

Двойные интегралы

Основные понятия и теоремы

1. Определение двойного интеграла. Пусть G – квадратуемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости и пусть в области G определена ограниченная функция $u = f(M) = f(x, y)$. Разобьем область G на n квадратуемых частей G_i ($i = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части G_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$I(G_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

где Δs_i – площадь G_i . Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области G на части G_i и данному выбору промежуточных точек M_i .

Диаметром ограниченного множества G точек назовем точную верхнюю грань

расстояний между двумя произвольными точками этого множества: $\sup_{\substack{M' \in G \\ M'' \in G}} \rho(M', M'')$.

Пусть d_i – диаметр G_i , $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(G_i, M_i)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения области G , у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство

$$|I(G_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{d \rightarrow 0} I(G_i, M_i) = I$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается $\iint_G f(x, y) dx dy$ или $\iint_G f(M) ds$, а функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области G .

Теорема 1. Функция, непрерывная в замкнутой квадратуемой области, интегрируема в этой области.

Теорема 2. Функция, ограниченная в квадратуемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площади нуль¹, интегрируема в этой области.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

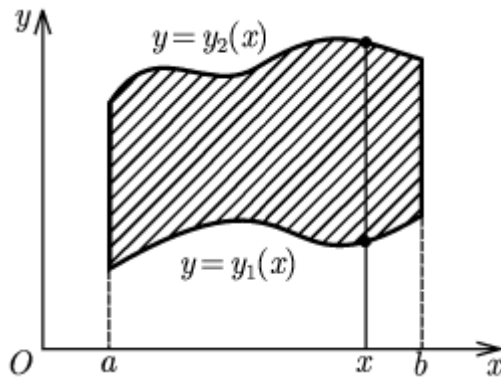


Рис. 29

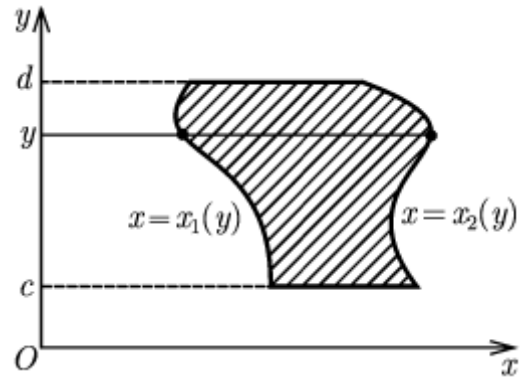


Рис. 30

2. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования. Пусть функция $f(x, y)$ определена в области $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные функции на сегменте $[a, b]$ (рис. 29). Такую область G назовем *y-трапецевидной*.

Теорема 3. Пусть:

1°) существует двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$;

2°) $\forall x \in [a, b]$ существует определенный интеграл

$$I = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

(он называется *повторным*) и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1)$$

т. е. двойной интеграл равен повторному.

Если область G является x -трапециевидной (рис. 30), то при соответствующих условиях справедлива формула, аналогичная (1):

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx, \quad (2)$$

Область более сложного вида часто удается разбить на трапециевидные части, к которым применима формула (2) или (2) (рис. 31).

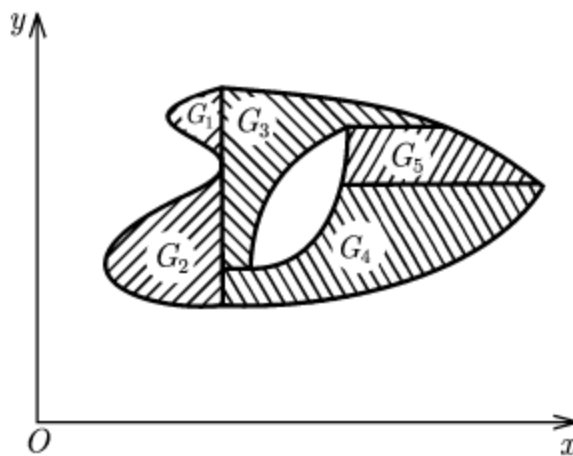


Рис. 31

3. Замена переменных в двойном интеграле. Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе переменных x и y к новым переменным u и v по формулам

$$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), (u, v) \in g. \quad (3)$$

При этом каждая точка (x, y) области G соответствует некоторой точке (u, v) области g , а каждая точка (u, v) области g переходит в некоторую точку (x, y) области G (рис. 32). Иными словами, когда точка (u, v) "пробегает" область g , соответствующая ей точка $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ "пробегает" область G . Функции (3) называют также *отображением области g плоскости (u, v) на область G плоскости (x, y)* . Область G называется *образом области g* , а область g – *прообразом области G* при отображении (3).

