# Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных (ФНП)

## § Предел и непрерывность ФНП

**Определение понятия ФНП**

Пусть множество $D \subset R_n$. Если каждой точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ поставлено в соответствие по некоторому правилу $f$ число $z \in R$, то говорят, что на множестве $D$ задана **функция $n$ переменных**.
Обозначают функцию одним из следующих способов:
$u = f(M)$, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f : R_n \to R$.

**Определение предела ФНП (*по Коши*)**

Пусть функция $z = f(M)$ определена на множестве $D$,
$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$, $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.
Число $A$ называют **пределом функции** $z = f(M)$ в точке $M_0$ (при $M \to M_0$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall M \in D$, удовлетворяющей неравенству $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0$$

$$\forall M \in D \;\; 0 < \rho(M, M_0) < \delta \Rightarrow |f(M) - A| < \varepsilon$$

**Определение непрерывной в точке ФНП**

Функция $u = f(M)$ называется **непрерывной в точке** $M_0$, если
1) $f(M)$ определена в точке $M_0$ и некоторой её окрестности;
2) существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ ;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ .

**Определение точек разрыва ФНП**

Точки множества $D$, в которых нарушается хотя бы одно из трёх условий непрерывности ФНП, называются **точками разрыва ФНП**.

**Определение частных приращений ФНП**

**Частным приращением функции** $u = f(M)$ **в точке** $M_0$ **по аргументу** $x_k$ называется приращение функции только по этому аргументу:

$$\Delta_{x_k} u = f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_n^0\right)$$

**Определение непрерывности по одному из аргументов ФНП**

**Функция** $u = f(M)$ **называется непрерывной в точке** $M_0$ **по аргументу** $x_k$, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0$ .

**Теорема о непрерывности ФНП по всем её аргументам**

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определена в окрестности точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ и непрерывна в ней по совокупности аргументов, то она непрерывна в этой точке и по каждому аргументу.

**Теоремы о свойствах непрерывных ФНП**

1. Об арифметических операциях над непрерывными функциями.
2. О композиции непрерывных функций.
3. Всякая элементарная функция ФНП непрерывна на множестве своего определения.

## § Производная и дифференциал ФНП

**Определение частных производных ФНП**

Функция

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

называется **частной производной от функции** $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ **по** $i$**-му аргументу и обозначается** символом $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ или символом $f'_{x_i}(x)$.

**Замечание.** При вычислении частной производной ФНП по одному из её аргументов все остальные аргументы считаются константами.

**Определение полного приращения ФНП**

Приращение $\Delta u = f(M) - f(M_0)$

или $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

называется **полным приращением** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M_0$.

**Определение непрерывной в точке ФНП (*на языке приращений*)**

Функция $u = f(M)$ называется **непрерывной в точке** $M_0$,

если $$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \ldots\ldots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta u = 0$$

**Определение дифференцируемой в точке ФНП**

Функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **дифференцируемой в точке** $M_0(x_{10}, x_{20},\ldots,x_{n\,0})$, если её полное приращение в этой точке имеет вид

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + o(\rho),$$

или

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho), \qquad \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$$

где $A_i$, $i=1,2,\ldots,n$ – числа, $o(\rho)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости по сравнению с $\rho$ при $\rho \to 0$.

**Определение дифференциала**

Линейная относительно приращений аргументов часть приращения функции $\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = df(x)$ называется **дифференциалом** функции $u = f(M)$ и обозначается символом $d\,f(M)$.

**Теорема (*необходимое условие дифференцируемости*)**

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0$, то она **непрерывна** в этой точке.

**Теорема (*необходимое условие дифференцируемости*)**

Если функция дифференцируема в точке $M_0$, то в этой точке у неё **существуют все частные производные**, причём $A_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, $i=1,\ldots n$.

**Теорема (*достаточное условие дифференцируемости*)**

Если функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет **частные производные** по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0$, причём эти производные **непрерывны** в точке $M_0$, то функция $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $M_0$.

