Интегральное исчисление функции нескольких переменных

§ Определение интегралов двойного, тройного, криволинейного по длине дуги (первого рода), поверхностного по площади поверхности (первого рода)

Пусть функция $f(M)$, $M \in R_n$ определена на некотором множестве θ.

Произвольное разбиение множества θ на n непересекающихся элементов так, что $\theta = \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

будем обозначать символом $T(\Theta)$ или просто T.

Выберем на каждом элементе $\Delta\Theta_i$ произвольную точку M_i и составим сумму:

$$J(T, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\theta_i$$

Определение интегральных сумм	Функция $J(T, M_i)$ называется **интегральной суммой** функции $f(M)$, соответствующей данному разбиению T и данному выбору точек M_i на множестве θ.

Определение предела интегральных сумм	Число J называется **пределом интегральных сумм** $J(T, M_i)$ при $\lambda = \max_{1 \le i \le n} meg\, \Delta\Theta_i \to 0$, если $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ такое, что **для всякого разбиения** T, у которого $\lambda < \delta$, выполняется неравенство $$\lvert J(T, M_i) - J \rvert < \varepsilon$$ **при любом выборе точек M_i** на элементах $\Delta\Theta_i$.
Определение интегралов	Если существует $\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} J(T, M_i) = J$, то число J называется **интегралом** от функции $f(M)$ по множеству θ и обозначается так: $$J = \int_{\theta} f(M)d\theta = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\theta_i,$$ а функция $f(M)$ называется интегрируемой на множестве θ

В зависимости от того, каково множество θ, на котором определена функция $f(M)$, получают двойные, тройные, криволинейные 1-го рода, поверхностные 1-го рода интегралы:

Интеграл	Точки $M_i \in R_n$ принадлежат	Интерпретация		
		множества θ	функции $f(M) \geq 0$	интеграла
Двойной $\iint\limits_D f(M)dS$	двухмерному пространству R_2	Плоская область D плоскости xOy, имеющая площадь S (квадрируемая)	1. Аппликата поверхности $z = f(M)$; 2. Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке области D	1. Объём цилиндрического тела с основанием D, ограниченного сверху поверхностью $z = f(M)$; 2. Масса плоской пластины D
Тройной $\iiint\limits_V f(M)dV$	трёхмерному пространству R_3	Пространственное тело V, имеющее объём V (кубируемое)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке тела V	Масса тела V
Криволинейный 1-го рода $\int\limits_l f(M)dl$	трёхмерному пространству R_3	Кривая l, имеющая длину l (спрямляемая)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке кривой l	Масса кривой l
Поверхностный 1-го рода $\iint\limits_\sigma f(M)d\sigma$	трёхмерному пространству R_3	Поверхность σ, имеющая площадь σ (квадрируемая)	Плотность $\rho = f(M)$ в каждой точке поверхности σ	Масса поверхности σ

§ Основные свойства интегралов

Свойство 1 (линейности)	Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ интегрируемы на множестве θ, то линейная комбинация этих функций $\alpha f(M) + \beta\varphi(M)$ также интегрируема на множестве θ, причём $\int\limits_\theta(\alpha f(M) + \beta\varphi(M))d\theta = \alpha\int\limits_\theta f(M)d\theta + \beta\int\limits_\theta \varphi(M)d\theta$, где α и β – любые числа.

Свойство 2 (аддитивности)	Если функция $f(M)$ интегрируема на множестве θ, то при разбиении этого множества на непересекающиеся элементы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ $(\theta = \sum\limits_{i=1}^{k}\theta_i)$: $\int\limits_\theta f(M)d\theta = \int\limits_{\theta_1} f(M)d\theta + \int\limits_{\theta_2} f(M)d\theta + \ldots + \int\limits_{\theta_k} f(M)d\theta$

Свойство 3 (сохранения знака)	Если на множестве θ функция $f(M) \geq 0$, то и $\int\limits_{\theta} f(M)d\theta \geq 0$. Если, кроме этого, функция $f(M)$ непрерывна на множестве θ и хотя бы в одной точке этого множества $f(M) > 0$, то $\int\limits_{\theta} f(M)d\theta > 0$.

Свойство 4 (сравнения)	Если функции $f(M)$ и $\varphi(M)$ интегрируемы на множестве θ, причём $\varphi(M) \leq f(M)$ для всех точек этого множества, то $\int\limits_{\theta} \varphi(M)d\theta \leq \int\limits_{\theta} f(M)d\theta$.

