Криволинейные интегралы первого рода

Основные понятия и теоремы

1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть кривая L на координатной плоскости Oxy задана параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta. \tag{1}$$

Напомним, что L называется простой (плоской) незамкнутой кривой, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и различным значениям параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$ соответствуют различные точки $M(\varphi(t), \psi(t))$. Если точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ совпадает с точкой $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, а остальные точки не являются кратными, то L называется простой замкнутой кривой. Простая кривая L называется спрямляемой, если существует предел длин ломаных, вписанных в кривую, при $\Delta t \to 0$ (этот предел называется длиной кривой L). Аналогичные определения имеют место для пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями в координатном пространстве $Oxyz$.

Пусть L − простая, спрямляемая (замкнутая или незамкнутая) кривая, заданная уравнениями (1), и пусть на кривой L определена функция $f(x, y)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьется на n частей точками $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Обозначим через Δl_k длину дуги $M_{k-1}M_k$, выберем на каждой дуге $M_{k-1}M_k$ некоторую точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим интегральную сумму

$$I(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta l_k.$$

Пусть $\Delta l = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$.

О п р е д е л е н и е . Число I называется *пределом интегральных сумм* при $\Delta l \to 0$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек N_k выполняется неравенство

$$|I(M_k, N_k) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_k, N_k) = I$, то число I называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по кривой L и обозначается

$$\int_L f(x, y)\, dl. \tag{2}$$

Если кривая L − незамкнутая и точки A и B − ее концы, то криволинейный интеграл первого рода обозначается также следующим образом: $\int_{AB} f(x, y)\, dl$.

Из определения следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от A к B или от B к A) пробегается кривая L, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{BA} f(x, y)\, dl.$$

Если $f(x, y) = 1$, то $\int_{AB} dl$ равен длине l кривой AB: $\int_{AB} dl = l$.

Аналогично вводится криволинейный интеграл первого рода для пространственной кривой L, заданной параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t) \alpha \le t \le \beta. \tag{3}$$

2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью определенного интеграла. Простая кривая L, заданная уравнениями (1), называется *гладкой* (*кусочно гладкой*), если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные (кусочно непрерывные) производные, одновременно не обращающиеся в нуль на $[\alpha, \beta]$ (на $[\alpha, \beta]$, за исключением конечного числа точек). Функция $f(M) = f(x, y)$, определенная на кривой L, называется *непрерывной вдоль кривой* L, если $\forall\ M_0 \in L$ $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in L}} f(M) = f(M_0)$.

Если это условие выполнено в каждой точке кривой, за исключением конечного числа точек, в которых функция имеет разрывы первого рода, то функция $f(M)$ называется *кусочно непрерывной вдоль кривой* L.

Т е о р е м а 1. *Если L − кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями* (1), *и функция $f(x, y)$ кусочно непрерывна вдоль кривой L, то существует криволинейный интеграл* (2) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\ \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{4}$$

З а м е ч а н и е . Предположим, что $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой L. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то существует интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{5}$$

2°. Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\varphi_1, \varphi_2]$, то существует интеграл (2) и имеет место равенство

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d. \tag{6}$$

3°. Для гладкой пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями (3), справедлива формула

$$\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\ \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \tag{7}$$

4°. Криволинейные интегралы первого рода обладают свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла: линейность; аддитивность; модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции. Справедлива также формула среднего значения.

3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода. Пусть L − материальная плоская кривая с линейной плотностью $\rho(x, y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $m = \int_L \rho(x, y)\, dl$ − масса кривой;

б) $M_x = \int_L y\rho(x, y)\, dl$, $M_y = \int_L x\rho(x, y)\, dl$ − статические моменты кривой L относительно осей Ox и Oy;

в) $x_0 = \frac{M_y}{m}$, $y_0 = \frac{M_x}{m}$ − координаты центра тяжести кривой;

г) $I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dl$ − момент инерции кривой относительно начала координат (полярный момент инерции кривой);

д) $I_x = \int_L y^2\rho(x, y)\, dl$, $I_x = \int_L x^2\rho(x, y)\, dl$ − моменты инерции кривой относительно осей Ox и Oy;

е) $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$ − сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0)$ массы m_0 материальной кривой L, где

$$F_x = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(x, y)\cos\varphi}{r^2}\, dl, \quad F_y = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(x, y)\sin\varphi}{r^2}\, dl,$$

$\mathbf{r} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$, $r = |\mathbf{r}|$, φ − угол между вектором $\mathbf{r}$ и осью Ox, γ − гравитационная постоянная.

