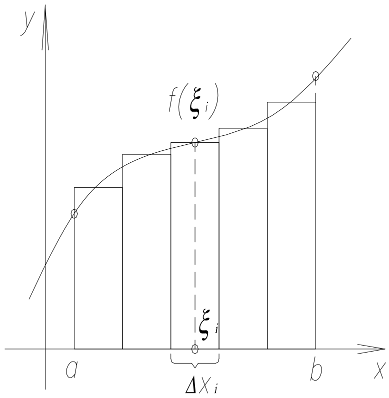
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|\Delta x_i|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<table>
<tr>
<td>Геометрический смысл определённого интеграла
(площадь криволинейной трапеции)</td>
<td>

S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x) \geq 0$,
снизу – осью OX, слева – вертикальной прямой $x = a$,
справа – вертикальной прямой $x = b$.



$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]$;

$\int_a^b f(x)dx = S$;

$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b dx = b - a$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Физический смысл определённого интеграла
(работа переменной силы, путь при неравномерном движении точки, масса неоднородного стержня)</td>
<td>

1. $F(x)$ − сила, параллельная оси $0X$ и ориентированная в положительном направлении оси $0X$, действующая на материальную точку при прямолинейном перемещении по промежутку $[a, b]$.

Работа A силы $F(x)$ при этом равна: $A = \int_a^b F(x)dx$.

2. $V(t)$ − скорость неравномерного прямолинейного движения материальной точки.
Путь S , пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$,

при этом равен: $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$.

3. $\rho(x)$ − плотность неоднородного прямолинейного стержня с концами в точках $x = a$, $\quad x = b$.

Масса m такого стержня равна: $m = \int_a^b \rho(x)dx$.

</td>
</tr>
</table>

§ Интегральные суммы и определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b]$ (где $a < b$).

Произвольное разбиение промежутка $[a, b]$

точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n элементарных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будем обозначать символом $T\,[a, b]$ или просто T.

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем на каждом элементарном промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i и составим сумму:

$$J(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Определение интегральных сумм	Функция $J(x_i, \xi_i)$ называется **интегральной суммой** функции $f(x)$, соответствующей данному разбиению $T\,[a, b]$ и данному выбору точек ξ_i на промежутках $[x_{i-1}, x_i]$.

Введем обозначение: $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$

Определение предела интегральных сумм	Число J называется **пределом интегральных сумм** $J(x_i, \xi_i)$ при $\Delta \to 0$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ такое, что **для всякого разбиения** $T\,[a, b]$, у которого $\Delta < \delta$, выполняется неравенство $\lvert J(x_i, \xi_i) - J \rvert < \varepsilon$ **при любом выборе точек** ξ_i на промежутках $[x_{i-1}, x_i]$.
Определение определённого интеграла	Функция $f(x)$ называется **интегрируемой (по Риману)** на промежутке $[a, b]$, если существует $\lim\limits_{\substack{\Delta \to 0 \\ n \to \infty}} J(x_i, \xi_i) = J$. При этом число J называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$ и обозначается так: $J = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \max\lvert\Delta x_i\rvert \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

§ Условия интегрируемости функций

(классы интегрируемых функций)

Теорема (необходимое условие)	Пусть функция $f(x)$ **интегрируема** на промежутке $[a, b]$. Тогда она **ограничена** на этом промежутке.

Примеры. 1. $f(x) = const$.

2. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1], \quad x = \dfrac{m}{n}; \\ 0, & x \in [0, 1], \quad x \neq \dfrac{m}{n}. \end{cases}$

Теорема (1-е достаточное условие)	**Непрерывная** на **замкнутом** промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом промежутке.

Следствие	Всякая **элементарная** функция интегрируема на любом промежутке, целиком лежащем в области определения этой функции (так как она непрерывна на этом промежутке).

Теорема (2-е достаточное условие)	**Кусочно непрерывная функция** (т. е. имеющая на промежутке $[a, b]$ конечное число точек разрыва I рода) интегрируема на этом промежутке.

