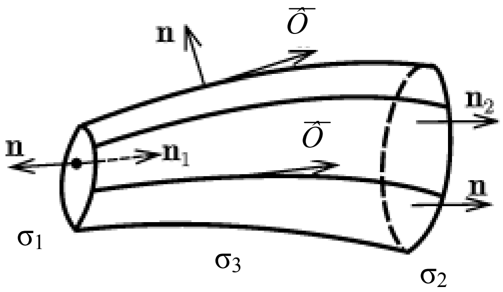
§ Соленоидальное векторное поле. Векторные трубки

Определение векторной трубки	Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую L, образуют поверхность, называемую векторной трубкой.



Определение соленоидального векторного поля	Векторное поле называется соленоидальным , если во всех точках этого поля дивергенция равна нулю: $div\overline{\Phi}(M)=0, \quad \forall M\in R_3$.

Свойства соленоидального векторного поля	1. В соленоидальном поле поток П вектора $\overline{\Phi}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю: $\Pi=\oint\!\!\oint_{\sigma}(\overline{\Phi},\overline{n^0})d\sigma=0$. 2. В соленоидальном поле поток П вектора $\overline{\Phi}$ через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянную величину вдоль всей трубки. Эта величина называется интенсивностью трубки. 3. Векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и заканчиваться внутри поля. Они являются или замкнутыми, или простираются вдоль всего поля, начинаясь и заканчиваясь на границе поля (если поле имеет границу).

§ Формула Стокса

(английский математик и механик (1819-1903 гг.))

Теорема Стокса (доказанана в 1854 г.)	Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на поверхности σ, то справедлива формула Стокса: $\iint_{\sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy+Rdz$, где произвольная поверхность σ ограничена контуром L и ориентирована по правилу правой руки.

Замечание 1. Подынтегральную функцию поверхностного интеграла можно получить из минороы второго порядка символической матрицы $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x}\\ P & Q & R & P\end{pmatrix}$.

Замечание 2. Можно показать, что условия $(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})=0$, $(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})=0$, $(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=0$ являются необходимыми и достаточными **для независимости** криволинейного интеграла по координатам **от пути интегрирования и равенства** $du=Pdx+Qdy+Rdz$,

то есть можно найти функцию $u(x,y,z)$ по её полному дифференциалу du интегралом по ломаной со звеньями, параллельными осям декартовой системы координат в трёхмерном пространстве:

$$u(x,y,z)+const=\int_A^B du=\int_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int_A^B Pdx+Qdy+Rdz=u(B)-u(A).$$

Замечание 3. Формула Грина является частным случаем формулы Стокса, когда кривая L расположена в плоскости Oxy $(z=0,\quad dz=0)$.

§ Ротор (вихрь) векторного поля

Определение ротора векторного поля	Ротором (вихрем) $rot\overline{\Phi}$ вектора $\overline{\Phi}=(P,Q,R)$ называется вектор $rot\overline{\Phi}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\overline{i}+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\overline{j}+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\overline{k}$.

Вектор $rot\overline{\Phi}$ можно получить, разложив символический определитель $\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

по элементам первой строки.

Векторная форма записи формулы Стокса	Циркуляция вектора $\overline{\Phi}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора вектора $\overline{\Phi}$ через произвольную поверхность σ, ограниченную этим контуром: $C=\oint_L(\overline{\Phi},\overline{dr})=\iint_\sigma(rot\overline{\Phi},\overline{n^0})d\sigma$.

Пример. Вычислить циркуляцию вектора $\overline{\Phi}=x^2y^3\overline{i}+\overline{j}+z\overline{k}$ по окружности $x^2+y^2=R^2,\quad z=0$, ориентированной против хода часовой стрелки.

Определение ротора, инвариантное относительно выбора системы координат	В любой точке M проекция ротора поля на любое направление нормали $\overline{n}$ равна пределу отношения циркуляции поля по контуру L, перпендикулярному нормали $\overline{n}$, к площади S, охватываемой этим контуром, при стягивании контура L к точке M $(S\to 0)$: $(np_n rot\overline{\Phi})_M=\lim\limits_{S\to 0}\frac{\oint_L(\overline{\Phi},\overline{dr})}{S}$ (обход контура и направления нормалей согласуются по правилу правой руки).

