

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ Первообразная функция и неопределённый интеграл

Определение первообразной	Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X , если $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$.
----------------------------------	---

Лемма	Функция, производная которой на некотором промежутке X равна нулю, постоянна на этом промежутке.
--------------	--

Теорема (о множестве первообразных)	Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на промежутке X , то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке X имеет вид: $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.
--	---

Определение неопределённого интеграла	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке X называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X и обозначается $\int f(x)dx$. В силу теоремы о множестве первообразных $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, C – произвольная постоянная.
--	---

Замечание. Иногда символом $\int f(x)dx$ обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.

Теорема (существования первообразной)	Всякая непрерывная на промежутке X функция имеет первообразную на этом промежутке.
--	--

Примеры «неберущихся» интегралов

$$\int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$
$$\int \exp(-x^2) dx; \quad \int \sin(x^2) dx; \quad \int \cos(x^2) dx;$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$i^2 = -1$$

§ Основные свойства неопределённого интеграла

<p>Свойство 1 (о дифференциале интеграла)</p>	<p>Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$.</p> <p>Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$.</p>
<p>Свойство 2 (об интеграле от дифференциала)</p>	<p>Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и постоянного слагаемого: $\int dF(x) = F(x) + C$.</p>

Вывод из свойств 1 и 2: знаки интеграла и дифференциала взаимно уничтожаются.

<p>Свойство 3 (линейности)</p>	<p>Если существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$, а α и β – любые вещественные числа, то существует первообразная функции</p> <p>$\alpha f(x) + \beta g(x)$, причем</p> $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx .$
---	--

§ Таблица интегралов

1. $\int 0 du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c;$

4а. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c;$

6. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c;$

$$7. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c;$$

$$8. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + c;$$

тригонометрические функции

$$9. \int \sin u \, du = -\cos u + c;$$

$$10. \int \cos u \, du = \sin u + c;$$

$$11. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c;$$

$$12. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c;$$

гиперболические функции

$$13. \int \operatorname{sh} u \, du = \operatorname{ch} u + c;$$

$$14. \int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + c;$$

$$15. \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + c;$$

$$16. \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + c;$$

§ Метод замены переменных (подстановки) в неопределённом интеграле

<p>Теорема (о замене переменных)</p>	<p>Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на промежутке T, а промежуток X – множество её значений. Пусть функция $f(x)$ определена на X и имеет на этом промежутке первообразную $F(x)$.</p> <p>Тогда на промежутке T функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции</p> $f(\varphi(t))\varphi'(t).$ <p>То есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$</p>
---	---

<p>Следствие (алгоритм замены переменных в неопределённом интеграле)</p>	$\int f(x)dx = \left. \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ $\int f(x)dx = \left. \begin{array}{l} t = \varphi^{-1}(x) \\ dt = (\varphi^{-1}(x))'dx \end{array} \right = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$
---	---

Замечание. Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала, когда замена переменной делается устно.

<p>Идея подведения функции под знак дифференциала</p>	<p>1. В подынтегральном выражении $f(x)dx$ заменяем dx дифференциалом du новой функции $u(x)$, делённым на производную этой функции:</p> $dx = \frac{d(u(x))}{u'(x)}, \quad u'(x) \neq 0;$ <p>2. Сокращая множители функции $f(x)$ с множителями производной $u'(x)$, подынтегральную функцию преобразуем к функции аргумента u:</p> $f_1(u);$ <p>3. Получаем табличный интеграл $\int f_1(u)du$.</p>
--	---

§ Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле

<p>Теорема (интегрирование по частям в неопределённом интеграле)</p>	<p>Пусть на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, и функция $v(x)u'(x)$ имеет первообразную на X.</p> <p>Тогда $u(x)v'(x)$ также имеет первообразную на X, и справедлива формула интегрирования по частям:</p> $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$ <p style="text-align: center;">или</p> $\int u dv = uv - \int v du.$
---	--