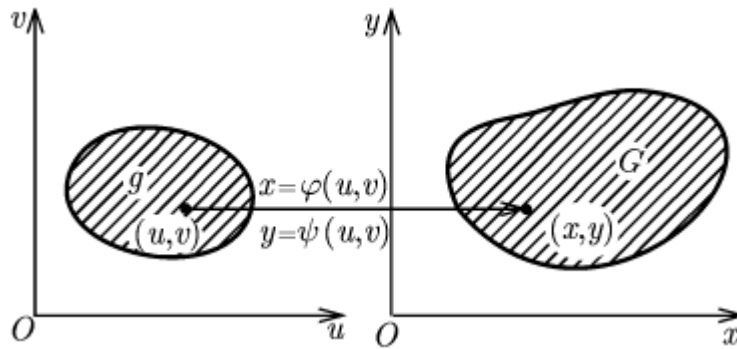


Рис. 32

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям.

I. Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам (u, v) области g соответствуют различные точки (x, y) области G .

II. Функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка.

III. Якобиан отображения $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$ отличен от нуля во всех точках области g .

Теорема 4. Пусть g и G – замкнутые квадратуемые области, функция $f(x, y)$ ограничена в области G и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек площади нуль, а отображение (3) удовлетворяет условиям I–III.

Тогда справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_g f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*.

З а м е ч а н и е . Если условие I (взаимная однозначность отображения (3)) или условие III (отличие от нуля якобиана отображения) нарушается на множестве точек площади нуль (например, в отдельных точках или на отдельных кривых), то формула (4) остается в силе.

4. Криволинейные координаты. Формулам (3), которые рассматривались как отображение области g на область G , можно придать другой смысл. Рассмотрим в области g отрезок прямой $u = u_0 = \text{const}$ (рис. 33). В области G ему соответствует параметрически заданная кривая

$$x = \varphi(u_0, v), y = \psi(u_0, v), \quad (5)$$

где роль параметра играет переменная v . Точно так же отрезку прямой $v = v_0$ в области g соответствует в области G кривая

$$x = \varphi(u, v_0), y = \psi(u, v_0), \quad (6)$$

где роль параметра играет u . Точке (u_0, v_0) области G соответствует некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ области G ($x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$), причем в силу взаимной однозначности отображения (3) точке M_0 соответствует единственная точка (u_0, v_0) области g , т. е. точка M_0 однозначно определяется парой чисел (u_0, v_0) . Поэтому числа u_0 и v_0 можно рассматривать как координаты точки M_0 (но уже не прямоугольные, а какие-то другие), а кривые (5) и (6), на которых одна из координат u или v постоянна, естественно назвать координатными линиями v и u . Так как эти координатные линии представляют собой, вообще говоря, кривые, то числа (u_0, v_0) называются *криволинейными координатами* точки M_0 . При отображении (3) сетка прямых координатных линий в области g переходит в сетку кривых координатных линий в области G (рис. 33). Итак, формулы (3) можно рассматривать как формулы перехода от прямоугольных координат (x, y) к новым, криволинейным координатам (u, v) в области G .

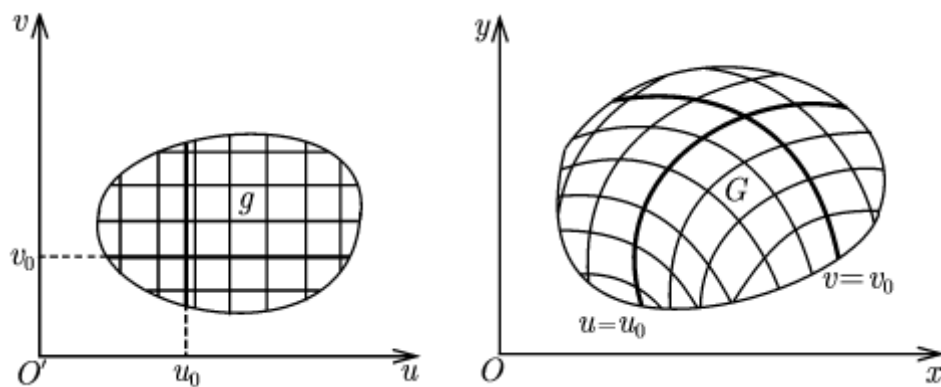


Рис. 33

Примером криволинейных координат являются полярные координаты (ρ, φ) , связанные с прямоугольными координатами (x, y) формулами

