БАНК ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

* Изменить порядок интегрирования $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\sqrt{4y-y^2}}^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{2\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

* Найти площадь плоской области, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

* Вычислить $\iint\limits_{(D)} \left(3 + arcctg\,\dfrac{x}{y}\right) dxdy$, где (D) – область, заданная неравенствами $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$, $y \geq x$.

* Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность распределения массы

$$\gamma(x,y,z) = \left(2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right)^{-1}.$$

* Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 2$, $y = 0$, $z = 0$, ($y \geq 0$, $z \geq 0$).

* Найти длину дуги кривой $(l): x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$ от точки $O(0;0;0)$ до $A(3;3;2)$.

* Найти работу, которую совершает сила $\overline{\mathbf{F}} = \{xy\,;0\}$ при перемещении материальной точки вдоль линии $(l): \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$ из точки $M_1\,(0;3)$ в точку $M_2\,(2;0)$.

* Найти площадь прямоугольника, вырезаемого из плоскости $-2y + z = 2$ плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 2$.

* Изменить порядок интегрирования $\int\limits_4^6 dy \int\limits_{y/2}^{y^2/8} f(x,y)dx + \int\limits_6^8 dy \int\limits_{y/2}^{6-y/4} f(x,y)dx$.

* Найти массу плоской области, ограниченной линиями $xy = 1$, $y = x^2$, $y = 4$, если плотность распределения массы $\gamma(x,y) = 2x$.

* Найти площадь плоской области, заданной неравенствами $x \geq 0$, $y \geq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x^2 + y^2 \leq 4y$.

* Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z + y = a$, $z - y = a$, $x = a$, $x = 0$, $z = 0$, если плотность распределения массы $\gamma(x,y,z) = x$.

* Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 5 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 5$, $y = 0$ ($y \geq 0$).

* Найти массу кривой $(l): y = \dfrac{1}{3}x^3$ ($0 \leq x \leq 1$), если плотность распределения массы $\gamma(x,y) = x^3$.

* Найти работу, которую совершает сила $\overline{\mathbf{F}} = \{x; y\}$ при перемещении материальной точки вдоль линии (l): $y = \frac{1}{3}x^3$ из точки $M_1\ (0;0)$ в точку $M_2\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

* Найти массу поверхности, вырезаемой из конуса $z^2 = 0{,}5(x^2 + y^2)$ плоскостями $z = 0$, $z = \sqrt{2}$, $y = 0$ ($y \geq 0$), если поверхностная плотность $\gamma(x, y, z) = y$.

* Найдите среднее значение функции $y = 1 + (x-1)^2$ на отрезке [0,3]. Сделайте геометрическую иллюстрацию.

* Вычислите интеграл $\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4}dx$.

* Найдите интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$.

* Найдите интеграл $\int \cos^5 x dx$.

* Найдите интеграл $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}dx$.

* Найдите интеграл $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 2}$.

* Найдите интеграл $\int tg^4 x dx$.

* Запишите любую интегральную сумму Римана для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$, если $n = 3$.

* Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где область *D* ограничена окружностью $x^2 + y^2 = ax$.

* Вычислите интеграл $\int\limits_l xyds$ по периметру прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$.

* Определите объём тела, ограниченного поверхностями $az = x^2 + y^2$, $2az = a^2 - x^2 - y^2$.

* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = (x + y^2)\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + \left(\sqrt{x^2 + 1} + z\right)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности *S*: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 2$, $z = 3$.

* Определите массу сферического слоя между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, если плотность в каждой его точке обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат (перейти к сферическим координатам).

* Вычислите интеграл $\int\limits_{AB} 2xydx + x^2dy$ по любой линии от точки $A\left(1, \frac{\pi}{6}\right)$ до точки $B\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

* Исследуйте на сходимость интеграл $\int\limits_{0}^{1/2} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.
* Вычислите интеграл $\int\limits_{\gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy$, где γ – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против часовой стрелки.
* Вычислите объём тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.
* Измените порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x,y)dy$.
* Не вычисляя интегралы $I_1 = \int\limits_4^9 e^{\sqrt{x}} dx$ и $I_2 = \int\limits_4^9 e^{x^2} dx$, сравните их по величине.
* Найдите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2/25$, $x^2 + y^2 = z/5$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0, \quad y \ge 0)$, если $\mu(x,y,z) = 14yz$.
* Определите длину дуги кривой $x = \dfrac{t^6}{6}$, $y = 2 - \dfrac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осями координат.
* Найдите объём тела, ограниченного поверхностями $z = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $z = 24x + 2$.