Пример 1. Поступательное движение задаёт вектор поля линейных скоростей $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} = const$.

$$rot\bar{v} = 0.$$

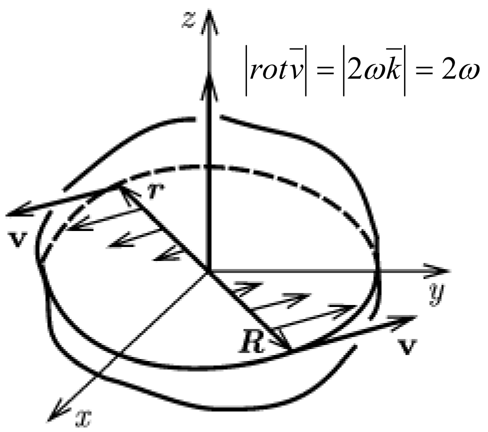
Пример 2. Деформацию задаёт вектор поля линейных скоростей $\bar{v} = \lambda y\bar{j}$.

$$rot\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \lambda y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 3. Вращательное движение задаёт вектор поля линейных скоростей $\bar{v} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$, где ω – угловая скорость вращения тела.

$$rot\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\bar{k}.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение векторных линий $\dfrac{dx}{-\omega y} = \dfrac{dy}{\omega x}$, получаем, что векторными линиями вращательного движения являются окружности $\int \omega x dx + \int \omega y dy = c$; $\quad x^2 + y^2 = \dfrac{const}{\omega} = R^2$.



Таким образом, $rot\bar{v}$ является при постоянной угловой скорости вращения постоянным вектором, направленным вдоль оси вращения Oz, а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения тела: $|\text{rot}\,\mathbf{v}| = 2\omega$.

Вывод. Огюстен Луи Коши показал, что любое движение можно представить суммой поступательного, деформационного и вращательного движения. Поскольку ротор поля линейных скоростей поступательного и деформационного движения равен нулю, то отличие ротора линейных скоростей от нуля указывает на наличие завихрённости, вращательного движения, чем и объясняется название «ротор», «вихрь».

§ Оператор Гамильтона. Дифференциальные операции первого порядка (английский математик (1805-1865 гг.))

Определение оператора Гамильтона	Оператором Гамильтона ∇ («набла» от греческого слова «$\nu\alpha\beta\lambda\alpha$» – арфа, которая напоминает этот оператор) называют векторный оператор $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

Действие оператора Гамильтона на скалярные и векторные поля	Пусть в трёхмерном пространстве задано скалярное поле $u(x,y,z)$ и векторное поле $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$. Тогда 1. $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \overline{gradu}$; 2. Скалярное произведение $(\nabla, \overline{\Phi}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = div\overline{\Phi}$; 3. Векторное произведение $\left[\nabla, \overline{\Phi}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\overline{\Phi}$.

Справедливы следующие **свойства** дифференциальных операций первого порядка.

1	$div(\overline{A} + \overline{B}) = (\nabla, \overline{A} + \overline{B}) = (\nabla\overline{A}) + (\nabla\overline{B}) = div\overline{A} + div\overline{B}$
2	$rot(\overline{A} + \overline{B}) = rot\overline{A} + rot\overline{B}$
3	$grad(\lambda u) = \nabla(\lambda u) = \lambda\nabla u = \lambda gradu$
4	$grad(uv) = \nabla(uv) = \nabla(u_c v) + \nabla(uv_c) = ugradv + vgradu$
5	$div(u\overline{\Phi}) = (\nabla, u\overline{\Phi}) = \nabla(u_c\overline{\Phi}) + \nabla(u\overline{\Phi}_c) = udiv\overline{\Phi} + \overline{\Phi}gradu$
6	$rot(u\overline{\Phi}) = [\nabla, u\overline{\Phi}] = [\nabla, u_c\overline{\Phi}] + [\nabla, u\overline{\Phi}_c] = urot\overline{\Phi} + [gradu, \overline{\Phi}]$

§ Дифференциальные операции второго порядка (дифференциальные свойства градиента, дивергенции и ротора)

Скалярное поле $u(x,y,z) \longrightarrow$ $gradu$ – *вектор*

$gradu \longrightarrow divgradu$ – *скаляр*

$gradu \longrightarrow rotgradu$ – *вектор*

Векторное поле $\overline{\Phi} = (P,Q,R)$

$\overline{\Phi} \longrightarrow div\overline{\Phi}$ – *скаляр* $\longrightarrow graddiv\overline{\Phi}$ – *вектор*

