Определённый интеграл (вариант 30 из Кузнецова Л.А., гл. IV)

Вычислить интегралы:

1. $\int_0^1 x^2 \cdot \exp(3 \cdot x)\, dx = 3.64547$

2. $\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx = 23.1$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x) \cdot (1 + \cos(x))}\, dx = 0.46716$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan(x))^2}{(4 + 3 \cdot \cos(2 \cdot x))}\, dx = 0.19847$

5. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2^8 \cdot (\cos(x))^8\, dx = 109.95574$

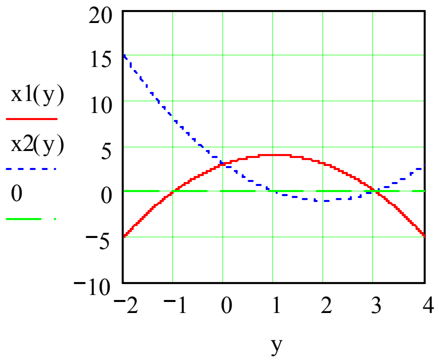
6. $\int_0^3 \frac{\exp\left[\sqrt{\frac{(3-x)}{(3+x)}}\right]}{(3+x) \cdot \sqrt{9 - x^2}}\, dx = 0.57276$

7. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 0.18117$

Вычислить площадь плоской фигуры:

8. $x1(y) := 4 - (y-1)^2$ $\quad x2(y) := y^2 - 4 \cdot y + 3$

Поставив курсор на поле графиков функций,
двойным щелчком левой кнопки мыши
открываем окно,
в котором активируем команды Grid Lines,
убираем команды Auto Grid.
Подбираем для команды
Number of Grids такие значения,
чтобы точки пересечения графиков функций
попали на линии координатной сетки.



$S := \int_0^3 (x1(y) - x2(y))\, dy$ $\quad S = 9$

9. $x3(t) := 4 \cdot (t - \sin(t))$ $\quad y(t) := 4 \cdot (1 - \cos(t))$

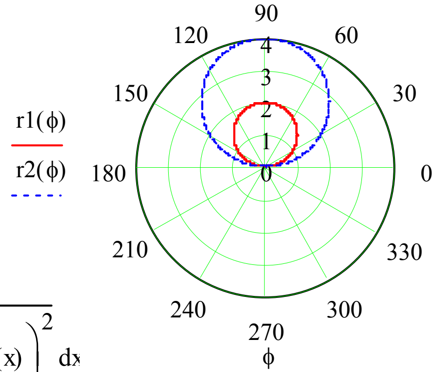
$y2 := 6$

$s1 := \int_{2 \cdot \frac{\pi}{3}}^{4 \cdot \frac{\pi}{3}} y(t) \cdot \frac{d}{dt} x3(t)\, dt$ $\quad s1 = 112.619$

$s := s1 - 6 \cdot \left(x3\left(4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - x3\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right)$ $\quad s = 20.78461$

10 $\quad r1(\phi) := 2 \cdot \sin(\phi)$ $\quad r2(\phi) := 4 \cdot \sin(\phi)$

$Sr := \int_0^{\pi} \frac{\left[(r2(\phi))^2 - (r1(\phi))^2\right]}{2}\, d\phi$



$Sr = 9.42478$

Найти длину дуги плоской кривой:

11

$y3(x) := \frac{(1 - \exp(x) - \exp(-x))}{2}$

$l := \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y3(x)\right)^2}\, dx$

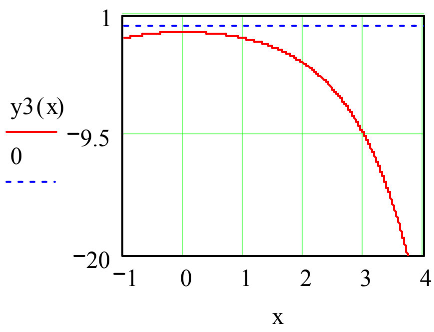
$l = 10.01787$

12 $x4(t) := \exp(t)\cdot(\cos(t) + \sin(t))$

$y4(t) := \exp(t)\cdot(\cos(t) - \sin(t))$

$$L := \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x4(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y4(t)\right)^2}\,dt$$

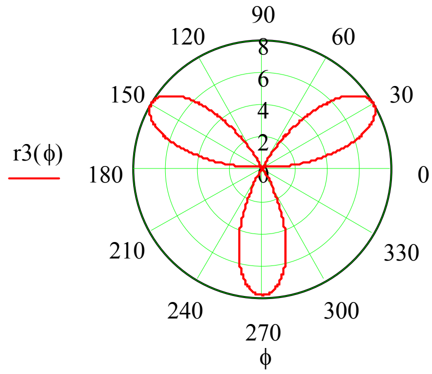
$L = 1.01038$



13 $r3(\phi) := 8\cdot\sin(3\phi)$

$$Lr := \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(r3(\phi))^2 + \left(\frac{d}{d\phi}r3(\phi)\right)^2}\,d\phi$$

$Lr = 17.81986$

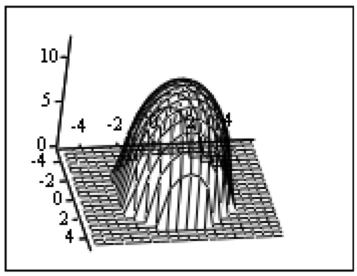


Найти объём тела:

14 $$S(z) := \pi\sqrt{16\cdot\left(1 - \frac{z^2}{144}\right)}\cdot\sqrt{9\cdot\left(1 - \frac{z^2}{144}\right)}$$

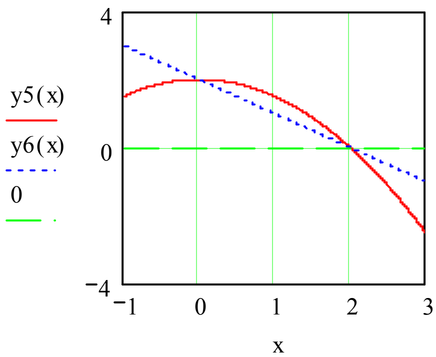
$$v := \int_0^6 S(z)\,dz \qquad v = 207.34512$$

$$Z(x,y) := \text{if}\left[\left(\left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16}\right)\right) \ge 0, \sqrt{144\left(1 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16}\right)}, 0\right]$$



Z

15 $y5(x) := 2 - \frac{x^2}{2}$ $\qquad y6(x) := 2 - x$



$$V1 := \int_0^2 \pi\cdot\left[(y5(x))^2\right]dx \qquad V2 := \int_0^2 \pi\cdot(y6(x))^2\,dx$$

$V := V1 - V2$ $\qquad V = 5.02655$

$$\int_0^2 \pi\cdot\left[(y5(x))^2 - (y6(x))^2\right]dx = 5.02655$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

16 $$\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^4 + 1)}\,dx = -0.7854$$

17 $$\int_0^2 \frac{\left(1 - \sin(\sqrt{x})\right)}{\sqrt{x}}\,dx = 1.14031$$

$$\frac{x}{x^4+1} \sim \frac{1}{x^3} \text{ при } x \to -\infty, \quad x < -1;$$

$$\frac{1 - \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \text{ при } x \to 0.$$

$$\frac{x}{x^4+1} \sim x \text{ при } x \to 0, \quad x > -1.$$