

Интегральное исчисление функции нескольких переменных

§ Определение интегралов двойного, тройного, криволинейного по длине дуги (первого рода), поверхностного по площади поверхности (первого рода)

Пусть функция $f(M)$, $M \in R_n$ определена на некотором множестве θ .

Произвольное разбиение множества θ на n непересекающихся элементов так, что

$$\theta = \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

будем обозначать символом $T(\theta)$ или просто T .

Выберем на каждом элементе $\Delta\theta_i$ произвольную точку M_i и составим сумму:

$$J(T, M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\theta_i$$

Определение интегральных сумм	Функция $J(T, M_i)$ называется интегральной суммой функции $f(M)$, соответствующей данному разбиению T и данному выбору точек M_i на множестве θ .
--------------------------------------	---

Определение предела интегральных сумм	Число J называется пределом интегральных сумм $J(T, M_i)$ при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta\theta_i \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что для всякого разбиения T , у которого $\lambda < \delta$, выполняется неравенство $ J(T, M_i) - J < \varepsilon$ при любом выборе точек M_i на элементах $\Delta\theta_i$.
--	--

Определение интегралов	Если существует $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} J(T, M_i) = J$, то число J называется интегралом от функции $f(M)$ по множеству θ и обозначается так: $J = \int_{\theta} f(M) d\theta = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\theta_i,$ а функция $f(M)$ называется интегрируемой на множестве θ
-------------------------------	---

В зависимости от того, каково множество θ , на котором определена функция $f(M)$, получают двойные, тройные, криволинейные 1-го рода, поверхностные 1-го рода интегралы:

Интеграл	Точки $M_i \in R_n$ принадлежат	Интерпретация		
		множества θ	функции $f(M) \geq 0$	интеграла
Двойной $\iint_D f(M) dS$	двухмерному пространству R_2	Плоская область D плоскости xOy , имеющая площадь S (квадрируемая)	1. Аппликата поверхности $z = f(M)$; 2. Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке области D	1. Объём цилиндрического тела с основанием D , ограниченного сверху поверхностью $z = f(M)$; 2. Масса плоской пластины D
Тройной $\iiint_V f(M) dV$	трёхмерному пространству R_3	Пространственное тело V , имеющее объём V (кубируемое)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке тела V	Масса тела V
Криволинейный 1-го рода $\int_l f(M) dl$	трёхмерному пространству R_3	Кривая l , имеющая длину l (спрямляемая)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке кривой l	Масса кривой l
Поверхностный 1-го рода $\iint_\sigma f(M) d\sigma$	трёхмерному пространству R_3	Поверхность σ , имеющая площадь σ (квадрируемая)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке поверхности σ	Масса поверхности σ

§ Основные свойства интегралов

Свойство 1 (линейности)	Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ интегрируемы на множестве θ , то линейная комбинация этих функций $\alpha f(M) + \beta \varphi(M)$ также интегрируема на множестве θ , причём $\int_\theta (\alpha f(M) + \beta \varphi(M)) d\theta = \alpha \int_\theta f(M) d\theta + \beta \int_\theta \varphi(M) d\theta$, где α и β – любые числа.
--------------------------------	--

Свойство 2 (аддитивности)	<p>Если функция $f(M)$ интегрируема на множестве θ, то при разбиении этого множества на непересекающиеся элементы $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ($\theta = \sum_{i=1}^k \theta_i$):</p> $\int_{\theta} f(M) d\theta = \int_{\theta_1} f(M) d\theta + \int_{\theta_2} f(M) d\theta + \dots + \int_{\theta_k} f(M) d\theta$
--	--

Свойство 3 (сохранения знака)	<p>Если на множестве θ функция $f(M) \geq 0$, то и $\int_{\theta} f(M) d\theta \geq 0$. Если, кроме этого, функция $f(M)$ непрерывна на множестве θ и хотя бы в одной точке этого множества $f(M) > 0$, то $\int_{\theta} f(M) d\theta > 0$.</p>
--	---

