

**ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ** ( $u = u(x)$ )

1.  $\int 0 du = c;$

**степенные функции**

2.  $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

**показательные функции**

4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$

4a.  $\int e^u du = e^u + c;$

**дробные рациональные и  
иррациональные функции**

5.  $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c;$

6.  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c;$

7.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + c;$

8.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c;$

**тригонометрические функции**

9.  $\int \sin u du = -\cos u + c;$

10.  $\int \cos u du = \sin u + c;$

11.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c;$

12.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c;$

**гиперболические функции**

13.  $\int sh u du = ch u + c;$

14.  $\int ch u du = sh u + c;$

15.  $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + c;$

16.  $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + c;$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

**Непосредственное интегрирование**

$$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'_x};$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax + b)}{a};$$

$$\int \frac{1}{(ax + b)^m} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{1-m}}{1-m} + c;$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b| + c;$$

$$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(ax^3 + b)}{3ax^2}$$

$$\int x^2 \cos(ax^3 + b) dx = \frac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \frac{1}{m} \operatorname{arcsin} \frac{mx}{a} + c;$$

**основные свойства неопределенного  
интеграла**

1.  $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx;$

2.  $\int \alpha u dx = \alpha \int u dx;$

3.  $d \int u(x) dx = u(x) dx;$

4.  $\int du = u + c;$

**замена переменной**

$$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$$

$$\int f(u) du = \int f(u(t)) u'_t dt;$$

**интегрирование по частям**

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

# НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## Метод непосредственного интегрирования

$$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{u'_x}$$

$$u = ax + b \Rightarrow dx = \frac{d(ax + b)}{a} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \int \frac{d(ax + b)}{a\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{ax + b} + c;$$

$$u = (-ax^2 + b) \Rightarrow dx = \frac{d(-ax^2 + b)}{-2ax} \Rightarrow \int e^{-ax^2 + b} x dx = \int \frac{e^{-ax^2 + b} x d(-ax^2 + b)}{-2ax} = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2 + b} + c;$$

$$u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{d(\sin x)}{\cos x} \Rightarrow \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - a^2} = \int \frac{\cos x d(\sin x)}{(\sin^2 x - a^2) \cos x} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\sin x - a}{\sin x + a} \right| + c;$$

$$u = mx \Rightarrow dx = \frac{d(mx)}{m} \Rightarrow \int \sin mx dx = \int \frac{\sin mx d(mx)}{m} = -\frac{1}{m} \cos mx + c;$$

### Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du;$$

№ п/п	Интеграл	Разбиение подынтегральн ого выражения на части	$du$	$v$	Результат применения метода
1	$\int P_n(x) e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) a^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) \sin mx dx,$ $\int P_n(x) \cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{cases} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$	$P_{n-1}(x) dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют <b>n раз</b> , пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x) \ln x dx,$ $\int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx,$ $\int P_n(x) \arctg x dx, \int P_n(x) \operatorname{arccotg} x dx.$	$u = \begin{cases} \ln x \\ \dots \\ \operatorname{arccotg} x \end{cases},$ $dv = P_n(x) dx$	$\frac{dx}{x},$ $\dots\dots\dots$ $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней $x$
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x} \sin mx dx, \int e^{\alpha x} \cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$ $\left( \text{или } u = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases}, \right.$ $\left. dv = e^{\alpha x} dx \right)$	$\alpha e^{\alpha x} dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют <b>2 раза</b> , получая уравнение относительно искомого интеграла

## План интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx.$$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m.$$

I.  $n \geq m$  – дробь неправильная;  $n < m$  – дробь правильная (степень  $P_n(x)$  меньше)

⇓ (степень  $n$   $P_n(x)$  больше или равна степени  $m$   $Q_m(x)$ )

$$\begin{array}{l}
 P_n(x) \Big| Q_m(x) \\
 \dots\dots \Big| \text{целая часть} \\
 r_s(x) - \text{остаток } (s < m)
 \end{array}
 \Rightarrow
 \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{целая часть} + \frac{\text{остаток}}{Q_m(x)}$$

⇓  
 $\frac{r_s(x)}{Q_m(x)}$  – прав. дробь.