В случае пространственной материальной кривой справедливы аналогичные формулы для вычисления координат центра тяжести, статических моментов, полярного момента инерции, а также силы притяжения материальной точки.

Криволинейные интегралы второго рода

Основные понятия и теоремы

---

1. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть AB − простая спрямляемая незамкнутая кривая, заданная параметрически:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta\ (A(\varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)),\ B(\varphi(\beta),\ \psi(\beta))). \qquad (1)$$

Пусть на кривой AB заданы две функции, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Разобьем сегмент $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При этом кривая AB разобьется на n частей точками $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ в направлении от A к B. Пусть (x_k, y_k) − координаты точки M_k,

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, Δl_k − длина дуги $M_{k-1}M_k$, $\Delta l = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta l_k$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ возьмем некоторую точку и составим две *интегральные суммы*:

$$I_1(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta x_k,\ I_2(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\ \eta_k)\,\Delta y_k.$$

Определение. Число I_m ($m = 1, 2$) называется *пределом интегральных сумм* $I_m(M_k, N_k)$ при $\Delta l \to$ О, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что для любого разбиения кривой, у которого $\Delta l < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек N_k выполняется неравенство

$$|I_m(M_k, N_k) - I_m| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I_m(M_k, N_k) = I_m$, то он называется *криволинейным интегралом второго рода* и обозначается следующим образом:

$$I_1 = \int\limits_{AB} P(x, y)\,dx,\ I_2 = \int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy.$$

Сумма $I_1 + I_2$ называется *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначается так:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \qquad (2)$$

Из определения криволинейного интеграла второго рода следует, что при изменении направления обхода кривой AB изменяется и знак интеграла, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = -\int\limits_{BA} P(x, y)\,dx,\ \int\limits_{AB} Q(x, y)\,\mathrm{d}y = -\int\limits_{BA} Q(x, y)\,dy.$$

Если AB − замкнутая кривая (замкнутый контур), т. е. точка A совпадает с точкой B, то для нее можно указать два направления обхода от A к B. Если область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке, то такое направление обхода кривой L назовем *положительным*, а противоположное ему − *отрицательным*.

Интеграл (2) по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначают так: $\oint_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$.

Аналогично вводится криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz. \qquad (3)$$

для пространственной кривой, заданной параметрически,

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ y = \chi(t),\ \alpha \le t \le \beta\ (A(\varphi(\alpha),\ \psi(\alpha),\ \chi(\alpha)),\ B(\varphi(\beta),\ \psi(\beta),\ \chi(\beta))). \qquad (4)$$

2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью определенного интеграла.

Т е о р е м а 2. *Если AB − кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями* (1), *а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB, то существует интеграл* (2) *и справедливо равенство*

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)]\, dt. \qquad (5)$$

Для пространственной кривой AB, заданной уравнениями (3), справедлива аналогичная теорема, и интеграл (3) вычисляется по формуле

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t))\chi'(t)]\, dt. \qquad (6)$$

Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, и имеет кусочно-непрерывную производную, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB, то существует интеграл (2) и имеет место равенство

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\,dx. \tag{7}$$

Замечание. Криволинейные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности, однако теорема об оценке модуля интеграла и формула среднего значения неверны.

3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Теорема 3. *Пусть AB − кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями* (1), *функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB и $\boldsymbol{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ − единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x, y)$, причем направление $\boldsymbol{\tau}$ соответствует направлению движения от A к B (α − угол между вектором $\boldsymbol{\tau}$ в точке $M(x, y)$ и осью Ox).*

Тогда имеет место равенство

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \int_{AB} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\,dl, \tag{8}$$

где $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$.

Замечание. Для пространственной кривой (4) справедлива аналогичная теорема, а формула (8) имеет вид

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \int_{AB} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})\,dl, \tag{9}$$

где $\mathbf{a} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha\cdot\mathbf{i} + \cos\beta\cdot\mathbf{j} + \cos\gamma\cdot\mathbf{k}$; α, β, γ − углы между касательным вектором т к кривой в точке $M(x, y,z)$ и осями Ox, Oy, Oz.