**Следствие**

Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M_0$, то она имеет полный дифференциал в этой точке, и в некоторой окрестности точки $M_0$ **выполняется равенство**

$$dz(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\Delta y$$

**Геометрический смысл частных производных**

Пусть $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. По определению частной производной имеем: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{dz}{dx}(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha$

т.е. $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ есть **тангенс угла наклона касательной к графику функции** $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_o \end{cases}$ **в точке** $(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Аналогично, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{dz}{dy}(x_0, y)\Big|_{y=y_0} = \operatorname{tg}\beta$ **есть тангенс угла наклона касательной к графику функции** $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0 \end{cases}$ **в точке** $(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

**Физический смысл частной производной**

Физический смысл частной производной $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$ состоит в том, что она определяет **скорость изменения функции в точке** $M_0$ в направлении оси $OX_k$.

**Теорема 1**

Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \in D$, где $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то **сложная функция** $z = f(x(t), y(t))$ **дифференцируема** в точке $t_0$, и в этой точке $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

**Теорема 2**

Пусть функции $x = x(u, v)$ и $y= y(u, v)$ дифференцируемы в точке $(u_0, v_0)$ и, следовательно, имеют в этой точке частные производные $x'_u$, $x'_v$, $y'_u$, $y'_v$, а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0,y_0)$, где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. Тогда в точке $(u_0, v_0)$ существуют и **частные производные** $z'_u$, $z'_v$ **сложной функции** $z = f(x(u, v), y(u, v))$, и $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$.

**Теорема об инвариантности первого дифференциала**

Если функция $z = f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Т.е. **форма записи полного дифференциала** функции $z = f(x, y)$ двух (и более) переменных **не зависит** от того, являются ли $x$ и $y$ независимыми переменными, или функциями других аргументов.

**Определение неявной функции**

Если уравнение $f(x, y) = 0$ имеет единственное решение $y = y(x)$, то говорят, что **уравнение** $f(x, y) = 0$ на множестве $X$ определяет **неявную функцию** $y = y(x)$.

**Теорема (*существования, единственности и дифференцируемости неявной функции одного аргумента*)**

Пусть

1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой окрестности точки $M_0\,(x_0, y_0)$;

2) $F\,(x_0, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда найдётся такая окрестность $U(x_0, \delta)$ точки $x_0$, в пределах которой существует единственная неявная функция $y = f(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, такая, что

а) $y_0 = f(x_0)$,;

б) $y = f(x)$ - непрерывна вместе со своей производной,

причём
$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

## § Касательная плоскость и нормаль у поверхности

**Определение касательной плоскости**

**Касательной плоскостью** $T$ к поверхности $S$ в точке $M_0$ называется плоскость, содержащая касательные ко всевозможным кривым, принадлежащим поверхности S и проходящим через точку $M_0$ .

**Определение нормали к поверхности**

**Нормальной прямой** $N$ к поверхности $S$ в точке $M_0$ называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости в точке $M_0$ .

**Уравнение касательной плоскости**
к поверхности,

а) заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$
в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0;$$

б) к поверхности, заданной явно уравнением
$z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

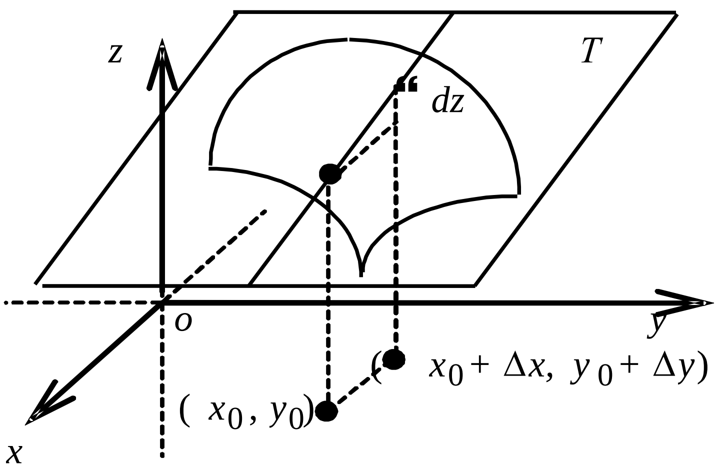
$$(z-z_0)=f_x'(M_0)(x-x_0)+f_y'(M_0)(y-y_0)$$