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Иногда в качестве промежутка изменения φ берется промежуток $-\pi < \varphi \leq \pi$. Якобиан перехода к полярным координатам имеет вид

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

5. Геометрические приложения двойных интегралов.

а) Площадь S квадратуемой области G на плоскости (x, y) выражается формулой

$$S = \iint_G dx dy. \quad (7)$$

Если $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ – криволинейная трапеция, то, сведя двойной интеграл (7) к повторному, придем к известному выражению площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

$$S = \iint_G dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b [y]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Переходя в (7) к новым переменным по формулам (3), получим выражение площади области G в криволинейных координатах

$$S = \iint_g \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (8)$$

Величину $ds = dx dy$, представляющую собой площадь прямоугольника со сторонами dx и dy , естественно назвать *элементом площади в прямоугольных координатах x и y* , а

величину $ds = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$ – элементом площади в криволинейных координатах u и v .

Модуль якобиана $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|$ представляет собой *коэффициент растяжения площади* в точке (u, v) при отображении области G плоскости (u, v) на область G плоскости (x, y) .

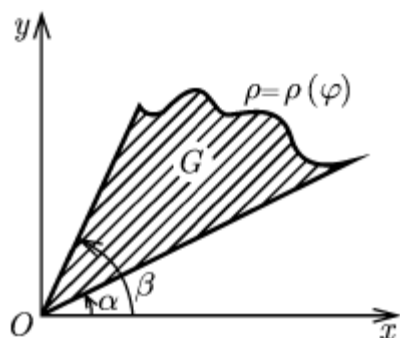


Рис. 34

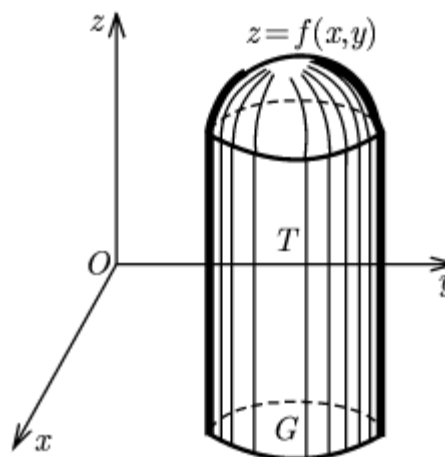


Рис. 35

Если G – криволинейный сектор на плоскости (x, y) , ограниченный лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ и φ – полярные координаты (рис. 34), то, переходя в формуле (7) к

полярным координатам, учитывая, что $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$, а $g = \{(\rho, \varphi): \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, и сводя двойной интеграл к повторному, получаем известное выражение площади криволинейного сектора через определенный интеграл

$$S = \iint_G dx dy = \iint_g \rho d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\rho(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

б) Объем V тела $T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ (рис. 35), где G – квадратуемая замкнутая область, а $f(x, y)$ – непрерывная неотрицательная в области G функция, выражается формулой

$$V = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

6. Физические приложения двойных интегралов. Пусть G – материальная бесконечно тонкая пластинка (квадриюемая область на плоскости Oxy) с плотностью $\rho(x, y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $m = \iint_G \rho(x, y) dx dy$ – масса пластинки;

б) $M_x = \iint_G y \rho(x, y) dx dy$, $M_y = \iint_G x \rho(x, y) dx dy$ – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy ;

в) $x_0 = \frac{M_y}{m}$, $y_0 = \frac{M_x}{m}$ – координаты центра тяжести пластинки;

г) $I_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy$, $I_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy$ – моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy ;

д) $I_0 = I_x + I_y = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$ – момент инерции пластинки относительно начала координат.

¹ Говорят, что множество точек плоскости имеет *площадь нуль*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует многоугольник, содержащий это множество и имеющий площадь, меньшую ε (иными словами, если это множество можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади).