Свойство 4 (сравнения)	<p>Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ интегрируемы на множестве θ, причём $\varphi(M) \leq f(M)$ для всех точек этого множества, то $\int_{\theta} \varphi(M) d\theta \leq \int_{\theta} f(M) d\theta$.</p>
---	---

Свойство 5 (теорема о среднем значении)	<p>Пусть функция $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве θ. Тогда на этом множестве существует хотя бы одна точка M_0, что $\int_{\theta} f(M) d\theta = f(M_0) \cdot \theta$.</p> <p>Значение функции в точке M_0 называется средним значением на множестве θ: $f(M_0)$ – среднее значение.</p>
--	---

Теорема существования интеграла от ФНП	<p>Всякая функция $f(M)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $\bar{\theta}$, интегрируема на этом множестве. (Ограниченное множество в R_2 можно накрыть кругом конечного радиуса, в R_3 – поместить в шар конечного радиуса. В замкнутом множестве граница множества $\bar{\theta}$ принадлежит этому множеству).</p>
---	--

§ Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

Определение правильной в направлении оси oY области	<p>Область D называется правильной в направлении оси oY, если любая прямая, параллельная оси oY, пересекает границу области не более чем в двух точках. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси oX.</p>
---	---

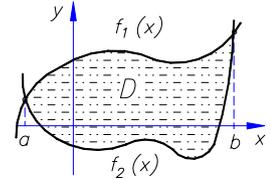
**Определение
двукратного
интеграла**

Двукратным интегралом по правильной в направлении оси oY области D от непрерывной в \bar{D} функции $f(x, y)$ называется число

$$J_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x, y) \left. \begin{array}{l} y = \varphi_1(x) \\ dx \\ y = \varphi_2(x) \end{array} \right\}$$

причём первообразная внутреннего интеграла $F(x, y)$ находится при постоянном x : $x = const$,

где область $D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_1(x) \end{array} \right\}$

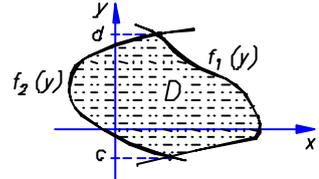


Двукратным интегралом по правильной в направлении оси oX области D от непрерывной в \bar{D} функции $f(x, y)$ называется число

$$J_D = \int_c^d dy \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx = \int_c^d F(x, y) \left. \begin{array}{l} x = \psi_1(y) \\ dy \\ x = \psi_2(y) \end{array} \right\}$$

причём первообразная внутреннего интеграла $F(x, y)$ находится при постоянном y : $y = const$,

где область $D = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} c \leq y \leq d \\ \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y) \end{array} \right\}$



Пример. Вычислить двукратный интеграл $J_D = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2) dy$.

**Свойство 1
(аддитивности
двукратного
интеграла)**

Если правильную в направлении оси oY область D разбить на две подобласти D_1 и D_2 прямой, параллельной оси oY или oX , то

$$J_D = J_{D_1} + J_{D_2}$$

Свойство 2 (теорема об оценке двукратного интеграла)	Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения непрерывной в ограниченной замкнутой области \bar{D} функции $f(x, y)$, а S – площадь области D . Тогда: $mS \leq \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy \leq MS$
--	--

Свойство 3 (теорема о среднем)	Двукратный интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по области \bar{D} , имеющей площадь S , равен произведению площади S на значение подынтегральной функции в некоторой точке P_0 области \bar{D} , т.е. $J_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy = f(P_0)S$
--	---

Теорема (о связи двойного и двукратного интеграла)	Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D : $D: \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy$ где элемент площади $dS = dx dy$ в декартовой системе координат.
---	---

Правило вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат (ДСК)

Д В О Й Н О Й И Н Т Е Г Р А Л		Декартова система координат (ДСК)	
		Область D – правильная в направлении оси OY .	Внутренний интеграл меняется от кривой $y=f_2(x)$ до кривой $y=f_1(x)$, внешний – от прямой $x=a$ до прямой $x=b$.
		Область D – правильная в направлении оси OX .	Внутренний интеграл меняется от кривой $x=f_2(y)$ до кривой $x=f_1(y)$, внешний – от прямой $y=c$ до прямой $y=d$.
При вычислении двойной интеграл приводится к повторному (двукратному): $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y) dx$			

Пример. Вычислить интеграл $\iint_D xy^2 dx dy$,

если область D ограничена линиями: $x = 0$; $y = x$; $y = 2 - x^2$; ($x \geq 0$).