**Уравнение нормали к** поверхности
а) заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$
в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)};$$

б) к поверхности, заданной явно уравнением
$z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{f_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$



**Геометрический смысл дифференциала**

Дифференциал функции $z = f(x, y)$ представляет собой **приращение аппликаты касательной плоскости.**

## § Производная по направлению. Градиент скалярного поля

**Определение скалярного поля**

Если каждой точке $M$ некоторой области $G$ поставлено в соответствие число $u$, то говорят, что в области $G$ задано **скалярное поле** $u = u(M)$.

**Определение поверхности(линии уровня) скалярного поля**

Поверхность (линия), в точках которой поле $u = u(M)$ принимает постоянное значение, называется **поверхностью (линией) уровня скалярного поля**.

**Определение производной по направлению**

**Производной** скалярного поля $u(M)$ в точке $M0$ **по направлению** называется число $\lim\limits_{\substack{\Delta l \to 0 \\ (M \to M_0)}} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim\limits_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M} = \frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$.

**Теорема (*о вычислении производной по направлению*)**

Если $\bar{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $u = u(M)$ дифференцируема в точке $M_0$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

**Физический смысл производной по направлению**

$\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ **равна скорости изменения функции** $u(M)$ в данном направлении $l$.

**Определение градиента скалярного поля**

**Градиентом** скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в точке $M_0$ называется **вектор**

$$\overline{grad}\ u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\vec{k}$$

**Свойства градиента скалярного поля**

1. Градиент в данной точке $M_0$ связан с производной по направлению формулой $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = np_{\bar{l}}\,\overline{grad}u(M_0)$.

2. Градиент в данной точке $M_0$ указывает направление наискорейшего изменения поля в этой точке, а $\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right|$ – наибольшая скорость изменения поля в точке $M_0$, если направление $\bar{l}$ совпадает с вектором $\operatorname{grad} u(M_0)$.
3. Градиент в точке $M_0$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через точку $M_0$.
4. Производная по направлению вектора, касательного к поверхности уровня, равна нулю.

**Определение частных производных высшего порядка**

**Частная производная *n*-го порядка** есть первая производная от производной $(n - 1)$-го порядка.

**Теорема *о равенстве смешанных частных производных***

Пусть у функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существуют все смешанные производные до $k$-го порядка включительно, и они непрерывны. Тогда значения всех производных до $k$-го порядка включительно не зависят от того, в каком порядке производится их отыскание.

**Определение дифференциала второго порядка**

Вторым дифференциалом (полным дифференциалом второго порядка) функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка.

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

**Определение дифференциала высшего порядка**

**Дифференциалом порядка *n*** функции $z=f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала $(n - 1)$-го порядка

. $d^n u = d\left(d^{n-1}u\right)$

Дифференциал порядка $n$ также может быть записан с помощью оператора дифференциала порядка $n$ в виде $d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^n z$

**Теорема (формула Тейлора)**

Если функция $u=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из этой окрестности справедливо равенство

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^{(n)} f(M_0) + R_{n+1}, (*)$$

где $R_n$ – остаточный член **формулы Тейлора**

в **форме Лагранжа**: $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(N)$ и $N \in [M_0, M]$ ;

в **форме Пеано**: $R_n = o(\rho^n)$, где $\rho = \rho(M_0, M)$.

## § Экстремум ФНП

**Определение точки локального максимума**

Точка $M_0$ называется точкой **локального максимума** функции $u = f(M)$, если существует такая окрестность точки $M0$, для всех точек которой, отличных от $M_0$, выполняется неравенство $f(M_0) > f(M)$, (рис.1).