Теорема (3-е достаточное условие)	**Монотонная ограниченная** на промежутке $[a, b]$ **функция** интегрируема на этом промежутке.

Задание: построить диаграмму взаимного расположения множеств ***О*** – ограниченных,

Н – непрерывных, ***К*** – кусочно-непрерывных, ***М*** – монотонных, ***И*** – интегрируемых

на промежутке $[a, b]$ функций.

§ Свойства определенного интеграла

а) Свойства, связанные с равенствами

Свойство 1	По определению $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$

Свойство 2	По определению $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

Свойство 3 (линейность интеграла)	Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, α и β − любые вещественные числа, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

Свойство 4 (интегрируемость произведения)	Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то функция $f(x)g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$.

Свойство 5	Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема также на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

Свойство 6 *Аддитивность интеграла.*	Если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема также на $[a, b]$, причем $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. При этом точка c может быть произвольно расположена относительно a и b.

б) Свойства, связанные с неравенствами

Свойство 1	Пусть $a < b$. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Свойство 2 (1-я теорема об оценке интеграла)	Пусть $a < b$. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ $\forall\, x \in [a, b]$, то $$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Свойство 3 (2-я теорема об оценке интеграла)	Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $\lvert f(x)\rvert$ также интегрируема на $[a, b]$, причем $$\left\lvert \int_a^b f(x)dx \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx \qquad (a < b).$$

Свойство 4 (теорема о среднем)	Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $\quad m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ (*или* $m \leq f(x) \leq M$). Тогда существует число $\mu \in [m, M]$ такое, что $$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b - a), \qquad \mu \in [m, M]$$ Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ называется *средним значением* *функции* $f(x)$ на промежутке $[a, b]$.

Свойство 5 (теорема о среднем для непрерывной функции)	Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\exists\ \xi \in [a, b]$ такое, что $$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

§ Основная теорема анализа

Определение интеграла как функции верхнего предела	Функция $\Phi(x)$, задаваемая равенством: $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ называется интеграл как функция верхнего предела.

Теорема (о непрерывности)	Если $f(x)$ **интегрируема** на $[a, b]$, то интеграл как функция верхнего предела $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ есть **непрерывная** функция на этом промежутке.

Теорема (о дифференцируемости)	Если $f(x)$ **непрерывна** на $[a, b]$, то интеграл как функция верхнего предела $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ есть **дифференцируемая** функция на этом промежутке, причём $\Phi'(x) = f(x)$.

Следствие. Всякая непрерывная на промежутке $[a,\ b]$ функция имеет первообразную на этом промежутке.

Теорема **(формула Ньютона—Лейбница)**	Если $f(x)$ **непрерывна** на $[a, b]$, и $F(x)$ − любая её первообразная, то $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

§ Метод замены переменной

Теорема (замена переменной в определённом интеграле)	*Пусть*: 1) $f(x)$ *определена и непрерывна на* $[a, b]$; 2) $x = g(t)$ *определена и непрерывна вместе с производной* *на* $[\alpha, \beta]$, *где* $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ *и* $a \le g(t) \le b$. *Тогда* $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

§ Метод интегрирования по частям

Теорема (интегрирование по частям в определённом интеграле)	*Если* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют непрерывные производные на* $[a, b]$, *то* $$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big\vert_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,$$ или $$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big\vert_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

Примеры. **1.** $\int_1^e \ln x dx$; **2.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

§ Интеграл по симметричному промежутку от чётной и нечётной функции

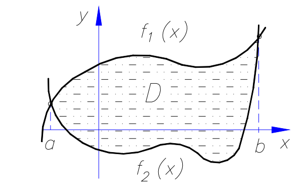
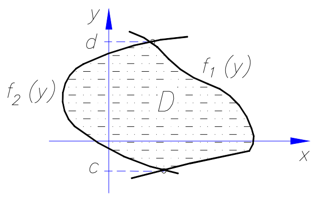
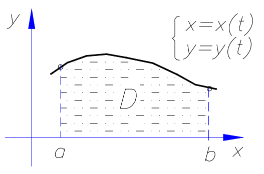
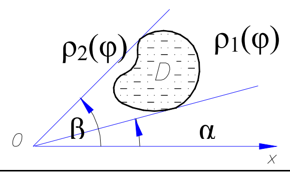
Теорема	Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[-a;a]$, $a>0$, то **для чётной** функции $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, а **для нечётной** функции $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

