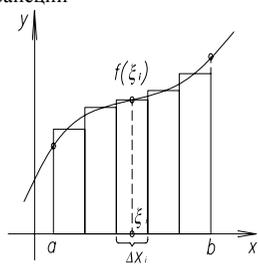
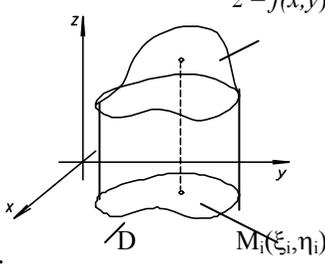
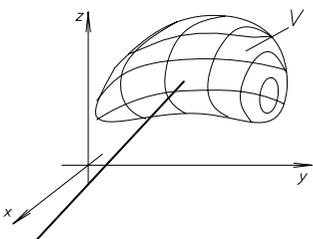
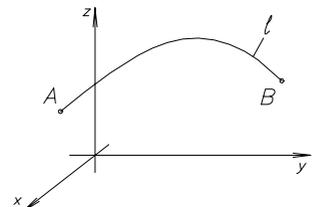
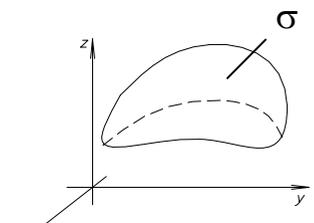


ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)

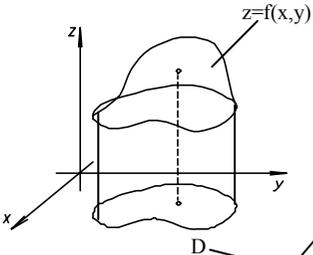
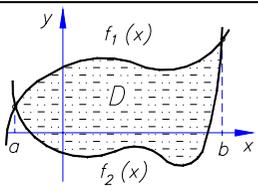
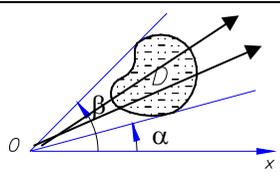
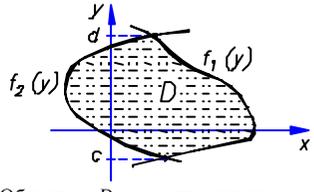
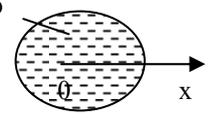
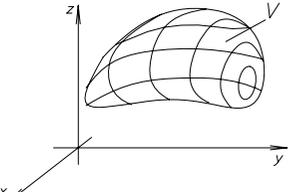
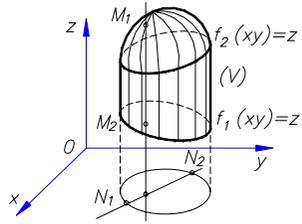
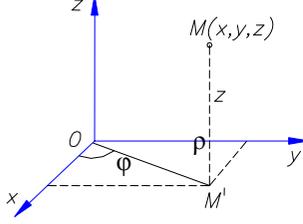
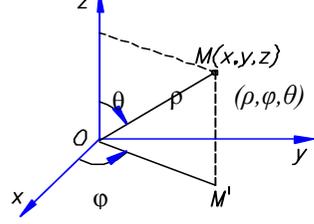
<p>Определение частной производной.</p> <p>Если в точке $M(x,y)$ существует предел отношения частного приращения ФНП $z = f(x,y)$ по одному из ее аргументов к приращению этого аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то этот предел называется частной производной ФНП по этому аргументу в точке $M(x,y)$:</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x};$ $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$ <p>Правило. Чтобы найти частную производную ФНП по одному из ее аргументов, надо все остальные аргументы ФНП считать постоянными и применять правила дифференцирования и таблицу производных функции одного аргумента, по которому берется частная производная</p>	<p>Градиент функции $F(x, y, z)$:</p> $\overrightarrow{grad} F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$ <p>Градиент функции в точке характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.</p> <p>Производная по направлению</p> <p>Вектор направления $\vec{l} = (m, n, p)$;</p> <p>Орт направления:</p> $\vec{l}^0 = \frac{(m, n, p)}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma);$ <p>Производная по направлению равна скалярному произведению градиента на орт направления:</p> $\frac{\partial F}{\partial l} = (\overrightarrow{grad} F, \vec{l}^0) =$ $= \frac{\partial F}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial F}{\partial z} \cos \gamma$	<p>Экстремум функции двух переменных</p> <p>1. Необходимое условие существования экстремума. Если функция $f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.</p> $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$ <p>2. Достаточные условия существования экстремума.</p> <p>Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$. Тогда</p> <p>а) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ – локальный минимум;</p> <p>б) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 экстремума нет;</p> <p>в) если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.</p>
<p>Производные сложных функций</p> <p>$z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$;</p> <p>$u, v$ – промежуточные аргументы, x, y – основные аргументы.</p> $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$	<p>Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$</p> <p>Скалярное произведение $(\overrightarrow{grad} F(M_0), \overrightarrow{M_0 M}) = 0$,</p> <p>или</p> $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$	<p>Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Найти точки, принадлежащие области, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Вычислить значения функции в этих точках. 2. Заменить одну из независимых переменных из уравнения границы области и найти наибольшее и наименьшее значения получившейся функции одного аргумента на отрезке изменения этого аргумента: вычислить значения функции в критических точках первого порядка и на концах отрезка. 3. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.
<p>Производные неявно заданных функций</p> $F(x,y,z) = 0, \Leftrightarrow z = f(x,y).$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$	<p>Уравнение нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$</p> <p>векторное произведение</p> $\left[\overrightarrow{grad} F(M_0), \overrightarrow{M_0 M} \right] = \vec{0},$ <p>или</p> $\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$	
<p>Полный дифференциал ФНП</p> $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$ <p>Полный дифференциал ФНП равен сумме ее частных дифференциалов: $dz = d_x z + d_y z$.</p>		

