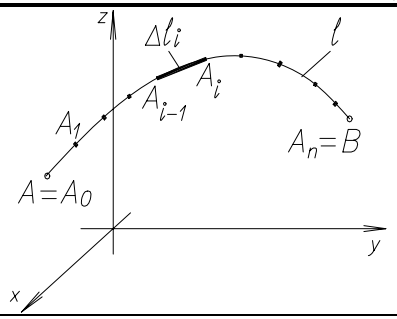
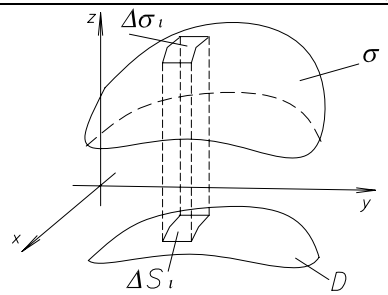
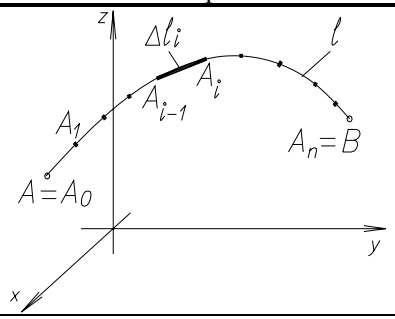
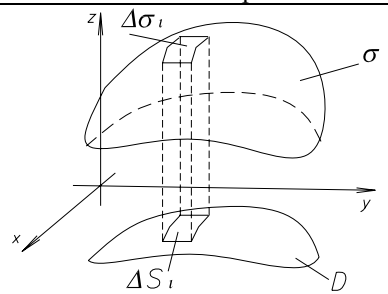
Криволинейные и поверхностные интегралы I-го рода.

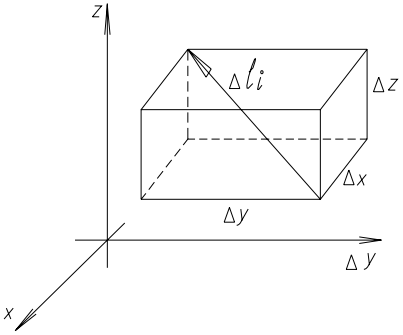
Интегралы I рода	
По длине дуги	По площади поверхности
 $\mu=f(x, y, z)$-линейная плотность	 $\mu=f(x, y, z)$ – поверхностная плотность
Разобьем	
$\overset{\cup}{AB}=\left\{\overset{\cup}{A_0A_1}, \overset{\cup}{A_1A_2},\ldots, \overset{\cup}{A_{n-1}A_n}\right\}=\{\Delta l_1, \Delta l_2,\ldots,\Delta l_n\}$	$\sigma=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2,\ldots, \Delta\sigma_n\}$
$M_i\in\Delta l_i$	$M_i\in\Delta\sigma_i$
Выберем произвольно точки M_i, $i=1\div n$	
$f(M_i)$ – линейная плотность дуги Δl_i	$f(M_i)$ – поверхностная плотность на площадке $\Delta\sigma_i$
$\Delta m_i=f(M_i)\Delta l_i$ – i-тый элемент массы кривой	$\Delta m_i=f(M_i)\Delta\sigma_i$ – i-тый элемент массы поверхности
Просуммируем элементы массы Δm_i: $\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i$	
$\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$ – интегральная сумма для криволинейного интеграла по длине дуги	$\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$ – интегральная сумма для поверхностного интеграла по площади поверхности
Перейдем к пределу $n\to\infty$	
$\max \Delta l_i\to 0$	$\max \operatorname{diam} \Delta\sigma_i\to 0$
$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i=\int_l f(x, y, z)dl=m$	$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i=\iint_\sigma f(x, y, x)d\sigma=m$

Криволинейные и поверхностные интегралы II-го рода (по координатам).