Рекомендации по применению метода интегрирования по частям
(см. ОК)

№	Интеграл	Разбиение подынтегрального выражения на части	du	v	Результат применения метода
1	$\int P_n(x)e^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x)a^{\alpha x} dx,$ $\int P_n(x) \sin mx dx,$ $\int P_n(x) \cos mx dx.$	$u = P_n(x)$ $dv = \begin{cases} e^{\alpha x} \\ a^{\alpha x} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$	$P_{n-1}(x)dx$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \frac{a^{\alpha x}}{\alpha \ln a},$ $-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют n раз , пока степень многочлена не понизится до нулевой
2	$\int P_n(x) \ln x dx,$ $\int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx,$ $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx, \int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx.$	$u = \begin{cases} \ln x \\ \dots \\ \operatorname{arctg} x \end{cases},$ $dv = P_n(x) dx$	$\frac{dx}{x},$ $\dots\dots\dots$ $-\frac{dx}{1+x^2}$	$P_{n+1}(x)$	Получают интеграл от функций степеней x
3	Циклические интегралы: $\int e^{\alpha x} \sin mx dx, \int e^{\alpha x} \cos mx dx$	$u = e^{\alpha x},$ $dv = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases} dx$ $\left(\text{или } u = \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases}, \right)$ $(dv = e^{\alpha x} dx)$	$\alpha e^{\alpha x} dx$	$-\frac{\cos mx}{m},$ $\frac{\sin mx}{m}$	Метод применяют 2 раза , получая уравнение относительно искомого интеграла

Какими методами можно найти следующие интегралы:

1.	$\int x^2 \exp(x^3) dx$	2.	$\int x^3 \exp(x^2) dx$
3.	$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$	4.	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
5.	$\int x \sin x^2 dx$	6.	$\int x^2 \sin x dx$
7.	$\int 5^x \cos x dx$	8.	$\int 5^{\sin x} \cos x dx$
9.	$\int \sqrt{x} \exp(\sqrt{x}) dx$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(\sqrt{x}) dx$
11.	$\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

§ Интегрирование дробных рациональных функций

А. Правильные и неправильные рациональные дроби

Определение рациональной дроби	<p>Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:</p> $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_m}$
---------------------------------------	--

Определение правильной и неправильной рациональной дроби	<p>Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n < m$).</p> <p>Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется неправильной, если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n \geq m$).</p>
---	---

Теорема	Интегрирование неправильной рациональной дроби можно свести к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.
----------------	--

Б. Основная теорема алгебры

Теорема (основная алгебры)	Любой многочлен степени n имеет ровно n корней и может быть представлен в виде произведения n сомножителей.
---	---

Теорема (о разложении многочлена на множители)	<p>Любой многочлен степени m можно разложить на линейные и квадратичные множители:</p> $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m =$ $= b_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2} \dots (x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$ <p>в соответствии с его вещественными (x_1, x_2, \dots, x_r) и комплексными сопряжёнными корнями с учётом кратности k_1, k_2, \dots, k_r его вещественных и l_1, l_2, \dots, l_s комплексных корней, причём $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_s = m$.</p>
---	---

В. Разложение правильной дроби на сумму простых дробей

Теорема (о сумме простых дробей)	Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей с неопределёнными коэффициентами единственным образом, руководствуясь следующим правилом:
---	---

Вид множителя в знаменателе дроби	Чис ло дро бей	Сумма простых дробей, соответствующая множителю в знаменателе правильной рациональной дроби
$(x-a)^k$	k	$\frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{x-a}$
$(x^2+px+q)^w$	w	$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^w} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{w-1}} + \dots + \frac{M_w x+N_w}{x^2+px+q}$

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

Метод задания частных значений	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.
---------------------------------------	---

Метод неопределённых коэффициентов	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.
---	---

Метод комбинированный	<ol style="list-style-type: none"> 1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.
------------------------------	--