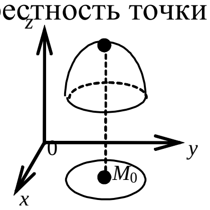



Рис. 1

**Определение точки локального минимума**

Аналогично определяется точка **локального минимума**, $f(M_0) < f(M)$, (рис.2).

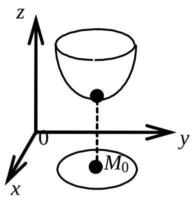



Рис. 2

**Определение точки локального экстремума**

Точки локального максимума и локального минимума называют точками **локального экстремума**.

**Теорема (*необходимый признак локального экстремума*)**

Если функция $u = f(M)$ имеет экстремум в точке $M_0$, причём в этой точке существует частная производная по $x_k$ , то эта производная равна нулю: $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$ .

Точка $M_0$, в которой все частные производные функции равны нулю, называется **стационарной точкой** функции.

**Теорема (*необходимый признак локального экстремума для функции двух аргументов*)**

Если функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и имеет в точке $M_0$ частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 .$$

**Теорема (*достаточные условия существования экстремума*)**

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$. Тогда

а) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0$ функция имеет экстремум, причем

при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – **локальный максимум**,

при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ – **локальный минимум**;

б) если $\Delta<0$, то в точке $M_0$ **экстремума нет**;

в) если $\Delta=0$, то **требуются дополнительные исследования**.

| **Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области** |
| --- |
| 1. Найти точки, принадлежащие области, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Вычислить значения функции в этих точках.<br>2. Заменить одну из независимых переменных из уравнения границы области и найти наибольшее и наименьшее значения получившейся функции одного аргумента на отрезке изменения этого аргумента: вычислить значения функции в критических точках первого порядка и на концах отрезка.<br>3. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее. |

**Задача:** Исследовать на экстремум функцию двух переменных $z = f(x, y)$ при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Здесь требуется ввести *функцию Лагранжа*:

$$F(x, y, L) = f(x, y) + L \cdot \varphi(x, y).$$

Далее образ действий аналогичен предыдущему случаю.

1) Необходимое условие экстремума.

Точка $X_0(x_0, y_0, L_0)$, являющаяся решением системы:

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_L = 0 \end{cases}$$

называется стационарной точкой функции *F*.

2) Необходимое условие экстремума:

Для того, чтобы определить, достигает ли функция $F(x, y, L)$ экстремума в стационарной точке $X_0(x_0, y_0, L_0)$ введем обозначения:

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0, L_0); \; C = F'_{yy}(x_0, y_0, L_0); \; B = F'_{xy}(x_0, y_0, L_0);$$
$$\Delta = A \cdot C - B^2$$

Тогда, если:

- $\Delta > 0, \; A < 0$ – в точке $X_0(x_0, y_0)$ функция $F(x, y, L)$ имеет максимум, а функция $z = f(x, y)$ имеет условный максимум.
- $\Delta > 0, \; A > 0$ – в точке $X_0(x_0, y_0)$ функция $F(x, y, L)$ имеет минимум, а функция $z = f(x, y)$ имеет условный минимум.
- $\Delta < 0$ – в точке $X_0(x_0, y_0)$ функция $F(x, y, L)$ не имеет экстремума, условных экстремумов нет.
- $\Delta = 0$ – экстремум может быть а может и не быть, для решения вопроса о существовании экстремума в точке $X_0(x_0, y_0)$ требуется применить дополнительные исследования.

**Пример:**

*Задача № 2023 из сборника: Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов, под ред. Б.П. Демидовича*

Определить условный экстремум функции

$$z = x^2 + y^2 \text{ при } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

**Решение:**

Составим функцию Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ 2y + \frac{\lambda}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{4} \\ y = -\frac{\lambda}{6} \\ -\frac{\lambda}{8} - \frac{\lambda}{18} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{4} \\ y = -\frac{\lambda}{6} \\ \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{9} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{4} \\ y = -\frac{\lambda}{6} \\ 9\lambda + 4\lambda = -72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{4} \\ y = -\frac{\lambda}{6} \\ 13\lambda = -72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{18}{13} \\ y = \frac{12}{13} \\ \lambda = \frac{-72}{13} \end{cases}$$

Найдем вторые производные

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 > 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Delta = 4 - 0 = 4 > 0$$

Замечание: здесь не требуется подставлять координаты стационарной точки и значение $\lambda$, т.к. вторые производные являются константами.