Свойство 5 (теорема о среднем значении)	Пусть функция $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве θ. Тогда на этом множестве существует хотя бы одна точка M_0, что $\int\limits_{\theta} f(M)d\theta = f(M_0)\cdot\theta$. Значение функции в точке M_0 называется средним значением на множестве θ: $f(M_0)$ – среднее значение.

Теорема существования интеграла от ФНП	Всякая функция $f(M)$, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $\bar{\theta}$, интегрируема на этом множестве. (Ограниченное множество в R_2 можно накрыть кругом конечного радиуса, в R_3 – поместить в шар конечного радиуса. В замкнутом множестве граница множества $\bar{\theta}$ принадлежит этому множеству).

§ Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат

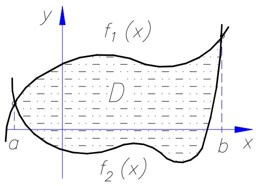
Определение правильной в направлении оси oY области	Область D называется правильной в направлении оси oY, если любая прямая, параллельная оси oY, пересекает границу области не более чем в двух точках. Аналогично определяется область, правильная в направлении оси oX.

<table>
<tr>
<td>Определение двукратного интеграла</td>
<td>
Двукратным интегралом по правильной в направлении оси oY области D от непрерывной в $\overline{D}$ функции $f(x,y)$ называется число

$$J_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy = \int_a^b F(x,y)\Bigg|_{y=\varphi_2(x)}^{y=\varphi_1(x)} dx,$$

причём первообразная внутреннего интеграла $F(x,y)$ находится при постоянном x: $x = const$,

где область $D = \left\{(x,y): \begin{matrix} a \le x \le b \\ \varphi_2(x) \le y \le \varphi_1(x) \end{matrix}\right\}$



</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Двукратным интегралом по правильной в направлении оси oX области D от непрерывной в $\overline{D}$ функции $f(x,y)$ называется число

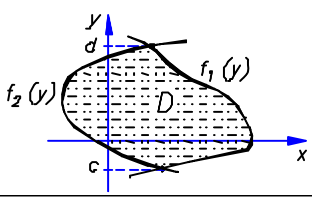
$$J_D = \int_c^d dy \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x,y)dx = \int_c^d F(x,y)\Bigg|_{x=\psi_2(y)}^{x=\psi_1(y)} dy$$

,

причём первообразная внутреннего интеграла $F(x,y)$ находится при постоянном y: $y = const$,

где область

$D = \left\{(x,y): \begin{matrix} c \le y \le d \\ \psi_2(y) \le x \le \psi_1(y) \end{matrix}\right\}$



</td>
</tr>
</table>

Пример. Вычислить двукратный интеграл $J_D = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x^2 + y^2)dy$.

<table>
<tr>
<td>Свойство 1 (аддитивности двукратного интеграла)</td>
<td>
Если правильную в направлении оси oY область D разбить на две подобласти D_1 и D_2 прямой, параллельной оси oY или oX, то

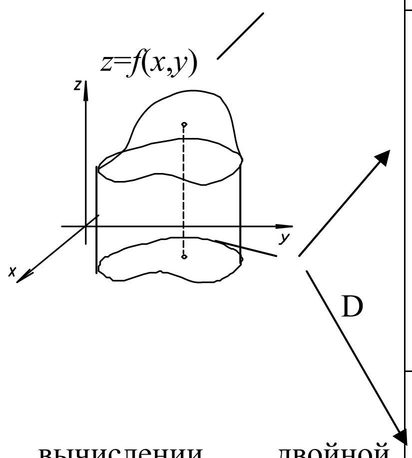
$$J_D = J_{D_1} + J_{D_2}$$
</td>
</tr>
</table>

Свойство 2 (теорема об оценке двукратного интеграла)	Пусть m и M – наименьшее и наибольшее значения непрерывной в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ функции $f(x,y)$, а S – площадь области D. Тогда: $mS \le \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy \le MS$

Свойство 3 (теорема о среднем)	Двукратный интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по области $\overline{D}$, имеющей площадь S, равен произведению площади S на значение подынтегральной функции в некоторой точке P_0 области $\overline{D}$, т.е. $J_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy = f(P_0)S$.

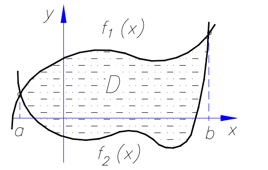
Теорема (о связи двойного и двукратного интеграла)	Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D: $\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy$, где элемент площади $dS = dxdy$ в декартовой системе координат.