Д. Интегрирование простых дробей

а) дроби первого типа $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{A}{x-a} d(x-a) = A \ln|x-a| + c;$

б) дроби второго типа $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + c; (k > 1)$

в) дроби третьего типа

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \\ = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2 \pm a^2} dt = M \int \frac{td(t^2 \pm a^2)}{(t^2 \pm a^2)^2} + (N - M\frac{p}{2}) \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2} = \dots$$

г) дроби четвертого типа $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q \\ x+\frac{p}{2} = t; \quad dx = dt \\ x^2+px+q = t^2 \pm a^2 \end{array} \right| = \dots$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} \right) -$$

рекуррентная формула.

План интегрирования рациональных дробей (см. ОК)

Пример 1. Найти $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + 14x^2 - 2x + 5}{x^4 - 2x^3 + 5x^2} dx$.

Пример 2. Найти $\int \frac{x^7}{x^4 - 1} dx$.

Пример 3. $\int \frac{7x^3 - 14x^2 + 15x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x} dx$.

§ Интегрирование некоторых тригонометрических функций

<p>Определение рациональной функции двух переменных</p>	<p>Рациональной функцией двух переменных $R(u, v)$ называется функция, полученная путём применения к аргументам u, v конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень.</p>
--	---

Рекомендации для интегрирования тригонометрических функций (см. ОК)

Примеры.

1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x; \quad dt = -\sin x dx; \\ \sin x dx = -dt; \\ \sin^3 x dx = \sin^2 x \cdot \sin x dx = \\ = (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \\ = (1 - t^2)(-dt) = (t^2 - 1)dt \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt = \int \frac{t^2}{t^4} dt - \int \frac{1}{t^4} dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} - \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

3. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{(4\sin^2 x \cos^2 x) \cos^2 x}{4} =$$

$$= \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \cos^2 x = \frac{1 - \cos 4x}{8} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{16} (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x) =$$

$$= \frac{1}{16} (1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)) =$$

$$= \frac{1}{16} (1 - \cos 4x) + \frac{1}{32} (\cos 2x - \cos 6x).$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1}{16} (1 - \cos 4x) + \frac{1}{32} (\cos 2x - \cos 6x) \right) dx =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin 2x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} dx.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} \cdot \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + 2t + \frac{t^3}{3} + C = 2\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Первообразные в системе MathCAD и "вручную" получаются разные.

Проверить правильность получаемых результатов можно двумя способами:

1. разность между первообразными должна быть константой,
2. производная от первообразной должна быть равна подынтегральной функции.

Компьютерные первообразные обозначим $F(x)$, найденные "вручную" - $G(x)$, $f(x)$ - подынтегральная функция.

$$1. \int \frac{1}{\sin(x)} dx \rightarrow \ln(\csc(x) - \cot(x)) \quad \ln(\csc(x) - \cot(x)) - \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \text{ simplify} \rightarrow C$$

$$2. \int \frac{(\sin(x))^3}{(\cos(x))^4} dx \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)} - \frac{1}{3} \cdot \sin(x)^2 \cdot \cos(x) - \frac{2}{3} \cdot \cos(x)$$

$$G2(x) := \frac{1}{[3(\cos(x))^3]} - \frac{1}{\cos(x)}$$

$$F2(x) := \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)} - \frac{1}{3} \cdot \sin(x)^2 \cdot \cos(x) - \frac{2}{3} \cdot \cos(x)$$

$$F2(x) - G2(x) \text{ simplify} \rightarrow C$$

$$3. \int (\sin(x))^2 \cdot (\cos(x))^4 dx \rightarrow \frac{-1}{6} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^5 + \frac{1}{24} \cdot \cos(x)^3 \cdot \sin(x) + \frac{1}{16} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{16} \cdot x$$

$$F3(x) := \frac{-1}{6} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^5 + \frac{1}{24} \cdot \cos(x)^3 \cdot \sin(x) + \frac{1}{16} \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) + \frac{1}{16} \cdot x$$