Получили случай $\Delta > 0$, $A > 0$, это точка минимума. Найдем значение исходной функции в этой точке.

$$z_{\min}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{36}{13}$$

**Ответ:** $z_{\min}\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}$

## Метод множителей Лагранжа для функций двух переменных.

Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ (параметр $\lambda$ называют множителем Лагранжа). Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, служит знак $d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2$. Если в стационарной точке $d^2F > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в данной точке условный минимум, если же $d^2F < 0$, то условный максимум.

## Пример №1

Найти условный экстремум функции $z(x,y)=x+3y$ при условии $x^2+y^2=10$.

*Решение*

Геометрическая интерпретация данной задачи такова: требуется найти наибольшее и наименьшее значение аппликаты плоскости $z=x+3y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2+y^2=10$.

Выразить одну переменную через другую из уравнения связи и подставить ее в функцию $z(x,y)=x+3y$ несколько затруднительно, поэтому будем использовать метод Лагранжа.

Обозначив $\varphi(x,y)=x^2+y^2-10$, составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=x+3y+\lambda(x^2+y^2-10);$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+2\lambda x;\ \frac{\partial F}{\partial y}=3+2\lambda y.$$

Запишем систему уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа:

$$\left\{\begin{aligned}&1+2\lambda x=0;\\&3+2\lambda y=0;\\&x^2+y^2-10=0.\end{aligned}\right.$$

Если предположить $\lambda=0$, то первое уравнение станет таким: $1=0$. Полученное противоречие говорит о том, что $\lambda\neq 0$. При условии $\lambda\neq 0$ из первого и второго уравнений имеем: $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=-\frac{3}{2\lambda}$. Подставляя полученные значения в третье уравнение, получим:

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2-10=0;$$
$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}=10;\lambda^2=\frac{1}{4};\left[\begin{aligned}&\lambda_1=-\frac{1}{2};\\&\lambda_2=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$
$$\lambda_1=-\frac{1}{2};\ x_1=-\frac{1}{2\lambda_1}=1;\ y_1=-\frac{3}{2\lambda_1}=3;$$
$$\lambda_2=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{2\lambda_2}=-1;\ y_2=-\frac{3}{2\lambda_2}=-3.$$

Итак, система имеет два решения: $x_1=1;\ y_1=3;\ \lambda_1=-\frac{1}{2}$ и $x_2=-1;\ y_2=-3;\ \lambda_2=\frac{1}{2}$. Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке: $M_1(1;3)$ и $M_2(-1;-3)$. Для этого вычислим определитель $H$ в каждой из точек.

$$\varphi_x'=2x;\ \varphi_y'=2y;\ F_{xx}''=2\lambda;\ F_{xy}''=0;\ F_{yy}''=2\lambda.$$
$$H=\begin{vmatrix}0&\varphi_x'&\varphi_y'\\\varphi_x'&F_{xx}''&F_{xy}''\\\varphi_y'&F_{xy}''&F_{yy}''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2x&2y\\2x&2\lambda&0\\2y&0&2\lambda\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}0&x&y\\x&\lambda&0\\y&0&\lambda\end{vmatrix}$$

В точке $M_1(1;3)$ получим: $H=8\cdot\begin{vmatrix}0&x&y\\x&\lambda&0\\y&0&\lambda\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}0&1&3\\1&-1/2&0\\3&0&-1/2\end{vmatrix}=40>0$, поэтому в точке $M_1(1;3)$ функция $z(x,y)=x+3y$ имеет условный максимум, $z_{max}=z(1;3)=10$.