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Интегралы от скалярной функции

	Определенный	Двойной	Тройной	Криволинейный I рода	Поверхностный I рода
Ω	$M \in R_1$ $\Omega: \{\forall x \in [a, b]\}$ отрезок оси OX	$M \in R_2$ Ω -область D в плоскости XOY S -площадь D	$M \in R_3$ Ω – область трехмерного пространства. V -некоторый объем.	$M \in R_3$ Ω -дуга кривой l в R_3	$M \in R_3$ Ω -часть поверхности σ в R_3
$\Delta\Omega$ M_i	$\Delta\Omega = \Delta x$ $M_i = \xi_i \in \Delta x_i$	$\Delta\Omega = \Delta S = \Delta x \Delta y$ $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \Delta S_i$	$\Delta\Omega = \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$	$\Delta\Omega = \Delta l$ -элемент дуги кривой $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta l_i$	$\Delta\Omega = \Delta\sigma$ -элемент поверхности $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta\sigma_i$
Определение, обозначение инт-ла	$\int_a^b f(x) dx =$ $= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$	$\iint_D f(x, y) dx dy =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$	$\iiint_V f(x, y, z) dV =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$	$\int_l f(x, y, z) dl =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i$	$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i$
Геометрический и физический смысл.	S – площадь криволинейной трапеции  $\int_a^b f(x) dx = S$ $f(x) = 1 \Rightarrow \int_a^b dx = b - a$	Уравнение поверхности: $z = f(x, y)$  $\iint_D f(x, y) dS = V_{\text{цил. тела}};$ $f(x, y)$ – плотность плоской пластины $D \Rightarrow \iint_D f(x, y) dS = m_D$ – масса D ; $f(x, y) = 1 \Rightarrow \iint_D dS = S_D$ – площадь D	 $f(x, y, z)$ – плотность в т.м тела V $\iiint_V f(x, y, z) dV = m_{\text{тела}V}$ $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \iiint_V dV = V_{\text{тела}V}$	 $f(x, y, z)$ – плотность в т.м кривой l $\int_l f(x, y, z) dl = m_{\text{кривой} l}$ $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \int_l dl = \text{длина} l$	 $f(x, y, z)$ – плотность в т.м поверхности σ $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = m_{\text{поверхности}}$ $f(x, y, z) = 1 \Rightarrow \iint_{\sigma} d\sigma = \text{площадь} \sigma$

Вычисление кратных интегралов

Д В О Й Н О Й И Н Т Е Г Р А Л	 <p>При вычислении двойного интеграл сводится к повторному (двукратному):</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y) dx$	<p>Декартова система координат (ДСК)</p>  <p>Область D – правильная в направлении оси OY.</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x, y) dy$ <p>Внутренний интеграл меняется от кривой $y=f_2(x)$ до кривой $y=f_1(x)$, внешний – от прямой $x=a$ до прямой $x=b$</p>	<p>Полярная система координат (ПСК)</p>  $x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi$ $dS = dx dy = \rho d\rho d\varphi$ $\iint_D f(x, y) dS = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_2(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho$ <p>ρ меняется от кривой до кривой – границ области D – в направлении стрелок на рис., φ меняется от α до β.</p>	
	 <p>Область D – правильная в направлении оси OX</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{f_2(y)}^{f_1(y)} f(x, y) dx$ <p>Внутренний интеграл меняется от кривой $x=f_2(y)$ до кривой $x=f_1(y)$, внешний – от прямой $y=c$ до прямой $y=d$.</p>	 $x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi$ $dS = dx dy = \rho d\rho d\varphi$ $\iint_D f(x, y) dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho$		
Т Р О Й Н О Й И Н Т Е Г Р А Л	 <p>При вычислении тройной интеграл сводится к повторному (трехкратному):</p> $I = \iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$	<p>ДСК</p>  <p>Внутренний интеграл меняется от поверхности до поверхности, средний – от кривой до кривой в области D, внешний – от прямой до прямой в области D. Пределы интегрирования зависят от переменных внешних интегралов или постоянны, если граница области совпадает с плоскостями координатной сетки: $x = const, y = const, z = const$</p>	<p>Цилиндрическая (ЦСК)</p>  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z;$ $dV = \rho d\rho d\varphi dz; x^2 + y^2 = \rho^2;$ $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\varphi, \rho)}^{z_2(\varphi, \rho)} f(\varphi, \rho, z) dz$ <p>Пределы интегрирования постоянны, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const, \rho = const, z = const$.</p>	<p>Сферическая (ССК)</p>  $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta,$ $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta,$ $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} f(\varphi, \rho, \theta) \rho^2 d\rho$ <p>Пределы интегрирования постоянны, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const, \rho = const, \theta = const$.</p>