Интегралы II рода	
Криволинейные интегралы по координатам	Поверхностные интегралы по координатам
 $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}=$ $=(P,Q,R)$ – *вектор силы, перемещающей точку по кривой от A к B*	 $\vec{V}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}=$ $=(P,Q,R)$ – *вектор скорости жидкости, протекающей через двустороннюю поверхность σ, одна из сторон которой выбрана для построения нормалей*
Разобьем	
$\overset{\cup}{AB}=\left\{\overset{\cup}{A_0A_1},\overset{\cup}{A_1A_2},\ldots,\overset{\cup}{A_{n-1}A_n}\right\}=\{\Delta l_1,\Delta l_2,\ldots,\Delta l_n\}$	$\sigma=\{\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_n\}$
$M_i\in\Delta l_i$	$M_i\in\Delta\sigma_i$
Выберем произвольно точки M_i, $i=1\div n$	
$\vec{F}(M_i)$ – сила в точке M_i дуги Δl_i	$\vec{V}(M_i)$ – скорость в точке M_i на поверхности $\Delta\sigma_i$
$\Delta E_i=(\vec{F}(M_i),\Delta\vec{r}_i)$ – скалярное произведение силы в точке M_i на вектор $\Delta\vec{r}_i=\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $i=1\div n$	Просуммируем элементы работы ΔE_i и элементы потока жидкости $\Delta\Pi_i$
	$\Delta\Pi_i=(\vec{V}(M_i),\vec{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i$ -скалярное произведение скорости на единичный вектор нормали в точке M_i, умноженное на элемент поверхности $\Delta\sigma_i$
$\sum_{i=1}^{n}\Delta E_i=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\Delta\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i+R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i$ – интегральная сумма для криволинейного интеграла по координатам	$\sum_{i=1}^{n}\Delta\Pi_i=\sum_{i=1}^{n}(\vec{V}(M_i),\vec{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\Delta\sigma_i$ – интегральная сумма для поверхностного интеграла по координатам
Перейдем к пределу $n\to\infty$	
$\max\Delta l_i\to 0$	$\max\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\to 0$
$E=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta E_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}(M_i),\Delta\vec{r}_i)=\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i+R(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i=$ $=\int_{AB}Pdx+Qdy+Rdz$ E – работа силы по перемещению точки из A в B по дуге AB	$\Pi=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\Pi_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\vec{V}(M_i),\vec{n}^0(M_i))\Delta\sigma_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\Delta\sigma_i=$ $=\iint_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma=\iint_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$ Π –поток жидкости через выбранную сторону поверхности σ

Вычисление криволинейных (**по длине дуги**) и поверхностных (**по площади поверхности**) интегралов I рода

Элемент деления



Кривая $l: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$\alpha \le t \le \beta$

Элемент деления дуги кривой:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t$$

Поверхность

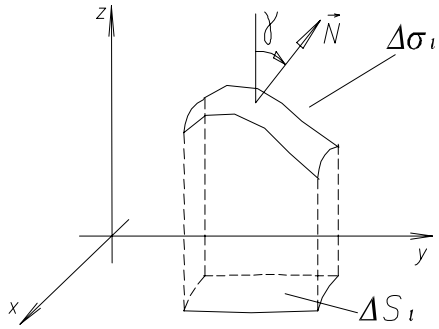
$\sigma : z = z(x, y)$

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta \sigma_i} = \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (z_x^{/})^2 + (z_y^{/})^2}}$$

Элемент деления поверхности:

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + (z_x^{/})^2 + (z_y^{i})^2}\,\Delta S_i$$



Приближенное значение элемента деления

$\tau_i \in \Delta t_i$

$$\Delta l_i \approx \sqrt{(x_t^{/}(\tau_i))^2 + (y_t^{/}(\tau_i))^2 + (z_t^{/}(\tau_i))^2}\,\Delta t_i$$

$$\Delta\sigma_i \approx \sqrt{1 + (z_x^{/}(x_i, y_i))^2 + (z_y^{i}(x_i, y_i))^2}\,\Delta S_i$$

$(x_i, y_i) \in \Delta S_i$

Вычисление

Масса m кривой AB,

если $f(x, y, z)$ – линейная плотность:

$$m = \int_l f(x, y, z)dl = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\sqrt{(x_t^{/}(\tau_i))^2 + (y_t^{/}(\tau_i))^2 + (z_t^{/}(\tau_i))^2}\,\Delta t_i =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t^{/})^2 + (y_t^{/})^2 + (z_t^{/})^2}\,dt$$

Масса m поверхности σ,

если $f(x, y, z)$ – поверхностная плотность:

$$m = \iint_\sigma f(x, y, z)d\sigma =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \cdot \sqrt{1 + (z_x^{/}(x_i, y_i))^2 + (z_y^{/}(x_i, y_i))^2}\,\Delta S_i =$$

$$= \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z_x^{/})^2 + (z_y^{/})^2}\,dS$$