Аналогично, в точке $M_2(-1;-3)$ найдем: $H=8\cdot\begin{vmatrix}0&x&y\\x&\lambda&0\\y&0&\lambda\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}0&-1&-3\\-1&1/2&0\\-3&0&1/2\end{vmatrix}=-40$. Так как $H<0$, то в точке $M_2(-1;-3)$ имеем условный минимум функции $z(x,y)=x+3y$, а именно: $z_{min}=z(-1;-3)=-10$.

Вопрос о характере экстремума в стационарных точках $M_1(1;3)$ и $M_2(-1;-3)$ можно решить и без использования определителя $H$. Найдем знак $d^2F$ в каждой стационарной точке:

$$d^2F=F_{xx}''dx^2+2F_{xy}''dxdy+F_{yy}''dy^2=2\lambda\left(dx^2+dy^2\right)$$

Отмечу, что запись $dx^2$ означает именно $dx$, возведённый в вторую степень, т.е. $(dx)^2$. Отсюда имеем: $dx^2+dy^2>0$, посему при $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ получим $d^2F<0$. Следовательно, функция имеет в точке $M_1(1;3)$ условный максимум. Аналогично, в точке $M_2(-1;-3)$ получим условный минимум функции $z(x,y)=x+3y$. Отметим, что для определения знака $d^2F$ не пришлось учитывать связь между $dx$ и $dy$, ибо знак $d^2F$ очевиден без дополнительных преобразований. В следующем примере для определения знака $d^2F$ уже будет необходимо учесть связь между $dx$ и $dy$.

### Пример №2

Найти условный экстремум функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$ при условии $x+y=0$.

*Решение*

### Первый способ (метод множителей Лагранжа)

Обозначив $\varphi(x,y)=x+y$ составим функцию Лагранжа: $F(x,y)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=3y^3+4x^2-xy+\lambda(x+y)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x-y+\lambda;\ \frac{\partial F}{\partial y}=9y^2-x+\lambda.$$

$$\begin{cases}8x-y+\lambda=0;\\ 9y^2-x+\lambda=0;\\ x+y=0.\end{cases}$$

Решив систему, получим: $x_1=0$, $y_1=0$, $\lambda_1=0$ и $x_2=\frac{10}{9}$, $y_2=-\frac{10}{9}$, $\lambda_2=-10$. Имеем две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$. Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке с использованием определителя $H$.

$$H=\begin{vmatrix}0 & \varphi'_x & \varphi'_y\\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy}\\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 8 & -1\\ 1 & -1 & 18y\end{vmatrix}=-10-18y$$

В точке $M_1(0;0)$ $H=-10-18\cdot 0=-10<0$, поэтому $M_1(0;0)$ есть точка условного минимума функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$, $z_{min}=0$. В точке $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$ $H=10>0$, посему в данной точке функция имеет условный максимум, $z_{max}=\frac{500}{243}$.

Исследуем характер экстремума в каждой из точек иным методом, основываясь на знаке $d^2F$:

$$d^2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2=8dx^2-2dxdy+18ydy^2$$

Из уравнения связи $x+y=0$ имеем: $d(x+y)=0$, $dx+dy=0$, $dy=-dx$.

$$d^2F=8dx^2-2dxdy+18ydy^2=8dx^2-2dx(-dx)+18y(-dx)^2=(10+18y)dx^2$$

Так как $d^2F\Big|_{M_1}=10dx^2>0$, то $M_1(0;0)$ является точкой условного минимума функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$. Аналогично, $d^2F\Big|_{M_2}=-10dx^2<0$, т.е. $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$ – точка условного максимума.

