (3)$$

$$S = 1/2 \int_0^T [\varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t)] dt, \quad (4)$$

4. Площадь плоской фигуры в полярных координатах. Пусть плоская фигура представляет собой криволинейный сектор, ограниченный непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$, и отрезками лучей $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (рис. 18, а). Отрезки лучей могут вырождаться в точку O (рис. 18, б). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi, \quad (5)$$

Вычисление объемов тел

Основные понятия и формулы

1. Объем тела (по Жордану). *Телом* будем называть любое ограниченное множество точек пространства.

Пусть в данное тело вписан многогранник и около данного тела описан многогранник, т. е. тело, состоящее из конечного числа треугольных пирамид.

Множество объемов всех вписанных многогранников ограничено сверху (объемом любого описанного многогранника), а множество объемов всех описанных многогранников ограничено снизу (например, нулем).

О п р е д е л е н и е . Тело называется *кубируемым*, если точная верхняя грань $\overline{V}$ множества объемов всех вписанных многогранников равна точной нижней грани $\underline{V}$ множества объемов всех описанных многогранников.

Число $V = \underline{V} = \overline{V}$ называется *объемом тела* (по Жордану).

2. Объем тела с известными поперечными сечениями. Пусть каждое сечение кубируемого тела плоскостью $x = \text{const}$ есть квадрируемая фигура, причем ее площадь $S(x)$ является непрерывной функцией x ($a \leq x \leq b$). Тогда объем этого тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

В частном случае, когда тело получено вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

Физические приложения определенного интеграла

Основные понятия и формулы

1. Вычисление массы плоской кривой. Пусть простая кривая L задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, и пусть $\rho(x, y)$ — линейная плотность массы в точке $(x, y) \in L$. Тогда масса кривой L вычисляется по формуле

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Пусть простая кривая задана уравнением в декартовых координатах $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда масса кривой L вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x, f(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

В частности, при $\rho \equiv 1$ числовое значение массы совпадает с длиной кривой.

2. Вычисление моментов и координат центра тяжести плоской кривой. Статические моменты (или моменты первого порядка) кривой L относительно координатных осей в случае постоянной линейной плотности $\rho \equiv 1$ (геометрические моменты) вычисляются по следующим формулам ($x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, — уравнения кривой):

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{момент относительно оси } Ox).$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \text{ (момент относительно оси } Oy).$$

Если кривая задана в декартовых координатах: $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Координаты x_0 и y_0 центра тяжести кривой L вычисляются по формулам

$$x_0 = M_y/l, \quad y_0 = M_x/l,$$

где l – длина кривой L .

Моменты инерции (или моменты второго порядка) кривой L относительно координатных осей ($\rho \equiv 1$) вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \text{ (относительно оси } Ox),$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \text{ (относительно оси } Oy),$$

или (в декартовых координатах)

$$I_x = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

3. Вычисление моментов и координат центра тяжести плоской фигуры. Статические моменты фигуры G , ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $a \leq x \leq b$ (где $f_1(x) \leq f_2(x)$), и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, в случае постоянной поверхностной плотности $\rho \equiv 1$ вычисляются по формулам

$$M_x = 1/2 \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \text{ (относительно оси } Ox), \tag{1}$$

$$M_y = \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx \text{ (относительно оси } Oy). \quad (2)$$

Координаты x_0 и y_0 центра тяжести фигуры вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{S}, y_0 = \frac{M_x}{S}, \quad (3)$$

где S – площадь фигуры G .

Моменты инерции фигуры G относительно координатных осей $\rho \equiv 1$ вычисляются по формулам

$$I_x = 1/3 \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \text{ (относительно оси } Ox),$$

$$I_y = \int_a^b x^2[f_2(x) - f_1(x)] dx \text{ (относительно оси } Oy).$$