Правило вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат (см. ОК)

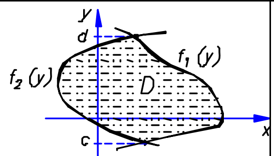
<table>
<tr><td rowspan="3">Двойной интеграл</td><td rowspan="3">

При вычислении двойной интеграл приводится к повторному (двукратному):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)dx$$</td><td colspan="2">Декартова система координат (ДСК)</td></tr>
<tr><td>

Область D – правильная в направлении оси oY.</td><td>$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)dy$$

Внутренний интеграл меняется от кривой $y=f_2(x)$ до кривой $y=f_1(x)$, внешний – от прямой $x=a$ до прямой $x=b$.</td></tr>
<tr><td>

Область D – правильная в направлении оси oX.</td><td>$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{f_2(y)}^{f_1(y)} f(x,y)dx$$

Внутренний интеграл меняется от кривой $x=f_2(y)$ до кривой $x=f_1(y)$, внешний – от прямой $y=c$ до прямой $y=d$.</td></tr>
</table>

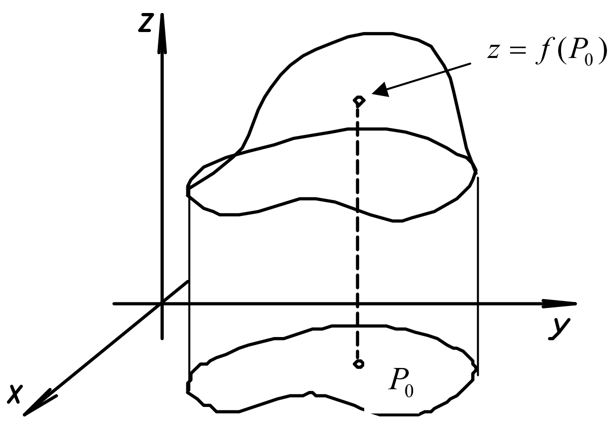
Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$,

если область D ограничена линиями: $x=0$; $y=x$; $y=2-x^2$; $(x \geq 0)$.

Замечание. Геометрический смысл теоремы о среднем значении для двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = J_D = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy = f(P_0)S$$

заключается в том, что **объём** цилиндрического тела с основанием D в плоскости XoY (площадь основания D равна S), ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$,
равен объёму цилиндра с таким же основанием и высотой $f(P_0)$.



Вопросы к экзамену:

Какой геометрический смысл имеет теорема об оценке двойного интеграла?

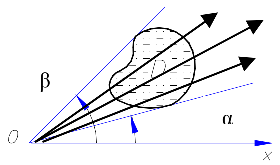
Какой геометрический смысл имеет интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dS$?

Какой геометрический смысл имеет интеграл $\iint\limits_D dS$?

§ Замена переменных в двойном интеграле

Теорема (о замене переменных в двойном интеграле)	Если 1. Преобразование $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$ переводит ограниченную замкнутую область D в ограниченную замкнутую область D^* и является взаимно однозначным; 2. Функции $x = x(u,v),\ \ y = y(u,v)$ имеют в D^* непрерывные частные производные первого порядка; 3. Отличен от нуля якобиан Ia: $Ia = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ в D^*; 4. Функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то справедлива формула замены переменной в двойном интеграле: $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),\ y(u,v))\lvert Ia\rvert dudv$$

Правило замены переменной в двойном интеграле	Чтобы перейти от декартовой системы координат xOy к криволинейной uOv, нужно 1) в подынтегральной функции вместо переменных x и y подставить их выражения через новые переменные, 2) элемент площади $dS = dxdy$ заменить модулем якобиана, умноженным на дифференциалы новых переменных $dxdy = \lvert Ia\rvert dudv$, 3) преобразовать уравнения границы области D в уравнения границы области D^*.