Замечание. Геометрический смысл теоремы о среднем значении для двойного интеграла

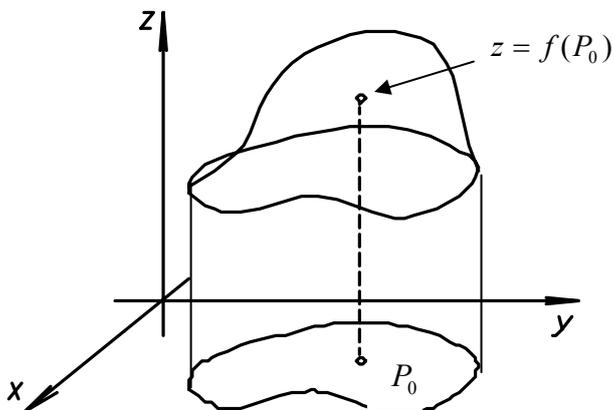
$$\iint_D f(x, y) dx dy = J_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y) dy = f(P_0) S$$

заключается в том, что

объём цилиндрического тела с основанием D в плоскости XoY (площадь основания D равна S),

ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$,

равен объёму цилиндра с таким же основанием и высотой $f(P_0)$.



Вопросы к экзамену:

Какой геометрический смысл имеет теорема об оценке двойного интеграла?

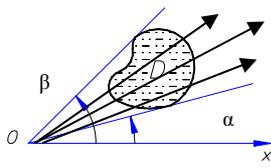
Какой геометрический смысл имеет интеграл $\iint_D f(x, y) dS$?

Какой геометрический смысл имеет интеграл $\iint_D dS$?

§ Замена переменных в двойном интеграле

<p>Теорема (о замене переменных в двойном интеграле)</p>	<p>Если 1. Преобразование $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ переводит ограниченную замкнутую область D в ограниченную замкнутую область D^* и является взаимно однозначным;</p> <p>2. Функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ имеют в D^* непрерывные частные производные первого порядка;</p> <p>3. Отличен от нуля якобиан Ia: $Ia = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ в D^*;</p> <p>4. Функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то справедлива формула замены переменных в двойном интеграле:</p> $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) Ia du dv$
---	---

Правило замены переменной в двойном интеграле	<p>Чтобы перейти от декартовой системы координат xOy к криволинейной uOv, нужно</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) в подынтегральной функции вместо переменных x и y подставить их выражения через новые переменные, 2) элемент площади $dS = dxdy$ заменить модулем якобиана, умноженным на дифференциалы новых переменных $dxdy = Ja dudv$, 3) преобразовать уравнения границы области D в уравнения границы области D^*.
--	--

Полярная система координат (ПСК)	
 <p style="text-align: center;">$x^2 + y^2 = \rho^2$</p>	$x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi; Ja = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$ $dS = dxdy = \rho d\rho d\varphi$ $\iint_D f(x, y) dS =$ $= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_2(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho$ <p>ρ меняется от кривой, на которой лучи из полюса входят в область интегрирования, до кривой, на которой лучи из полюса выходят из области интегрирования – границ области D, φ меняется от α до β – углами между касательными к области интегрирования лучами и полярной осью. Если полюс находится внутри области интегрирования, то $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.</p>

Пример. Вычислить интеграл $\iint_D \exp(x^2 + y^2) dxdy$, где область D : $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

Важное замечание. Пределы интегрирования внутреннего интеграла могут быть **постоянными** только в том случае, когда **граница** области интегрирования состоит из **линий координатной сетки**.