$$G3(x) := \frac{1}{16} \cdot \left(x - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(6x)}{12} \right)$$

$$F3(x) - G3(x) \text{ simplify} \rightarrow C$$

$$4. \int \frac{1}{(\sin(x))^2 \cdot (\cos(x))^4} dx \rightarrow \frac{1}{3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^3} + \frac{4}{3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} - \frac{8}{3 \cdot \sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$F4(x) := \frac{1}{3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)^3} + \frac{4}{3 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)} - \frac{8}{3 \cdot \sin(x)} \cdot \cos(x)$$

$$G4(x) := 2 \tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} + \frac{(\tan(x))^3}{3}$$

$$F4(x) - G4(x) \text{ simplify} \rightarrow C$$

§ Интегрирование некоторых иррациональных функций

Определение иррациональной функции	Функция называется алгебраической иррациональной , если она получена путём применения к аргументу x конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в рациональную степень.
---	--

Рекомендации для интегрирования иррациональных функций (см. ОК)

Примеры:

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6; \quad dx = 6t^5 dt; \\ \sqrt{x} = t^3; \quad \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1}$$

$$\frac{t^3}{t+1} \text{ convert, parfrac, } t \rightarrow t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \\ &= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

Проверка ответа системой MathCAD:

$$f5(x) := \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \qquad G5(x) := 6 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^6} - \ln \left(\frac{1}{x^6} + 1 \right) \right)$$

$$\frac{d}{dx} G5(x) \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\frac{2}{x^3}} + \frac{1}{\frac{5}{x^6}} - \frac{1}{\frac{5}{x^6} \cdot \left(\frac{1}{1+x^6} \right)} \qquad f5(x) - \frac{d}{dx} G5(x) \text{ simplify} \rightarrow 0$$

$$6. \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t^2; \quad x-1 = t^2(x+1); \quad x(1-t^2) = t^2+1; \\ x = \frac{t^2+1}{1-t^2}; \quad dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt \end{array} \right| = \\ = \int \frac{t^2+1}{1-t^2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 4 \int \frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3} dt.$$

$$-4 \frac{(t^4 + t^2)}{(t-1)^3 \cdot (t+1)^3} \text{ convert, parfrac, t} \rightarrow \frac{-1}{(t-1)^3} - \frac{3}{2 \cdot (t-1)^2} - \frac{1}{2 \cdot (t-1)} + \frac{1}{(t+1)^3} - \frac{3}{2 \cdot (t+1)^2} + \frac{1}{2 \cdot (t+1)}$$

Попытаемся поступить по-другому. Умножим и разделим подынтегральную функцию на сопряжённое знаменателю выражение $\sqrt{x-1}$.

$$\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Второй интеграл берётся непосредственно подведением подкоренного выражения под знак дифференциала.

Займёмся первым интегралом.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int \sqrt{x^2-1} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \\ &= \int \sqrt{x^2-1} dx + \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C. \end{aligned}$$

(☉)

С другой стороны, если к этому интегралу применить интегрирование по частям, получим

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}; \\ du = dx; \quad v = \sqrt{x^2-1} \end{array} \right| = x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1} dx.$$

(☉☉)

Сложив (☉) и (☉☉), будем иметь

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} (\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + x\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Следовательно,

$$\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \frac{1}{2} (\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + x\sqrt{x^2-1}) - \sqrt{x^2-1} + C.$$

7. Интеграл $\int \sqrt[3]{x^3+1} dx$ является дифференциальным биномом

(см. ОК). Проверим условия теоремы

Пафнутия Львовича Чебышева

при $p = \frac{1}{3}$; $m = 0$; $n = 3$.

$$p = \frac{1}{3} - \text{не целое};$$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{1}{3} - \text{не целое};$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \text{не целое}.$$

Вывод: интеграл не берётся в элементарных функциях.

8. Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ является дифференциальным биномом

(см. ОК). Проверим условия теоремы Пафнутия Львовича Чебышева

при $p = -\frac{1}{4}$; $m = 0$; $n = 4$.