4. Физические приложения криволинейных интегралов второго рода.

а) Работа силы $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ при перемещении материальной точки массы 1 из точки A в точку B вдоль кривой AB вычисляется по формуле

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{10}$$

Таким же образом вычисляется работа силы при перемещении материальной точки вдоль пространственной кривой.

б) Пусть $\mathbf{c} = \{u(x, y), v(x, y)\}$ − скорость плоского потока жидкости в точке $M(x, y)$ (см. пример 7 из § 1). Тогда количество Q жидкости, вытекающей за единицу времени из области G, равно

$$Q = \int_{AB} (\mathbf{cn})\,dl,$$

где $\mathbf{n}$ − единичный вектор внешней нормали к кривой L в точке $M(x, y)$. Если направление касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$ к кривой L соответствует положительному направлению обхода кривой и α − угол между вектором $\boldsymbol{\tau}$ и осью Ox, то

$$\mathbf{n} = \{\cos(\alpha - \pi/2), \sin(\alpha - \pi/2)\} = \{\sin\alpha, -\cos\alpha\},$$

$$(\mathbf{cn}) = u\sin\alpha - v\cos\alpha,$$

и для величины Q, используя формулу (8), получаем выражение через криволинейный интеграл второго рода:

$$Q = \int_{AB} (\{-v\cos\alpha + u\sin\alpha)\,dl = \oint_{L} -v\,dx + u\,dy.$$

Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Основные понятия и теоремы

1. Понятие простой области. На рис. 56, *а* изображена замкнутая область G_1, ограниченная снизу и сверху кусочно гладкими кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, а слева и справа − отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. Напомним, что такая область называется y-трапециевидной (отрезки прямых могут вырождаться в точку). Аналогично определяется x-трапециевидная область (Рис. 56, *б*).

Замкнутую область G назовем простой, если ее можно разбить на конечное число как x-трапециевидных, так и y-трапециевидных областей. Предполагается, что при каждом разбиении никакие две области не имеют общих внутренних точек. Примерами простых областей являются круг, прямоугольник, кольцо. На рис. 57, *а* показано разбиение кольца на y-трапециевидные, на рис. 57, *б* − на x-трапециевидные области (стрелками указано положительное направление обхода границы кольца).

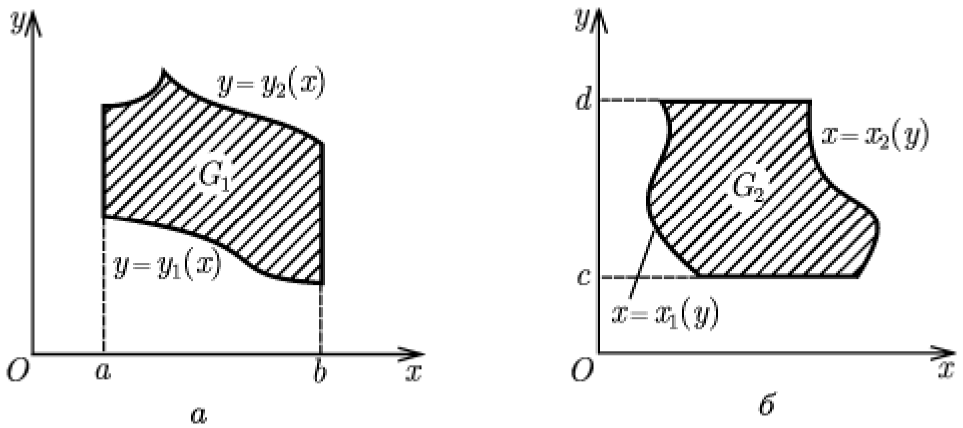

Рис. 56

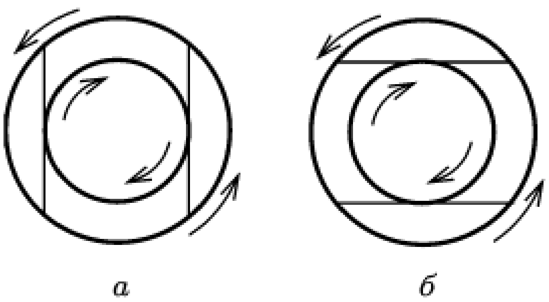

Рис. 57

2. Формула Грина.