Тройные интегралы

Основные понятия и формулы

1. Определение тройного интеграла. Основные понятия и теоремы для тройных интегралов аналогичны соответствующим понятиям и теоремам для двойных интегралов. Пусть T – кубируемая область (открытая или замкнутая) в трехмерном евклидовом пространстве и пусть в области T определена ограниченная функция $u = f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем область T на n кубируемых частей T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части T_i возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим интегральную сумму

$$I(T_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

где ΔV_i – объем T_i .

Пусть d_i – диаметр T_i , $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(T_i, M_i)$ при $d \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения области T , у которого $d < \delta$, и для любого выбора промежуточных точек M_i выполняется неравенство

$$|I(T_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует $\lim_{d \rightarrow 0} I(T_i, M_i) = I$, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x,$

$y, z)$ по области T и обозначается $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ или $\iiint_T f(M) dV$, а функция $f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* в области T .

Теорема 5. Функция, непрерывная в замкнутой кубируемой области, интегрируема в этой области.

Теорема 6. Функция, ограниченная в кубируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек объема нуль, интегрируема в этой области.

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

2. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в области $T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные функции в квадратируемой области G (рис. 42).

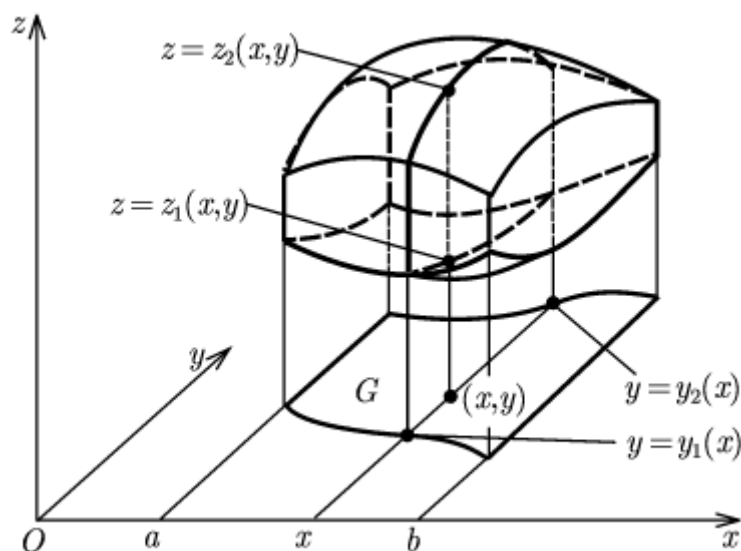


Рис. 42

Теорема 7. Пусть:

1°) существует тройной интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz;$$

2°) $\forall (x, y) \in G$ существует определенный интеграл

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint_G I(x, y) dx dy = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (1)$$

т. е. тройной интеграл равен повторному.

Если область G является y -трапециевидной (см. рис. 42), т. е. $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y$

$\leq y_2(x)\}$, то двойной интеграл $\iint_G I(x, y) dx dy$ в свою очередь можно свести к повторному:

$$\iint_G I(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В формуле (1) повторный интеграл представляет собой двойной интеграл, а внутренний интеграл в повторном является определенным интегралом. Возможно и иное сведение тройного интеграла к повторному, когда повторный интеграл представляет собой определенный интеграл, а внутренний интеграл в повторном является двойным интегралом.

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в области T , которая заключена между плоскостями $x = a$ и $x = b$, причем каждое сечение области T плоскостью $x = \text{const}$ ($a \leq x \leq b$) представляет собой квадрируемую фигуру $G(x)$ (рис.43).

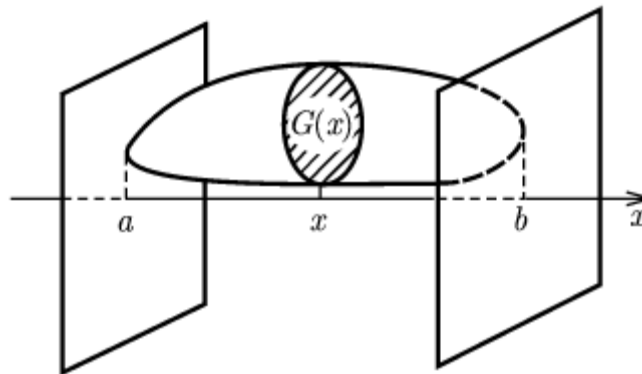


Рис. 43

Теорема 8. Пусть:

1°) существует тройной интеграл $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$;

2°) $\forall x \in [a, b]$ существует двойной интеграл

$$I(x) = \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (2)$$

3. Замена переменных в тройном интеграле. Аналогично случаю двойного интеграла

замена переменных в тройном интеграле $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ состоит в переходе от переменных x, y, z к новым переменным u, v, w по формулам

$$x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w), (u, v, w) \in \tau. \quad (3)$$

При этом каждая точка (x, y, z) области T соответствует по формулам (3) некоторой точке (u, v, w) области τ , а каждая точка (u, v, w) области τ переходит в некоторую точку (x, y, z) области T . Иными словами, функции (3) осуществляют отображение области τ пространства (u, v, w) на область T пространства (x, y, z) . Пусть отображение (3) удовлетворяет таким же условиям, как и в § 1.

I. Отображение (3) взаимно однозначно.

II. Функции $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$ и $\chi(u, v, w)$ имеют в области τ непрерывные частные производные первого порядка.

III. Якобиан отображения $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ отличен от нуля в области τ .

Теорема 9. Пусть τ и T – замкнутые кубируемые области, функция $f(x, y, z)$ ограничена в области T и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль, а отображение (3) удовлетворяет условиям I–III.

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в тройном интеграле)

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_\tau f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

З а м е ч а н и е . Формула замены переменных остается в силе, если условия I и III нарушаются на множестве точек объема нуль.

4. Криволинейные координаты. Формулы (3) можно рассматривать как формулы перехода к новым, криволинейным координатам (u, v, w) в области T . Поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ представляют собой координатные поверхности (вообще говоря, криволинейные) в пространстве (x, y, z) . Кривые, на которых две криволинейные координаты имеют постоянные значения и изменяется только одна из координат, представляют собой координатные линии.

Рассмотрим два примера наиболее употребительных криволинейных координат.

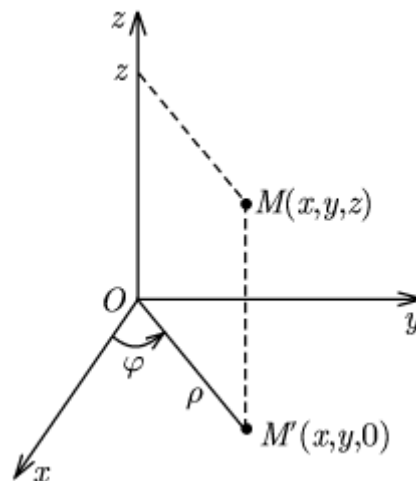


Рис. 44

Цилиндрические координаты. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве (x, y, z) , M' – проекция точки M на плоскость (x, y) (рис. 44). Точка M однозначно задается тройкой чисел (ρ, φ, z) , где (ρ, φ) – полярные координаты точки M' на плоскости (x, y) , z – аппликата точки M . Тройка чисел (ρ, φ, z) называется **цилиндрическими координатами** точки M . Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к цилиндрическим (ρ, φ, z) задается формулами

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty). \quad (4)$$

(Иногда в качестве промежутка изменения φ берется промежуток $-\pi < \varphi \leq \pi$.) Якобиан отображения (4) есть

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho.$$

Координатная поверхность $\rho = \text{const}$ представляет собой цилиндрическую поверхность – отсюда и название "цилиндрические координаты".

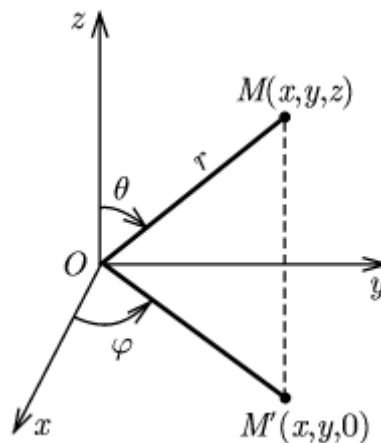


Рис. 45

Сферические координаты. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве (x, y, z) , M' – проекция точки M на плоскость (x, y) (рис. 45). Точка M однозначно задается тройкой чисел (r, θ, φ) , где r – расстояние точки M от точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz , φ – полярный угол точки M' на плоскости (x, y) . Тройка чисел (r, θ, φ) называется *сферическими координатами* точки M . Переход от прямоугольных координат (x, y, z) к сферическим (r, θ, φ) задается формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \quad (0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (5)$$

(Иногда в качестве угла θ берется угол между лучами OM и OM' со знаком плюс, если $z > 0$, и со знаком минус, если $z < 0$. В этом случае $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, а в формулах (5) нужно заменить $\sin \theta$ на $\cos \theta$, а $\cos \theta$ на $\sin \theta$.)