В декартовой системе координат – это **прямые, параллельные осям координат**, в полярной системе координат – это **окружности с центром в полюсе и лучи, выходящие из полюса**.

Во всех остальных случаях хотя бы один из пределов внутреннего интеграла является функцией внешней переменной.

Физические приложения двойных интегралов. Пусть D – материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область на плоскости XoY) с плотностью $\mu(x, y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

№	Физический смысл	Формула
1	Масса m пластинки	$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$
2	Статические моменты пластинки M_x и M_y относительно осей oX и oY	$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy$; $M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy$
3	Координаты центра тяжести (x_0, y_0) пластинки	$x_0 = \frac{M_y}{m}$; $y_0 = \frac{M_x}{m}$
4	Моменты инерции пластинки I_x и I_y относительно осей oX и oY	$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy$; $I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy$
5	Момент инерции пластинки I_0 относительно начала координат	$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy$

§ Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат (ДСК)

Определение правильной трёхмерной области	<p>Область V трёхмерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью σ, называется правильной, если она удовлетворяет следующим условиям:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) всякая прямая, параллельная оси oZ, проведённая через точку области V, пересекает поверхность σ не более чем в двух точках; 2) вся область V проектируется на плоскость XoY в правильную двумерную область D; 3) всякая часть области V, отсечённая плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (XoY, XoZ, YoZ), обладает свойствами 1 и 2 (внутри области V нет дырок).
--	--

Определение трёхкратного интеграла	<p>Трёхкратным интегралом J_V по правильной области V называется число</p> $J_V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$
---	---

Внутренний интеграл берётся от поверхности $z = z_1(x, y)$ до поверхности $z = z_2(x, y)$ – поверхностей входа и выхода стрелок, параллельных оси oZ , пересекающих область V . Первообразную внутреннего интеграла находят в предположении о том, что аргументы, не входящие под знак дифференциала внутреннего интеграла, постоянны:

$$J_V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y, z) \Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dy$$

$x = const;$
 $y = const$

В результате получают двукратный интеграл по области, являющейся проекцией области V на плоскость XOY .

Пример. Вычислить трёхкратный интеграл J_V от функции $f(x, y, z) = z$, если область V ограничена поверхностями: $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

Свойства линейности, аддитивности, теоремы об оценке, среднем значении трёхкратного интеграла аналогичны соответствующим свойствам и теоремам для двукратного интеграла. В частности, справедлива теорема о связи тройного и трёхкратного интеграла.

Теорема (о связи тройного и трёхкратного интеграла)	<p>Тройной интеграл от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по правильной области V равен трёхкратному интегралу по той же области:</p> $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = J_V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz$
--	--

Вопросы к экзамену:

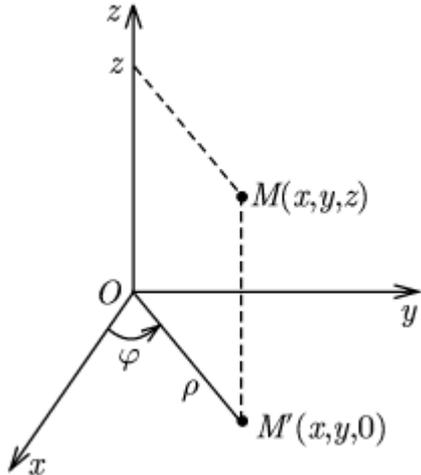
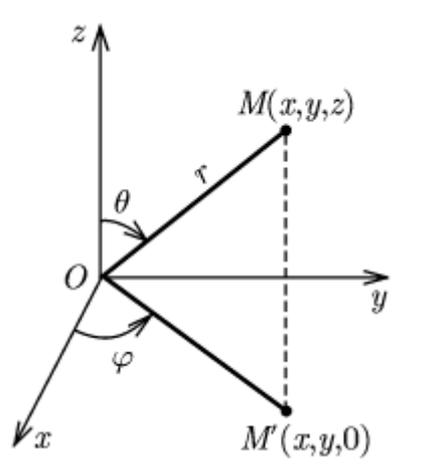
Какую интерпретацию может иметь теорема об оценке тройного интеграла?