Т е о р е м а 5 . *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в простой области G.*

Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad (1)$$

где криволинейный интеграл берется по границе L области G в положительном направлении.

Формула (1) называется *формулой Грина*. Она связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

З а м е ч а н и е 1 . Формула Грина справедлива не только для простой области, но и для любой ограниченной области с кусочно гладкой границей.

З а м е ч а н и е 2 . Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$ и учитывая, что $\iint\limits_G dx\,dy$ равен площади S области G, получим выражения площади фигуры через криволинейные интегралы по ее границе:

$$S = \oint\limits_L x\,dy,\quad S = -\oint\limits_L y\,dx, \tag{2}$$

Пусть α и β − произвольные числа такие, что $\alpha + \beta = 1$. Умножая первое из равенств (2) на α, а второе на β и складывая, получим еще одну формулу для площади:

$$S = \oint\limits_L \alpha x\,dy - \beta y\,dx\ (\alpha + \beta = 1).$$

Наиболее употребительна эта формула при $\alpha = \beta = 1/2$:

$$S = 1/2 \oint\limits_L x\,dy - y\,dx. \tag{3}$$

3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости. В § 2 был рассмотрен пример, в котором криволинейный интеграл второго рода по трем различным кривым, соединяющим две данные точки A и B, имел одно и то же значение. Можно доказать (см. ниже замечание 2 к теореме 6), что этот интеграл имеет то же самое значение для любой кусочно гладкой кривой, соединяющей точки A и B. В таком случае говорят, что криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования (т. е. не зависит от выбора кривой, соединяющей две данные точки, а зависит только от самих этих точек).

В формулируемой ниже теореме 6 об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования используется понятие односвязной области.

О п р е д е л е н и е . Область G на плоскости называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области G.

Примерами односвязных областей служат круг, прямоугольник; пример неодносвязной области − кольцо.

Т е о р е м а 6 . 1°. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G.*

Тогда следующие три условия эквивалентны (*т. е. из каждого из них следуют два других*).

I. *Для любого замкнутого кусочно гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство*

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

II. *Для любых двух точек A и B в области G криволинейный интеграл* $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ *не зависит от пути интегрирования, расположенного в области G.*

III. *Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом, т. е. в области G существует функция $u(M) = u(x, y)$ такая, что*

$$du = P\,dx + Q\,dy.$$

При этом для любой кусочно гладкой кривой AB, лежащей в области G, имеет место равенство

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{4}$$

2°. *Пусть G − односвязная область, а функции P и Q имеют в области G непрерывные частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда каждое из условий I−III *эквивалентно следующему условию*:

IV. *В области G выполняется равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 1 . Функция $u(x, y)$ из условия III может быть найдена по формуле

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy + C,$$

где интеграл в правой части представляет собой криволинейный интеграл второго рода по произвольной кривой L, лежащей в области G и соединяющей какую-нибудь фиксированную точку (x_0, y_0) с точкой (x, y), а C − произвольная постоянная. В качестве кривой L часто бывает удобно брать ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат (Рис. 58). Тогда

$$u(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Q\,dy + C = \int_{x_0}^{x} P\,dx + \int_{y_0}^{y} Q\,dy + C. \tag{6}$$

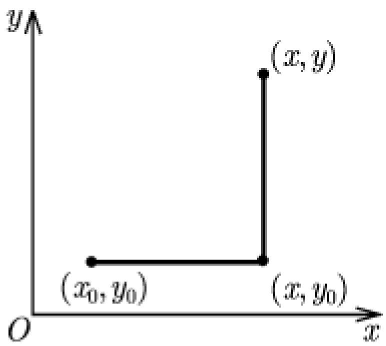

Рис. 58

З а м е ч а н и е 2 . Для рассмотренного в примере 1 из § 2 криволинейного интеграла $I = \int_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy$ имеем $P = 2xy$, $Q = x^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$. Таким образом, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и, следовательно, интеграл I не зависит от пути интегрирования.