II. Знаменатель  $Q_m(x)$  разложить на множители линейные –  $(x-a)$  и квадратичные –  $(x^2+px+q)$ . Правильную дробь разложить на сумму простых дробей в зависимости от множителей знаменателя.

Вид множителя в знаменателе дроби	Сколько дробей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \dots + \frac{M_w x + N_w}{x^2+px+q}$

III. Найти неопределенные коэффициенты  $A, M, N$ , приведя сумму дробей к общему знаменателю и **приравняв числители исходной** правильной дроби и **суммы** дробей.

IV. Проинтегрировать простые дроби:

а) дроби первого типа  $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k > 1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2} dt = M \int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)2t} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \dots$$

г) дроби четвертого типа

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^w} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \dots$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left( \frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right) - \text{рекуррентная формула}$$

### Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

№ п/п	Подынтегральная функция	Подстановка	Вспомогательные преобразования	Итог
1	$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x, \cos x$	Универсальная $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	Подынтегральная функция рациональна относительно $x$
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\cos x$	$t = \sin x$	$dt = \cos x dx$	
3	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\sin x$	$t = \cos x$	$dt = -\sin x dx$	
4	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$	$t = \operatorname{tg} x$  $t = \operatorname{ctg} x$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$  $\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$	
5	$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$ Степени чётные неотрицательные	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$		Понижение степени
6	$\sin mx \cos nx$  $\cos mx \cos nx$  $\sin mx \sin nx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$  $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$  $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$		Сумма функций
7	$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}; \operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$ $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \operatorname{sh}x \operatorname{ch}x = \frac{1}{2} \operatorname{sh}2x; \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}2x - 1}{2}; \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch}2x + 1}{2}$ Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций			

### Интегрирование иррациональностей

	Подынтегральная функция	Подстановка	Итог
1	$R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2}, \dots)$ $R$ – рациональная функция, $p_1, p_2, q_1, q_2, \dots$ – целые числа	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ , где $k$ – наименьшее общее кратное знаменателей показателей:  $k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots)$	Рациональная функция $t$
2	$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$ $dx = a \cos t dt$ или $dx = -a \sin t dt$ $(a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t$ или $a^2 - x^2 = a^2 \sin^2 t)$	Рациональная функция $\sin t$ , $\cos t$
	$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = atg t$ или $x = actg t$ $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ или $dx = \frac{-adt}{\sin^2 t}$ $(a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ или $a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\sin^2 t})$	
	$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$ $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$ или $dx = \frac{-a \cos t}{\sin^2 t} dt$ $(x^2 - a^2 = a^2 tg^2 t$ или $x^2 - a^2 = a^2 ctg^2 t)$	
3	Дифференциальный бином  $x^m (a + bx^n)^p$ по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях:	$p$ – целое число, $m, n$ – дроби	Рациональная функция $t$
$\frac{m+1}{n}$ – целое	$x = t^k$ , $k = \text{НОК}(\text{знаменателей } m, n)$ $dx = kt^{k-1} dt$  $a + bx^n = t^k$ , $k$ – знаменатель дроби $p$ $bnx^{n-1} dx = kt^{k-1} dt$ , $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m t^{kp} \frac{kt^{k-1} dt}{bnx^{n-1}}$		
$\frac{m+1}{n} + p$ – целое	$a + bx^n = t^k x^n$ , $k$ – знаменатель дроби $p$ $ax^{-n} + b = t^k$ , $-anx^{-n-1} dx = kt^{k-1} dt$ , $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m (t^k x^n)^p \frac{kt^{k-1} dt}{-anx^{-n-1}}$ , где $x^{-n} = \frac{t^k - b}{a}$		
4	$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = \frac{1}{mx+n}$	См. пункт 5
5	$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = x + \frac{b}{2a}$ , $ax^2 + bx + c = at^2 - \frac{b^2}{4a} + c$	Два табл-х инт-ла

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим алгоритмом:

1. Попытаться найти первообразную непосредственным интегрированием или подведением подходящей функции под знак дифференциала. Если это не удастся, то
2. Определить класс подынтегральной функции (рац. дробь, тригонометрическая, иррациональная) и применить соответствующие подстановки, а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.