§ Приложения определённого интеграла (С. 8, 9 ОК)

Теорема (алгоритм применения определённого интеграла)	Если величина Q обладает на промежутке $[a,b]$ 1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$, то $Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\ldots+\Delta Q_n$, где ΔQ_i – значение Q на $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots n$; 2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция, то величину Q можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$: $$Q=\int_a^b f(x)dx$$

План решения задачи. 1. Сделать рисунок. 2. Выбрать или получить формулу для вычисления. 3. Провести вычисления.
4. Проанализировать ответ.

а) Вычисление площади плоской фигуры

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула
S, площадь плоской фигуры D	1		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не выше другой.	$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$
	2		Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ f_2(y)\le x\le f_1(y)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области D не левее другой.	$S=\int_c^d (f_1(y)-f_2(y))dy$
	3		Д. С. К. $\alpha \le t \le \beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t)\ge 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически	$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'_t\,dt$
	4		П. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} \alpha\le \varphi\le \beta \\ \rho_2(\varphi)\le \rho\le \rho_1(\varphi)\end{matrix}\right\}$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\varphi)-\rho_2^2(\varphi))d\varphi$

Примеры. Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

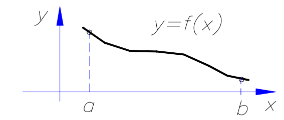
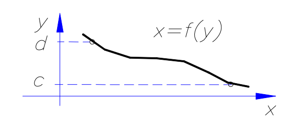
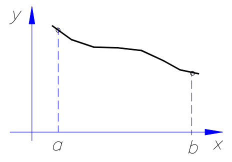
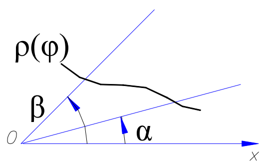
1. $\begin{cases} x^2 = 4(1+y); \\ x + y = 2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $t \in [0;\, 2\pi]$.

3. $\begin{cases} \rho = 2a\cos\varphi; \\ \rho = 2a\sin\varphi, \end{cases}$ $\varphi \in [0;\, 2\pi]$.

б) Вычисление длины дуги плоской кривой

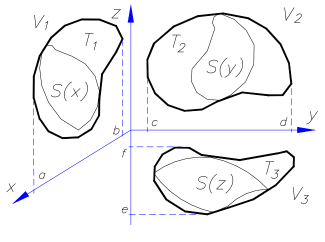
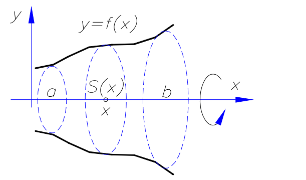
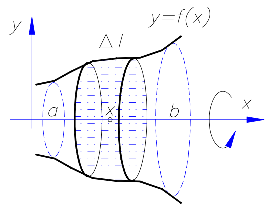
Определение длины кривой	Кривая l называется **спрямляемой**, если существует предел длин ломаных линий, вписанных в эту кривую, при безграничном увеличении количества элементов разбиения T и стремлении максимального элемента разбиения $\lambda(T)$ к нулю: $\exists \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} l(T)$. **Длиной кривой** называется предел длин вписанной ломаной.

