# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

## НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § Первообразная функция и неопределённый интеграл

| | |
|---|---|
| **Определение первообразной** | Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на промежутке $X$, если $F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in X$. |

| | |
|---|---|
| **Лемма** | Функция, производная которой на некотором промежутке $X$ равна нулю, постоянна на этом промежутке. |

| | |
|---|---|
| **Теорема (о множестве первообразных)** | Если $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке $X$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке $X$ имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C$ − некоторая постоянная. |

| | |
|---|---|
| **Определение неопределённого интеграла** | . Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке $X$ и обозначается $\int f(x)dx$.<br><br>В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ − одна из первообразных для $f(x)$, $C$ − произвольная постоянная. |

**Замечание.** Иногда символом $\int f(x)dx$ обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.

| | |
|---|---|
| **Теорема (существования первообразной)** | Всякая непрерывная на промежутке $X$ функция имеет первообразную на этом промежутке. |

**Примеры «неберущихся» интегралов**

$$\int \frac{e^x}{x}dx; \quad \int \frac{\sin x}{x}dx; \quad \int \frac{\cos x}{x}dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$
$$\int \exp(-x^2)dx; \quad \int \sin(x^2)dx; \quad \int \cos(x^2)dx;$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$i^2 = -1$$

### § Основные свойства неопределённого интеграла

| | |
|---|---|
| **Свойство 1 (о дифференциале интеграла)** | Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$.<br>Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$. |

| | |
|---|---|
| **Свойство 2 (об интеграле от дифференциала)** | Неопределённыё интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$ . |

**Вывод из свойств 1 и 2:** знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются.

| | |
|---|---|
| **Свойство 3 (линейности)** | Если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, а $\alpha$ и $\beta$ − любые вещественные числа, то существует первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x)$, причем $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$ . |

**§ Таблица интегралов**
**на С.2 опорных конспектов (ОК).**

**§ Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле**

| | |
|---|---|
| **Теорема (о замене переменных)** | Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке $T$, а промежуток $X$ − множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на $X$ и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$.<br><br>Тогда на промежутке $T$ функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.<br><br>То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$ |

| | |
|---|---|
| **Следствие (алгоритм замены переменных в неопределённом интеграле)** | $\int f(x)dx = \left\| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ ;<br>$\int f(x)dx = \left\| \begin{matrix} t = \varphi^{-1}(x) \\ dt = (\varphi^{-1}(x))'dx \end{matrix} \right\| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . |

**Замечание.** Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

**§ Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле**

| | |
|---|---|
| **Теорема (об интегрировании по частям в неопределённом интеграле)** | Пусть на промежутке $X$ функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на $X$.<br><br>Тогда $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на $X$ , и справедлива формула интегрирования по частям:<br>$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$ ,<br><br>или<br><br>$\int udv = uv - \int vdu.$ |

**Рекомендации по применению метода интегрирования по частям на С.3 опорных конспектов (ОК).**

Какими методами можно найти следующие интегралы:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\int x^2 \exp(x^3)dx$ | 2. | $\int x^3 \exp(x^2)dx$ |
| 3. | $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ | 4. | $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$ |
| 5. | $\int x \sin x^2 dx$ | 6. | $\int x^2 \sin x dx$ |
| 7. | $\int 5^x \cos x dx$ | 8. | $\int 5^{\sin x} \cos x dx$ |
| 9. | $\int \sqrt{x} \exp(\sqrt{x})dx$ | 10. | $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x})dx$ |
| 11. | $\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | 12. | $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ |

## § Интегрирование дробных рациональных функций

### А. Правильные и неправильные рациональные дроби

| | |
|---|---|
| **Определение рациональной дроби** | **Рациональной дробью** называется отношение двух многочленов: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + ... + b_m}$ |

| | |
|---|---|
| **Определение правильной и неправильной рациональной дроби** | Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$).<br>Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется не**правильной**, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$). |

| | |
|---|---|
| **Теорема** | Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. |