### Второй способ

Из уравнения связи $x+y=0$ получим: $y=-x$. Подставив $y=-x$ в функцию $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$, имеем:

$$z=3\cdot(-x)^3+4x^2-x\cdot(-x)=-3x^3+5x^2.$$

Таким образом задачу о нахождении условного экстремума функции двух переменных мы свели к задаче определения экстремума функции одной переменной.

$$\begin{gathered}z'_x=-9x^2+10x;\\ -9x^2+10x=0;\ x\cdot(-9x+10)=0;\\ x_1=0;\ y_1=-x_1=0;\\ x_2=\frac{10}{9};\ y_2=-x_2=-\frac{10}{9}.\end{gathered}$$

Получили точки $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$. Дальнейшее исследование известно из курса дифференциального исчисления функций одной переменой. Исследуя знак $z''_{xx}$ в каждой стационарной точке или проверяя смену знака $z'_x$ в найденных точках, получим те же выводы, что и при решении первым способом.

Рассмотрим еще один пример, в котором характер экстремума выясним посредством определения знака $d^2F$.

### Пример №3

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=5xy-4$, если переменные $x$ и $y$ положительны и удовлетворяют уравнению связи $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$.

*Решение*

Составим функцию Лагранжа: $F=5xy-4+\lambda\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)$. Найдем стационарные точки функции Лагранжа:

$$F'_x=5y+\frac{\lambda x}{4};\ F'_y=5x+\lambda y.$$

$$\begin{cases}5y+\frac{\lambda x}{4}=0;\\ 5x+\lambda y=0;\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0;\\ x>0;\ y>0.\end{cases}$$

Все дальнейшие преобразования осуществляются с учетом $x > 0;\ y > 0$ (это оговорено в условии задачи). Из второго уравнения выразим $\lambda = -\dfrac{5x}{y}$ и подставим найденное значение в первое уравнение: $5y - \dfrac{5x}{y} \cdot \dfrac{x}{4} = 0$, $4y^2 - x^2 = 0$, $x = 2y$. Подставляя $x = 2y$ в третье уравнение, получим: $\dfrac{4y^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$, $y^2 = 1$, $y = 1$.

Так как $y = 1$, то $x = 2$, $\lambda = -10$. Характер экстремума в точке $(2;1)$ определим, исходя из знака $d^2F$.

$$F''_{xx} = \frac{\lambda}{4};\ F''_{xy} = 5;\ F''_{yy} = \lambda.$$

Так как $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$, то:

$$d\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) = 0;\ d\left(\frac{x^2}{8}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) = 0;\ \frac{x}{4}\,dx + ydy = 0;\ dy = -\frac{xdx}{4y}.$$

В принципе, здесь можно сразу подставить координаты стационарной точки $x = 2$, $y = 1$ и параметра $\lambda = -10$, получив при этом:

$$F''_{xx} = \frac{-5}{2};\ F''_{xy} = -10;\ dy = -\frac{dx}{2}.$$

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = -\frac{5}{2}\,dx^2 + 10dx \cdot \left(-\frac{dx}{2}\right) - 10 \cdot \left(-\frac{dx}{2}\right)^2 =$$
$$= -\frac{5}{2}\,dx^2 - 5dx^2 - \frac{5}{2}\,dx^2 = -10dx^2.$$

Однако в других задачах на условный экстремум стационарных точек может быть несколько. В таких случаях лучше $d^2F$ представить в общем виде, а потом подставлять в полученное выражение координаты каждой из найденных стационарных точек:

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = \frac{\lambda}{4}\,dx^2 + 10 \cdot dx \cdot \frac{-xdx}{4y} + \lambda \cdot \left(-\frac{xdx}{4y}\right)^2 =$$
$$= \frac{\lambda}{4}\,dx^2 - \frac{5x}{2y}\,dx^2 + \lambda \cdot \frac{x^2dx^2}{16y^2} = \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{5x}{2y} + \frac{\lambda \cdot x^2}{16y^2}\right) \cdot dx^2$$

Подставляя $x = 2$, $y = 1$, $\lambda = -10$, получим:

$$d^2F = \left(\frac{-10}{4} - \frac{10}{2} - \frac{10 \cdot 4}{16}\right) \cdot dx^2 = -10dx^2.$$

Так как $d^2F = -10 \cdot dx^2 < 0$, то точка $(2;1)$ есть точкой условного максимума функции $z = 5xy - 4$, причём $z_{max} = 10 - 4 = 6$.