$\overline{\Phi} \longrightarrow rot\overline{\Phi}$ – *вектор*

$rot\overline{\Phi} \longrightarrow divrot\overline{\Phi}$ – *скаляр*

$rot\overline{\Phi} \longrightarrow rotrot\overline{\Phi}$ – *вектор*

Определение оператора Лапласа	Оператором Лапласа Δ (лапласианом) называют скалярное произведение оператора набла на себя $\Delta = (\nabla, \nabla) = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

	Скалярное поле $u(x,y,z)$ **порождает**	**Векторное поле** $\overline{\Phi} = (P,Q,R)$ **порождает**	
	вектор градиент $\nabla u = \overline{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$	**скаляр дивергенцию** $(\nabla, \overline{\Phi}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\overline{\Phi}$	**вектор ротор** $[\nabla, \overline{\Phi}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\overline{\Phi}$
grad		$graddiv\overline{\Phi} = \nabla(\nabla\overline{\Phi}) = \frac{\partial div\overline{\Phi}}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial div\overline{\Phi}}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial div\overline{\Phi}}{\partial z}\bar{k}$	
div	$divgradu = (\nabla, \nabla)u = \nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$		$divrot\overline{\Phi} = (\nabla, [\nabla, \overline{\Phi}]) = 0$ (смешанное произведение содержит два одинаковых вектора)
rot	$rotgradu = [\nabla, \nabla u] = 0$ (векторное произведение коллинеарных векторов)		$rotrot\overline{\Phi} = [\nabla, [\nabla, \overline{\Phi}]] = \nabla(\nabla\overline{\Phi}) - (\nabla, \nabla)\overline{\Phi} = graddiv\overline{\Phi} - \Delta\overline{\Phi}$ где $\Delta\overline{\Phi} = \Delta P\bar{i} + \Delta Q\bar{j} + \Delta R\bar{k}$

§ Безвихревые, потенциальные и гармонические поля

Определение безвихревого поля	Векторное поле $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ называется безвихревым, если во всех его точках $rot\overline{\Phi} = 0$.

Теорема 1	В безвихревом односвязном поле криволинейный интеграл по координатам $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от пути интегрирования, а подынтегральное выражение в нём является полным дифференциалом du некоторой скалярной функции $u(x,y,z)$.

Определение потенциального поля	Скалярная функция $u(x,y,z)$, градиент которой равен вектору $\overline{\Phi}$, называется потенциальной функцией, или потенциалом поля $\overline{\Phi}$. Поле, имеющее потенциал, называется потенциальным.

Теорема 2	Каждое безвихревое односвязное поле имеет потенциал, т. е. является потенциальным.

Пример. Показать, что поле $\overline{\Phi} = z(y\overline{i} + x\overline{j}) + (2z + xy)\overline{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Теорема 3	Всякое потенциальное односвязное поле является безвихревым.

Теорема 4	В потенциальном односвязном поле циркуляция вектора поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Теорема 5	В потенциальном односвязном поле ($\overline{\Phi} = grad u$) работа E силы $\overline{\Phi}$ по перемещению материальной точки по линии L равна разности потенциалов в конечной и начальной точке линии L $E = \int\limits_{AB} (\overline{\Phi}, \overline{dr}) = u(B) - u(A)$.

Определение гармонического поля	Векторное поле, являющееся одновременно потенциальным и соленоидальным, называется гармоническим.

Определение гармонической функции	Функция $u(x,y,z)$, лапласиан которой равен нулю: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, называется гармонической.

Свойства гармонического поля	Гармоническое поле не имеет вихрей, источников и стоков векторных линий.

Пример. Охарактеризовать векторное поле $\overline{\Phi} = x\cos x\overline{i} + y\cos y\overline{j} + (z^2 + 2)\overline{k}$. Является ли оно потенциальным, соленоидальным, гармоническим?

Пример. Охарактеризовать векторное поле $\overline{\Phi} = (y+z)\overline{i} + (x+z)\overline{j} + (x+y)\overline{k}$. Является ли оно потенциальным, соленоидальным, гармоническим?