поле образовано силой $\vec{F} = (x + y^2)\vec{i} + (2xy - 8)\vec{j}$.
* Вычислите работу при перемещении материальной точки $A(1,1)$ до $B(2,3)$. Зависит ли работа от пути перемещения?
* Найдите интеграл $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + 2\cos x}} dx$.
* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = (8yz - x)\vec{i} + (x^2 - 1)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $2x + 3y - z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
* Проверьте, будет ли векторное поле $\vec{a} = (-3x + yz)\vec{i} + (-3y + xz)\vec{j} + (xy - 3z)\vec{k}$ потенциальным? Найдите потенциал, если он существует.
* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = (x + 1 + \sqrt{z})\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (\sin x + z)\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

* Найдите объём тела, ограниченного цилиндром $2z = x^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$ и $3x + 2y = 12$.
* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\vec{i}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности S: $z = 1 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
* Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + x\vec{j} + y^2\vec{k}$ вдоль контура γ: $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin t$ в сторону возрастания параметра t.
* Определите массу пирамиды, образованной плоскостями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, если плотность в каждой точке её равна аппликате этой точке.

* Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = z\vec{i} + y^2\vec{j} - x\vec{k}$ вдоль контура γ : $x = \sqrt{2}\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = \sqrt{2}\cos t$ в сторону возрастания параметра t.

* Вычислите определенный интеграл $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$.

* Вычислите интеграл $\int\limits_0^{16} \sqrt{256 - x^2}dx$.

* Найдите площадь области, ограниченной линиями

$$y = (x-2)^3, \;\; y = 4x - 8.$$

* Найдите длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi).$$

* Найдите несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + x + 1}.$$

* Найдите несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}.$$

* Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$

* Вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx.$$

* Вычислите определенный интеграл

$$\int\limits_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}dx.$$

* Найдите площадь области, ограниченной линиями

$$y = x\sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0 \; (0 \le x \le 3).$$

* Найдите длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \; 0 \le t \le 2\pi.$$

* Найдите несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x + x^2}.$$

* Найдите несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{3}^{6} \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$$

* Линейная плотность тонкого неоднородного стержня *AB* длиной 5 *см* определяется по формуле $\mu(x)$ = 10x + 2, где x – длина стержня, отсчитываемая от точки *A*. Найдите массу стержня.

* Пластинка *D* задана ограничивающими её кривыми $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 16$, $x \ge 0$, $y \ge 0$. Поверхностная плотность $\mu(x, y) = \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2}$. Найдите массу пластинки.

* Найдите длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

* Вычислите тройной интеграл, переходя к сферическим координатам $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dz$.

* Вычислите интеграл $\int\limits_{0}^{1} x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$.

* Пластинка *D* задана ограничивающими её кривыми $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$, $x \le 0$, $y \ge 0$. Поверхностная плотность $\mu(x, y) = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2}$. Найдите массу пластинки.

* Измените порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y)dx$.

* Найдите массу дуги окружности $x^2 + y^2 = a^2$, лежащей в первом квадранте, если линейная плотность $\mu(x, y) = xy$.

* Вычислите интеграл $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$.

* Найдите ротор векторного поля $\bar{c} = \left[\bar{a}, \bar{b}\right]$, если $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

* Найдите длину кривой $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$ от точки $y = 1$ до точки $y = e$.

* Найдите объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \dfrac{2}{\pi}x$, вокруг оси *OX*.

* Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + yz\vec{k}$ через замкнутую поверхность S:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$
* Вычислите интеграл $\int \frac{3x+2}{x^2+8x+17}dx$.
* Вычислите интеграл $\oint\limits_L (2xy - y)dx + x^2 dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4$.
* Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.
* Вычислите тройной интеграл, переходя к сферическим координатам $\iiint\limits_{(V)} xyzdxdydz$, где
$$V: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0, \\ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0). \end{cases}$$
* Не вычисляя интегралы, выясните, какой из интегралов больше $I_1 = \int\limits_0^1 x^2 \sin^2 xdx$ или
$I_2 = \int\limits_0^1 x \sin^2 xdx$ (ответ обосновать).
* Вычислите объём тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $z + x = 9$.
* Найдите объём тела, образованного вращением одной арки синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси *OX*.
* Определите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $z = h$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.
* Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}$.
* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность
$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, z = 1, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0. \end{cases}$$
* Определите, является ли поле $\bar{a} = (2x - 3yz)\bar{i} + (3y^2 - 3xz)\bar{j} + (3z^2 - 3xy)\bar{k}$ потенциальным, и найдите его потенциал, если он существует.
* Используя свойство определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования, вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int\limits_0^x \left(e^{t^2} - 1\right)dt}{x^3}$.
* Вычислите интеграл $\int\limits_{\gamma} 2ydx + (x + y)dy$, где γ – контур, определяемый линиями с уравнениями $y^2 = x$ и $x = 4$.