Какую интерпретацию может иметь интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$?

Какую интерпретацию может иметь интеграл $\iiint_V dx dy dz$?

§ Замена переменных в тройном интеграле

Правило замены переменной в тройном интеграле	<p>Чтобы перейти от декартовой системы координат $Oxyz$ к криволинейной $Ouvw$, нужно</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) в подынтегральной функции вместо переменных x, y и z подставить их выражения через новые переменные, 2) элемент объёма $dV = dx dy dz$ заменить модулем якобиана, умноженным на дифференциалы новых переменных $dx dy dz = Ja du dv dw$, 3) преобразовать уравнения границы области V в уравнения границы области V^*.
--	---

Цилиндрическая система координат (ЦСК)	Сферическая система координат (ССК)
	
<p> $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z;$ $Ia = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $Ia = \rho;$ $dV = \rho d\rho d\varphi dz;$ $x^2 + y^2 = \rho^2;$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq \infty; -\infty \leq z \leq \infty;$ $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\varphi, \rho)}^{z_2(\varphi, \rho)} f(\rho, \varphi, z) dz$ Пределы интегрирования постоянны для внешнего, среднего и внутреннего интеграла, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const, \rho = const, z = const$ (область интегрирования – цилиндрические сегменты). </p>	<p> $x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$ $z = \rho \cos \theta;$ $Ia = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \end{vmatrix}$ $Ia = \rho^2 \sin \theta;$ $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2;$ $dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta;$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \rho \leq \infty;$ $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{\rho_1(\varphi, \theta)}^{\rho_2(\varphi, \theta)} f(\varphi, \rho, \theta) \rho^2 d\rho.$ Пределы интегрирования постоянны для внешнего, среднего и внутреннего интеграла, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const, \rho = const, \theta = const$ (область интегрирования – шаровые сегменты). </p>

Пример. Вычислить $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, V: x^2 + y^2 = 2x; y = 0; z = 0; z = a (y \geq 0).$

Пример. Вычислить $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z (a > 0).$

Физические приложения тройных интегралов. Пусть V – материальное тело (кубируемая область в пространстве $Oxyz$) с плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

№	Физический смысл	Формула
1	Масса m тела V	$m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz$

2	Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy	$M_{yz} = \iiint_V x\mu(x, y, z) dx dy dz ;$ $M_{zx} = \iiint_V y\mu(x, y, z) dx dy dz ;$ $M_{xy} = \iiint_V z\mu(x, y, z) dx dy dz .$
3	Координаты центра тяжести тела	$x_0 = \frac{M_{yz}}{m} ; \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m} ; \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m} .$
4	Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy .	$I_{yz} = \iiint_V x^2 \mu(x, y, z) dx dy dz ;$ $I_{zx} = \iiint_V y^2 \mu(x, y, z) dx dy dz ;$ $I_{xy} = \iiint_V z^2 \mu(x, y, z) dx dy dz .$
5	Моменты инерции тела относительно осей координат Ox, Oy, Oz .	$I_x = I_{yz} + I_{xy} ; \quad I_y = I_{zx} + I_{xy} ;$ $I_z = I_{zx} + I_{yz} ;$
6	Момент инерции тела относительно начала координат.	$I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) dx dy dz$
7	Ньютоновский потенциал поля тяготения тела V в точке (x_0, y_0, z_0) ; где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$	$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_V \frac{\mu(x, y, z)}{r} dx dy dz$
8	Сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 телом V , где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, γ – гравитационная постоянная.	$F_x = \gamma m_0 \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right _{x=x_0} = \gamma m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} dx dy dz ;$ $F_y = \gamma m_0 \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right _{y=y_0} = \gamma m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} dx dy dz ;$ $F_z = \gamma m_0 \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right _{z=z_0} = \gamma m_0 \iiint_V \mu(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} dx dy dz ;$