Якобиан отображения (5) есть $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$ (в случае второго способа выбора угла в якобиан равен $r^2 \cos \theta$). Координатная поверхность $r = \text{const} > 0$ представляет собой сферу – отсюда и название "сферические координаты".

Иногда используются так называемые *обобщенные сферические координаты*. Они связаны с прямоугольными координатами (x, y, z) формулами

$$x - x_0 = ar^n \sin^\alpha \theta \cos^\beta \varphi, y - y_0 = br^n \sin^\alpha \theta \sin^\beta \varphi,$$

$$z - z_0 = cr^n \cos^\alpha \theta$$

$$(0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

где $x_0, y_0, z_0, a, b, c, n, \alpha, \beta$ – некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства.

Якобиан перехода к обобщенным сферическим координатам имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc n \alpha \beta r^{3n-1} \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi. \quad (6)$$

5. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов. Объем V кубируемой области T (кубируемого тела) в пространстве (x, y, z) выражается формулой

$$V = \iiint_T dx dy dz. \quad (7)$$

Если $T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, где G – квадратуемая область на плоскости (x, y) , а $f(x, y)$ – непрерывная в области G функция (см. рис. 35), то, сводя тройной интеграл к повторному, приходим к формуле (9) из § 1, выражающей объем тела T через двойной интеграл:

$$V = \iint_G dx dy \int_0^{f(x, y)} dz = \iint_G [z]_0^{f(x, y)} dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Если область T заключена между плоскостями $x = a$ и $x = b$ и каждое сечение области T плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой квадратуемую фигуру $G(x)$ с площадью $S(x)$ (см. рис. 43), то, сводя тройной интеграл (7) к повторному по формуле (2) и учитывая, что,

$\iint_{G(x)} dy dz = S(x)$, приходим к известному выражению объема тела с помощью определенного интеграла:

$$V = \int_a^b \iint_{G(x)} dy dz = \int_a^b S(x) dx. \quad (8)$$

Переходя в равенстве (7) к новым переменным u, v, w по формулам (3), получим выражение объема области T в криволинейных координатах:

$$V = \iiint_{\tau} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

Величину $dV = dx dy dz$, представляющую собой объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy и dz , естественно называть *элементом объема в прямоугольных*

координатах x, y, z , а величину $dV = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$ – *элементом объема в*

криволинейных координатах u, v, w . Модуль якобиана $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right|$ представляет собой коэффициент растяжения объема в точке (u, v, w) при отображении области τ пространства (u, v, w) на область T пространства (x, y, z) .

6. Физические приложения тройных интегралов. Пусть T – материальное тело (кубируемая область в пространстве $Oxyz$) с плотностью $\rho(x, y, z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

а) $m = \iiint_T \rho(x, y, z) dx dy dz$ – масса тела;

б) $M_{yz} = \iiint_T x \rho(x, y, z) dx dy dz, M_{zx} = \iiint_T y \rho(x, y, z) dx dy dz, M_{xy} = \iiint_T z \rho(x, y, z) dx dy dz$ – статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy ;

в) $x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести тела;

г) $I_{yz} = \iiint_T x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, I_{zx} = \iiint_T y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, I_{xy} = \iiint_T z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$ – моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy ;

д) $I_x = I_{zx} + I_{xy}, I_y = I_{xy} + I_{yz}, I_z = I_{yz} + I_{zx}$ – моменты инерции тела относительно осей координат Ox, Oy, Oz ;

е) $I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$ – момент инерции тела относительно начала координат;

ж) $U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{1}{r} dx dy dz$ – ньютоновский потенциал поля тяготения тела T в точке (x_0, y_0, z_0) ; здесь $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, γ – гравитационная постоянная;

з) $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 телом T , где

$$F_x = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial x_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_y = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial y_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_z = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial z_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} dx dy dz.$$