<table>
<tr><th colspan="2">Полярная система координат (ПСК)</th></tr>
<tr><td>


$x^2 + y^2 = \rho^2$
</td><td>

$$x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi; Ia = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$dS = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dS =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_2(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho, \varphi)\rho d\rho$$

ρ меняется **от кривой**, на которой лучи из полюса входят в область интегрирования, **до кривой**, на которой лучи из полюса выходят из области интегрирования – границ области *D*,
φ меняется от α до β – углами между касательными к области интегрирования лучами и полярной осью.
Если полюс находится внутри области интегрирования, то $0 \le \varphi \le 2\pi$.
</td></tr>
</table>

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \exp(x^2 + y^2)dxdy$, где область D: $x^2 + y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$

Важное замечание. Пределы интегрирования внутреннего интеграла могут быть **постоянными** только в том случае, когда **граница** области интегрирования состоит **из линий координатной сетки.**

В **декартовой** системе координат – это **прямые, параллельные осям координат**,

в **полярной** системе координат – это **окружности с центром в полюсе и лучи, выходящие из полюса.**

Во всех остальных случаях хотя бы один из пределов внутреннего интеграла является функцией внешней переменной.

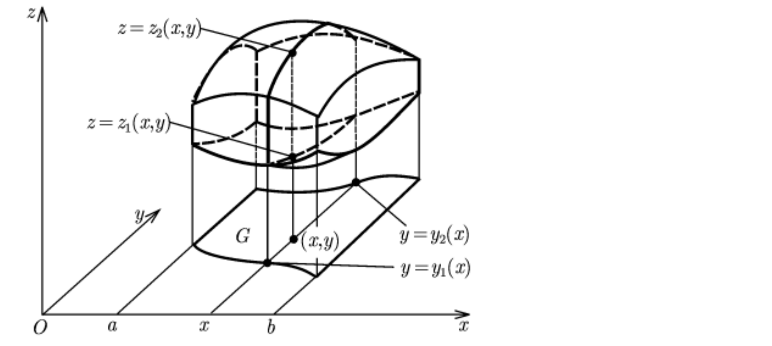
Физические приложения двойных интегралов. Пусть D − материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область на плоскости XoY) с плотностью $\mu(x,y)$. Тогда справедливы следующие формулы:

№	Физический смысл	Формула
1	Масса m пластинки	$m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$
2	Статические моменты пластинки M_x и M_y относительно осей oX и oY	$M_x=\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy$; $M_y=\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy$
3	Координаты центра тяжести (x_0, y_0) пластинки	$x_0=\dfrac{M_y}{m}$; $y_0=\dfrac{M_x}{m}$
4	Моменты инерции пластинки I_x и I_y относительно осей oX и oY	$I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy$; $I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy$
5	Момент инерции пластинки I_0 относительно начала координат	$I_0=I_x+I_y=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)dxdy$

§ Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат (ДСК)

Определение правильной трёхмерной области	Область V трёхмерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью σ, называется правильной, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) всякая прямая, параллельная оси oZ, проведённая через точку области V, пересекает поверхность σ не более чем в двух точках; 2) вся область V проектируется на плоскость XoY в правильную двумерную область D; 3) всякая часть области V, отсечённая плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (XoY, XoZ, YoZ), обладает свойствами 1 и 2 (внутри области V нет дырок).

Определение трёхкратного интеграла	Трёхкратным интегралом J_V по правильной области V называется число $$J_V=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$$



Внутренний интеграл берётся от поверхности $z = z_1(x, y)$ до поверхности $z = z_2(x, y)$ – поверхностей входа и выхода стрелок, параллельных оси oZ, пересекающих область V.
Первообразную внутреннего интеграла находят в предположении о том, что аргументы, не входящие под знак дифференциала внутреннего интеграла, постоянны:

$$J_V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x,y,z)\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dy$$

$$x = const;$$
$$y = const$$

В результате получают двукратный интеграл по области, являющейся проекцией области V на плоскость XoY.

Пример. Вычислить трёхкратный интеграл J_V от функции $f(x, y, z) = z$, если область V ограничена поверхностями: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.

Свойства линейности, аддитивности, теоремы об оценке, среднем значении трёхкратного интеграла аналогичны соответствующим свойствам и теоремам для двукратного интеграла. В частности, справедлива теорема о связи тройного и трёхкратного интеграла.