$p = -\frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n} = \frac{1}{4}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ – целое.

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \left| \begin{array}{l} 1+x^4 = t^4 x^4; \quad x^{-4} + 1 = t^4; \quad x^4 = \frac{1}{t^4 - 1}; \\ -4x^{-5} dx = 4t^3 dt; \quad dx = -x^5 t^3 dt; \\ \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{-x^5 t^3 dt}{tx} = -\frac{t^2 dt}{t^4 - 1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1}.$$

Правильную дробь разложим на сумму простых дробей

$$\frac{t^2}{t^4 - 1} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t+1} + \frac{Mt + N}{t^2 + 1}$$

и найдём неопределённые коэффициенты:

$$\frac{t^2}{t^4 - 1} \text{ convert, parfrac, } t \rightarrow \frac{1}{4 \cdot (t-1)} - \frac{1}{4 \cdot (t+1)} + \frac{1}{2 \cdot (t^2 + 1)}$$

$$t^2 = A_1(t+1)(1+t^2) + A_2(t-1)(1+t^2) + (Mt + N)(t^2 - 1).$$

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 4A_1; \quad A_1 = \frac{1}{4};$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = -4A_2; \quad A_2 = -\frac{1}{4};$$

$$t^3: \quad 0 = A_1 + A_2 + M; \quad M = 0;$$

$$t^0: \quad 0 = A_1 - A_2 - N; \quad N = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \left| \begin{array}{l} 1+x^4 = t^4 x^4; \quad x^{-4} + 1 = t^4; \quad x^4 = \frac{1}{t^4 - 1}; \\ -4x^{-5} dx = 4t^3 dt; \quad dx = -x^5 t^3 dt; \\ \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{-x^5 t^3 dt}{tx} = -\frac{t^2 dt}{t^4 - 1} \end{array} \right| = -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \\ &= -\left(\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) = -\left(\frac{1}{4} (\ln|t-1| - \ln|t+1|) + \frac{1}{2} \operatorname{arctgt} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} + 1}{\sqrt[4]{x^{-4} + 1} - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^{-4} + 1} + C. \end{aligned}$$

9. Интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}$ является дифференциальным биномом

(см. ОК). Проверим условия теоремы

Пафнутия Львовича Чебышева

при $p = -\frac{3}{2}$; $m = 3$; $n = 2$.

$p = -\frac{3}{2}$ – не целое;

$\frac{m+1}{n} = \frac{4}{2} = 2$ – целое.

Поэтому

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} 1+2x^2 = t^2; \quad 4x dx = 2t dt; \\ x^2 = \frac{t^2-1}{2}; \quad dx = \frac{t dt}{2x}; \\ \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}} = \frac{x^3 t dt}{t^3 2x} = \frac{(t^2-1) dt}{4t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(t^2-1) dt}{4t^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2} \right) = \frac{1}{4} \left(t + \frac{1}{t} \right) + C = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} \right) + C.$$

10. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$.

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении интеграла

$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$, потом сделаем замену переменной и тригонометрическую подстановку (см. ОК).

$$\int \sqrt{3-2x-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} 3-2x-x^2 = 3-(x^2+2x+1)+1 = 4-(x+1)^2 = 4-t^2; \\ x+1 = t; \quad dx = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{4-t^2} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = 2 \sin u; \quad dt = 2 \cos u du; \\ 4-t^2 = 4 \cos^2 u \end{array} \right| = 4 \int \cos^2 u du = 2 \int (1 + \cos 2u) du = 2 \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right) + C =$$

$$= 2 \left(\arcsin \frac{t}{2} + \sin u \cos u \right) + C = 2 \left(\arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{t}{2} \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} \right) + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + (x+1) \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2}{4}} + C = 2 \arcsin \frac{x+1}{2} + \frac{(x+1) \sqrt{3-2x-x^2}}{2} + C.$$

При нахождении первообразной функции можно пользоваться следующим **алгоритмом**:

1. Попытаться применить непосредственное интегрирование и подведение функции под знак дифференциала;
2. Если это не приводит к успеху, определить класс подынтегральной функции (дробная рациональная, тригонометрическая, иррациональная функция) и применить соответствующие подстановки,
3. а если функция смешанных классов – интегрирование по частям.

Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

№ п/п	Подынтегральная функция	Подстановка	Вспомогательные преобразования	Итог
1	$R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция относительно $\sin x, \cos x$	Универсальная $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$	Подынтегральная функция рациональна относительно x
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\cos x$	$t = \sin x$	$dt = \cos x dx$	
3	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ Нечётная относительно $\sin x$	$t = \cos x$	$dt = -\sin x dx$	
4	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ Чётная относительно $\cos x$ и $\sin x$	$t = \operatorname{tg} x$ $t = \operatorname{ctg} x$	$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; dx = -\frac{dt}{1+t^2}$	
5	$\sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x$ Степени чётные неотрицательные	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$		Понижение степени
6	$\sin mx \cos nx$ $\cos mx \cos nx$ $\sin mx \sin nx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x)$ $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x)$ $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$		Сумма функций
7	$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; thx = \frac{shx}{chx}; cthx = \frac{chx}{shx}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$ $ch^2 x - sh^2 x = 1; shx chx = \frac{1}{2} sh 2x; sh^2 x = \frac{ch 2x - 1}{2}; ch^2 x = \frac{ch 2x + 1}{2}$ Интегрирование гиперболических функций аналогично интегрированию тригонометрических функций			

Интегрирование иррациональностей

	Подынтегральная функция	Подстановка	Итог
1	$R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_1}{q_1}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots)$ R – рациональная функция, $p_1, p_2, q_1, q_2, \dots$ – целые числа	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное знаменателей показателей: $k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots)$	Рациональная функция t
2	$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t$ или $x = a \cos t$ $dx = a \cos t dt$ или $dx = -a \sin t dt$ $(a^2 - x^2 = a^2 \cos^2 t$ или $a^2 - x^2 = a^2 \sin^2 t)$	Рациональная функция $\sin t$, $\cos t$
	$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \operatorname{tg} t$ или $x = a \operatorname{ctg} t$ $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ или $dx = \frac{-adt}{\sin^2 t}$ $(a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ или $a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\sin^2 t})$	
	$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{\cos t}$ или $x = \frac{a}{\sin t}$ $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$ или $dx = \frac{-a \cos t}{\sin^2 t} dt$ $(x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 t$ или $x^2 - a^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 t)$	
3	Дифференциальный бином $x^m (a + bx^n)^p$ по теореме Пафнутия Львовича Чебышева интегрируется в элементарных функциях только в трёх случаях:	p – целое число, m, n – дроби	Рациональная функция t
$\frac{m+1}{n}$ – целое	$x = t^k$, $k = \text{НОК}(\text{знаменателей } m, n)$ $dx = kt^{k-1} dt$ $a + bx^n = t^k$, k – знаменатель дроби p $bnx^{n-1} dx = kt^{k-1} dt$, $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m t^{kp} \frac{kt^{k-1} dt}{bnx^{n-1}}$		
$\frac{m+1}{n} + p$ – целое	$a + bx^n = t^k x^n$, k – знаменатель дроби p $ax^{-n} + b = t^k$, $-anx^{-n-1} dx = kt^{k-1} dt$, $x^m (a + bx^n)^p dx = x^m (t^k x^n)^p \frac{kt^{k-1} dt}{-anx^{-n-1}}$, где $x^{-n} = \frac{t^k - b}{a}$		
4	$\frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = \frac{1}{mx+n}$	См. пункт 5
5	$\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$t = x + \frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c = at^2 - \frac{b^2}{4a} + c$	Два табл-х инт-ла

Функции комплексного переменного