Теорема (о длине кривой)	Пусть функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной на промежутке $[a,\, b]$. Тогда кривая, являющаяся графиком этой функции, спрямляема, и её длина может быть найдена по формуле $l = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула
l, длина кривой L	1		Д. С. К. $L = \begin{Bmatrix} a \le x \le b \\ y = f(x) \end{Bmatrix}$	$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$
	2		Д. С. К. $L = \begin{Bmatrix} c \le y \le d \\ x = f(y) \end{Bmatrix}$	$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x'_t)^2}\, dy$
	3		Д. С. К. $L = \begin{Bmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ x = x(t),\ y = y(t) \\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b \end{Bmatrix}$ Линия L задана параметрически	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$
	4		П. С. К. $L = \begin{Bmatrix} \alpha \le \varphi \le \beta \\ \rho = \rho(\varphi) \end{Bmatrix}$	$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi$

Пример. Найти длину кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

в) Вычисление объёма тела и площади поверхности тела вращения

Q	№	Чертеж	Система координат и пояснения	Формула
V, объем тела T	1		Д. С. К. $T_1 = \left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ S(x) \perp 0X \end{matrix}\right\}$ $T_2 = \left\{\begin{matrix} c \le y \le d \\ S(y) \perp 0Y \end{matrix}\right\}$ $T_3 = \left\{\begin{matrix} e \le z \le f \\ S(z) \perp 0Z \end{matrix}\right\}$	$V_1 = \int_a^b S(x)dx$ $V_2 = \int_a^b S(y)dy$ $V_3 = \int_e^f S(z)dz$
	2		Д. С. К. $T = \left\{\begin{matrix} a \le x \le b,\ y = f(x) \\ \pi y^2 = S(x) \perp 0X \end{matrix}\right\}$ Тело T образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$
σ, площадь поверхн. ω	1		Д. С. К. $\omega_x = \left\{\begin{matrix} a \le x \le b \\ y = f(x) \\ \Delta\sigma = 2\pi\ y(x)\Delta l \end{matrix}\right\}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$	$\sigma_x = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$
			Д. С. К. $\omega_x = \left\{\begin{matrix} \alpha \le t \le \beta \\ y = y(t),\ x = x(t) \\ \Delta\sigma = 2\pi\ y(t)\Delta l \end{matrix}\right\}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x\ (t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$	$\sigma_x = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_x^{/})^2}\,dt$

§ Несобственные интегралы (С.7 ОК)

Пример. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

а) Несобственные интегралы по бесконечному промежутку (I рода)

Определение (несобственного интеграла по бесконечному промежутку $[a,\infty)$)	Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $[a,\infty)$ и интегрируема на промежутке $[a,b]$, $\forall b \in [a,\infty)$. **Несобственным интегралом по бесконечному промежутку** $[a,\infty)$ от функции $f(x)$ называется $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Определение (сходящихся и расходящихся несобственных интегралов)	Если предел $$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\infty} f(x)dx$$ существует и конечен, то интеграл называется **сходящимся**, а функция $f(x)$ – интегрируемой на полупрямой $[a,\infty)$. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл называется **расходящимся,** а функция $f(x)$ – неинтегрируемой на полупрямой $[a,\infty)$.

Эталонный интеграл

$$\int_{a>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\begin{cases}\dfrac{a^{-k+1}}{k-1}-\textit{сходится, если } k>1,\\ +\infty-\textit{расходится, если } k\le 1.\end{cases}$$

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы по полупрямой $(-\infty, b]$ и по всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$:

Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)		
Определение несобственных интегралов	1. **Промежуток** $[a,\infty)$	$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$
	2. **Промежуток** $(-\infty, b]$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
	3. **Промежуток** $(-\infty, \infty)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$

§ Некоторые свойства несобственных интегралов

Свойство 1 (аддитивности)	Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, тогда $\forall a_1>a$ интеграл $\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ тоже сходится, и имеет место равенство: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{a_1} f(x)+\int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Свойство 2 (линейности)	Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на полупрямой $[a,\infty)$, тогда для любых постоянных коэффициентов c_1 и c_2 на полупрямой $[a,\infty)$ интегрируема функция $c_1 f(x)+c_2\varphi(x)$, и имеет место равенство: $\int\limits_a^{\infty}(c_1 f(x)+c_2\varphi(x))dx = c_1\int\limits_a^{\infty} f(x)dx + c_2\int\limits_a^{\infty}\varphi(x)dx$.