### Б. Основная теорема алгебры

| | |
|---|---|
| **Теорема (основная алгебры)** | Любой многочлен степени $n$ имеет ровно $n$ корней и может быть представлен в виде произведения $n$ сомножителей. |

| | |
|---|---|
| **Теорема (о разложении многочлена на множители)** | Любой многочлен степени $m$ можно разложить на линейные и квадратичные множители:<br>$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + .... + b_m =$<br>$= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$<br>в соответствии с его вещественными ($x_1, x_2, ...x_r$) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности $k_1, k_2, ..., k_r$ его вещественных и $l_1, l_2, ..., l_s$ комплексных корней,<br>причём $k_1 + k_2 + ... + k_r + 2l_1 + 2l_2 + ... + 2l_s = m$. |

**В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей**

| | |
|---|---|
| **Теорема (о сумме простых дробей)** | Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь следующим правилом: |

| Вид множителя в знаменателе дроби | Сколько дробей | Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби |
|---|---|---|
| $(x\text{-}a)^k$ | $k$ | $\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_k}{x-a}$ |
| $(x^2+px+q)^w$ | $w$ | $\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}}+\ldots+\frac{M_wx+N_w}{x^2+px+q}$ |

**Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов**

| | |
|---|---|
| **Метод задания частных значений** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.<br>2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.<br>3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения. |

| | |
|---|---|
| **Метод неопределённых коэффициентов** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.<br>2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.<br>3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента $x$ в правой и левой частях уравнения. |

| | |
|---|---|
| **Метод комбинированный** | 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю.<br>2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами.<br>3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов. |

**Д. Интегрирование простых дробей**

а) дроби первого типа $\int\frac{A}{x-a}dx=\int\frac{A}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+c;$

б) дроби второго типа $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+c;(k>1)$

в) дроби третьего типа

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\left|\begin{array}{l} x^2+px+q= \\ =(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q \\ x+\frac{p}{2}=t;\quad dx=dt \\ x^2+px+q=t^2\pm a^2 \end{array}\right|=\int\frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2\pm a^2}dt=M\int\frac{td(t^2\pm a^2)}{(t^2\pm a^2)2t}+(N-M\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}=\ldots.$$

г) дроби четвертого типа $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w}dx = \left| \begin{array}{c} x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q \\ x+\frac{p}{2}=t; \quad dx=dt \\ x^2+px+q=t^2\pm a^2 \end{array} \right| = \ldots$

$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}})$ – рекуррентная формула.

**План интегрирования рациональных дробей на С.4 опорных конспектов (ОК).**

Пример 1. Найти $\int \frac{x^5+x^4+x^3+14x^2-2x+5}{x^4-2x^3+5x^2}dx$.

Пример 2 . Найти $\int \frac{x^7}{x^4-1}dx$. Пример 3. $\int \frac{7x^3-14x^2+15x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$.

**§ Интегрирование некоторых тригонометрических функций**

| | |
|---|---|
| **Определение рациональной функции двух переменных** | **Рациональной** функцией двух переменных $R(u,v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам $u,v$ конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **целую** степень. |

**Рекомендации по способам интегрирования тригонометрических и гиперболических функций на С.5 опорных конспектов (ОК).**

**Примеры.**

**1**. $\int \frac{dx}{\sin x}$. **2.** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$. **3.** $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$. **4.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}dx$.

**§ Интегрирование некоторых иррациональных функций**

| | |
|---|---|
| **Определение иррациональной функции** | Функция называется алгебраической **иррациональной**, если она получена путём применения к аргументу $x$ конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в **рациональную** степень. |

**Рекомендации по способам интегрирования иррациональных функций на С.6 опорных конспектов (ОК).**

**Примеры: 1**. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. **2.** $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$. **3.** $\int \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$. **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

**5.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$. **6.** $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$.

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться применить непосредственное интегрирование и подведение функции под знак дифференциала;
2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки,
3. а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.