Правило

Чтобы вычислить криволинейный интеграл по длине дуги (I рода), нужно привести его к определенному интегралу:

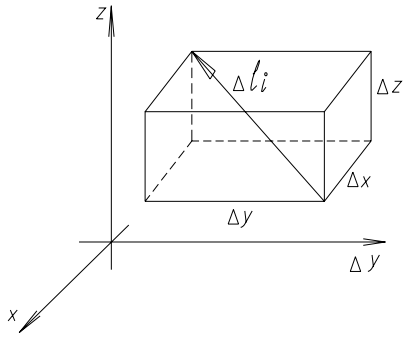
1) в подынтегральную функцию вместо переменных *x,y,z* подставить их выражения из параметрических уравнений линии интегрирования;
2) заменить элемент дуги *dl* корнем квадратным из суммы квадратов производных *x,y,z* по *t,* умноженным на *dt;*
3) взять определенный интеграл в пределах изменения параметра t.

Чтобы вычислить поверхностный интеграл по площади поверхности (I рода), нужно привести его к двойному интегралу:

1) в подынтегральную функцию вместо *z* подставить его выражение из уравнения поверхности;
2) элемент поверхности $d\sigma$ заменить дифференциальным выражением $\sqrt{1 + (z_x^{/})^2 + (z_y^{/})^2}\,dS$;
3) вычислить полученный двойной интеграл по области *D* – проекции поверхности σ на плоскость *XOY*.

Вычисление криволинейных и поверхностных интегралов II рода (**по координатам**)

Элемент деления



На кривой AB:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\alpha = t(A),$$

$$t(B) = \beta,$$

$$\vec{F} = (P, Q, R),$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta E = (\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}) =$$

$$= P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta z$$

На поверхности

$$\sigma : z = z(x, y), \quad \overline{N} = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \geq 0$$

$$\Delta\sigma_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z^i_y)^2}\,\Delta S_i$$

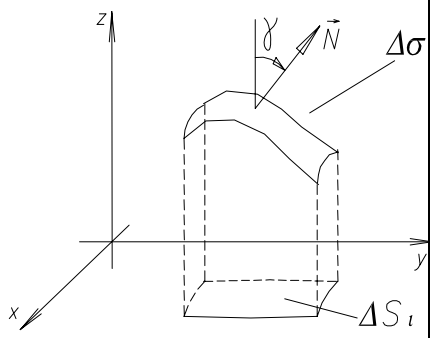
$$\vec{V} = (P, Q, R),$$

$$\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{n^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$\Delta\Pi = (\vec{V}, \vec{n^0})\Delta\sigma =$$

$$= (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\Delta\sigma =$$

$$= P\Delta y\Delta z + Q\Delta x\Delta z + R\Delta x\Delta y$$



Интеграл **меняет знак** при изменении направления интегрирования	Основное свойство	Интеграл **меняет знак** при изменении выбора стороны поверхности

Вычисление

абота E вектора силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки из A в B:

$$E = \int_{AB} (\vec{F}, \overrightarrow{dr}) = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + R(x(t), y(t), z(t))z'_t)dt$$

Поток Π векторного поля $\vec{V}$ через поверхность σ :

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{V}, \vec{n^0})d\sigma = \iint_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} (P(x, y, z(x, y))\cos\alpha + Q(x, y, z(x, y))\cos\beta + R(x, y, z(x, y))\cos\gamma)\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy =$$

$$= \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz \pm \iint_{Dxy} R(x, y, z(x, y)dxdy$$

Правило

Чтобы вычислить криволинейный интеграл по координатам (II рода), нужно привести его к определенному интегралу:

1) в подынтегральном выражении вместо переменных x,y,z и дифференциалов dx, dy dz подставить их выражения из параметрических уравнений линии интегрирования;
2) взять определенный интеграл в пределах изменения параметра t от точки A до точки B.

Чтобы вычислить поверхностный интеграл по координатам (II рода), нужно привести его к двойному интегралу:

1) выбрать знак +, если угол γ между нормалями к поверхности и осью OZ острый, и знак –, если угол γ – тупой;
2) вместо z подставить его выражение из уравнения поверхности;
3) элемент поверхности dσ заменить дифференциальным выражением $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$;
4) вычислить полученный двойной интеграл по области D_{xy} – проекции поверхности σ на плоскость XOY.