* Найдите поток векторного поля $\bar{a} = (yz+x)\bar{i} + (x^2+y)\bar{j} + (xy^2+z)\bar{k}$ через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя) $x^2+y^2+z^2=2z$.

* Вычислите тройной интеграл, переходя к цилиндрическим координатам $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$.

* Вычислите работу силы $\bar{F} = \cos y \cdot \bar{i} - \sin x \cdot \bar{j}$ при перемещении материальной точки вдоль отрезка AB, где $A(2, -2)$, $B(-2,2)$.

* Найдите поток векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + 2zy\bar{j} + 2z^2\bar{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} x^2+y^2=1-z, \\ z=0. \end{cases}$

* Интеграл $\int\limits_0^1 \left((2-x)-x^3 dx\right)$ определяет площадь. Постройте соответствующую геометрическую фигуру.

* Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dV$, где V: $\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ z=2. \end{cases}$

* Найдите площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t\text{-}\sin t)$, $y = a(1\text{-}\cos t)$.

* Найдите площадь части гиперболического параболоида $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

* Оцените интеграл $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} dx$.

* Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$, $y = x/\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}x$.

* Найдите среднее значение функции $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$.

* Найдите объём тела, ограниченного цилиндром $z = 9 - y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $3x+y=12$ $(y \geq 0)$.

* Используя свойство определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования, вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \left(e^{x^2}-1\right)dx}{2x^3}$.

* С помощью формулы Грина вычислите разность между интегралами $I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ и $I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, где AmB – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$ и $B(1,1)$, а AnB – дуга параболы $y = x^2$.

* Вычислите интеграл $\int \dfrac{xdx}{\sin^2 x}$.

* Найдите поток векторного поля $\vec{a} = 3x^2\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + (1-2x)\vec{k}$ через замкнутую поверхность $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0,\ z = 1. \end{cases}$

* Найдите работу силы $\vec{F} = xy\vec{i}$ при перемещении вдоль линии L ($y = \sin x$) от точки $M(\pi, 0)$ к точке $N(0, 0)$.

* Определите массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $z = h$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

* Вычислите интеграл $\oint\limits_{\gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$, где γ – контур квадрата с вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$, $D(0,-1)$. Объясните, почему интеграл по замкнутому контуру отличен от нуля?

* Найдите площадь фигуры, ограниченной двумя окружностями $\rho = 1$ и $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi$ (вне окружности $\rho = 1$).

* Составьте сумму Римана для функции $f(x) = (x+1)^2$ на отрезке [-1,3], разделив отрезок на 4 равные части и выбирая в качестве ξ_i правые концы отрезков разбиения.

* Расставьте пределы интегрирования в интеграле $\iint\limits_{(D)} f(x, y)dxdy$ по области D, ограниченной линиями $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

* Найдите массу плоской области, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$, если плотность распределения массы

$$\gamma(x, y) = xy.$$

* Вычислите интеграл $\iint\limits_{(D)} (1 - x^2 - y^2)dxdy$, где (D) – область, заданная неравенствами $(x+3)^2 + y^2 \le 9$, $y \ge 0$.

* Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = y^2$, $y + z = 2$, $x = 0$, $x = 4$.

* Найдите объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 6 - (x^2 + y^2),\ z^2 = x^2 + y^2 \quad (z \ge 0).$$

* Найдите длину дуги кривой (l): $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, где $0 \le t \le 3$.

* Найдите работу, которую совершает сила $\overline{\mathbf{F}} = \{2xy, x^2\}$, перемещая материальную точку вдоль линии (l): $y = x^3$ из точки $M_1\ (0;0)$ в точку $M_2\ (1;1)$.

* Найдите длину дуги кривой (l): $x = 2(\cos t + t\sin t)$, $y = 2(\sin t - t\cos t)$, где $0 \le t \le 2\pi$.

* Найдите работу, которую совершает сила $\overline{\mathbf{F}} = \{2x;3y\}$, перемещая точку вдоль линии (l): $y = 2x^2 + 1$ из точки $M_1\ (1;3)$ в точку M_2.