Свойство 3 (формула Ньютона – Лейбница)	Если функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a,\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^{\infty} = F(\infty)-F(a)$, где $F(\infty)=\lim\limits_{b\to\infty}F(x)$

Свойство 4 (критерий интегрируемости)	Пусть $f(x)$ неотрицательна на полупрямой $[a,\infty)$, тогда для того, чтобы $f(x)$ была интегрируемой на этой полупрямой, необходимо и достаточно, чтобы $\exists L$, такое, что $\forall b>a:\ \int\limits_a^b f(x)dx \le L$.

Свойство 5 (1-я теорема сравнения)	Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и неотрицательны на полупрямой $[a,\infty)$, $\forall x\in[a,\infty):\quad 0\le\varphi(x)\le f(x)$, тогда из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$, и из расходимости $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

1	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,+\infty)$
	$0\le\varphi(x)\le f(x)$
	Сходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ Расходимость

Свойство 6 (2-я теорема сравнения)	Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и неотрицательны на полупрямой $[a,\infty)$, и $\exists \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=k$, тогда, если $0<k<\infty$, оба несобственных интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ ведут себя одинаково (или оба сходятся, или оба расходятся).

Пример. Не вычисляя интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x^2+x}dx$, исследовать его на сходимость.

Свойство 7 (абсолютная сходимость)	Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx$, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, при этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Определение условной сходимости	Если расходится интеграл $\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx$, но сходится интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **условно сходящимся**.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{\sin x}{x^3}dx$.

б) Несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода)

Определение (несобственного интеграла от неограниченной функции)	Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a,b)$ и удовлетворяет следующим двум условиям: 1. $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$; 2. $\forall\varepsilon>0$ функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a,b-\varepsilon]$. Тогда несобственным интегралом от функции, имеющей бесконечный разрыв на правом конце промежутка интегрирования, называется интеграл $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы от функций, терпящих бесконечный разрыв на левом конце промежутка интегрирования или во внутренней точке промежутка интегрирования.

Несобственные интегралы II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)		
Определение	1. $f(x)$ бесконечно большая на правом конце промежутка интегрирования	$\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2. $f(x)$ бесконечно большая на левом конце промежутка интегрирования	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$
	3. $f(x)$ бесконечно большая во внутренней точке промежутка интегрирования	$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

Пример. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Свойства несобственных интегралов II рода аналогичны свойствам несобственных интегралов I рода.

Несобственные интегралы (н.и.)

		I рода (по бесконечному промежутку)	II рода (от неограниченной на промежутке интегрирования функции)
Определение н.и.	1	$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$
	2	$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$
	3	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)$

Определение сходимости н.и.		Несобственный интеграл ***сходится***, если существуют **конечные пределы** в правых частях равенств, определяющих эти интегралы. Если эти **пределы бесконечны или не существуют**, то несобственный интеграл ***расходится***. $\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл сходится;} \\ \left.\begin{matrix} \infty \\ \nexists \end{matrix}\right\} - \text{интеграл расходится.} \end{cases}$	
		Свойства	
Признаки сходимости н.и.	1	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a, b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$
		$0 \le \varphi(x) \le f(x)$	
		Сходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx$ Расходимость	Сходимость $\int_a^b \varphi(x)dx \quad \int_a^b f(x)dx$ Расходимость
	2	$\varphi(x) > 0, f(x) > 0, \forall x \in [a, +\infty)$	$\varphi(x), f(x)$ *непрерывны* $\forall x \in [a, b)$ $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$
		$\exists \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, \quad (0 < k < \infty)$	$\exists \lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, \quad (0 < k < \infty)$
		Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ ведут себя одинаково: или оба сходятся, или оба расходятся	
	3	$\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ *сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно* *расходится* $\Rightarrow \begin{cases} \text{сходится условно;} \\ \text{расходится.} \end{cases}$
Эталонные н.и.		$\int\limits_{a>0}^{+\infty}\frac{dx}{x^k} = \begin{cases} \frac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k > 1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k \le 1. \end{cases}$	$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сх} \\ \infty - \text{расходи} \end{cases}$ $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{схо} \\ \infty - \text{расходи} \end{cases}$

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.