Теорема (о связи тройного и трёхкратного интеграла)	Тройной интеграл от непрерывной функции $f(x, y, z)$ по правильной области V равен трёхкратному интегралу по той же области: $\iiint\limits_V f(x, y.z)dxdydz =$ $J_V = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

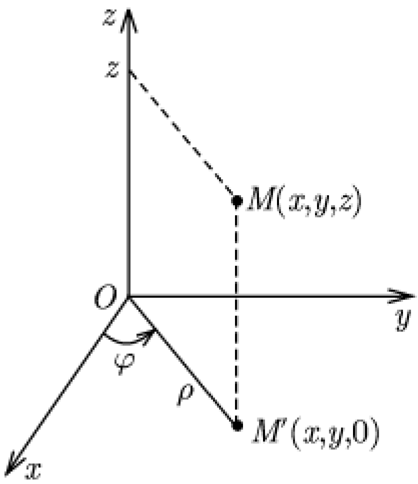
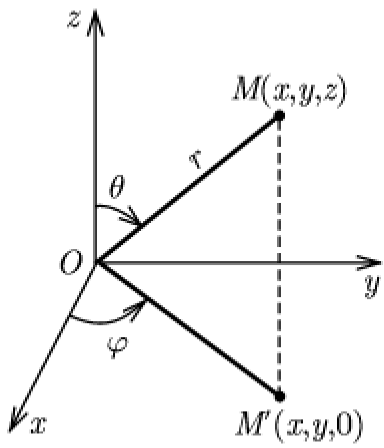
Вопросы к экзамену:
Какую интерпретацию может иметь теорема об оценке тройного интеграла?

Какую интерпретацию может иметь интеграл $\iiint\limits_V f(x, y.z)dxdydz$ **?**

Какую интерпретацию может иметь интеграл $\iiint\limits_V dxdydz$ **?**

§ Замена переменных в тройном интеграле

Правило замены переменной в тройном интеграле	Чтобы перейти от декартовой системы координат $Oxyz$ к криволинейной $Ouvw$, нужно 1) в подынтегральной функции вместо переменных x, y и z подставить их выражения через новые переменные, 2) элемент объёма $dV = dxdydz$ заменить модулем якобиана, умноженным на дифференциалы новых переменных $dxdydz = \|Ia\|dudvdw$, 3) преобразовать уравнения границы области V в уравнения границы области V^*.

Цилиндрическая система координат (ЦСК)	**Сферическая система координат (ССК)**
	

$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z;$ $Ia=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ $\lvert Ia\rvert=\rho;$ $dV=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz;$ $x^2+y^2=\rho^2;$ $0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\rho\le\infty;\ -\infty\le z\le\infty;$ $I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\,d\rho\int\limits_{z_1(\varphi,\rho)}^{z_2(\varphi,\rho)}f(\rho,\varphi,z)dz$ Пределы интегрирования постоянны для внешнего, среднего и внутреннего интеграла, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const,\ \rho = const,\ z = const$ (область интегрирования – цилиндрические сегменты).	$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,$ $z=\rho\cos\theta;$ $Ia=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0\\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\end{vmatrix}$ $\lvert Ia\rvert=\rho^2\sin\theta;$ $x^2+y^2+z^2=\rho^2;$ $dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta;$ $0\le\varphi\le 2\pi;\quad 0\le\theta\le\pi;\quad 0\le\rho\le\infty;$ $I=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)}f(\varphi,\rho,\theta)\rho^2d\rho.$ Пределы интегрирования постоянны для внешнего, среднего и внутреннего интеграла, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: $\varphi = const,\ \rho = const,\ \theta = const$ (область интегрирования – шаровые сегменты).

Пример. Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$,

$V:\ \ x^2+y^2=2x;\quad y=0;\ z=0;\ z=a\ (y\ge 0)$.

Пример. Вычислить $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\quad (a>0)$.

Физические приложения тройных интегралов. Пусть V – материальное тело (кубируемая область в пространстве *Oxyz*) с плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда справедливы следующие формулы:

№	Физический смысл	Формула
1	Масса m тела V	$m=\iiint\limits_V\mu(x,y,z)dxdydz$
2	Статические моменты тела относительно координатных плоскостей *Oyz*, *Ozx*, *Oxy*	$M_{yz}=\iiint\limits_V x\mu(x,y,z)dxdydz$; $M_{zx}=\iiint\limits_V y\mu(x,y,z)dxdydz$; $M_{xy}=\iiint\limits_V z\mu(x,y,z)dxdydz$.
3	Координаты центра тяжести тела	$x_0=\dfrac{M_{yz}}{m};\quad y_0=\dfrac{M_{xz}}{m};\quad z_0=\dfrac{M_{xy}}{m}$.
4	Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей *Oyz*, *Ozx*, *Oxy*.	$I_{yz}=\iiint\limits_V x^2\mu(x,y,z)dxdydz$;

		$I_{zx} = \iiint\limits_V y^2 \mu(x,y,z)dxdydz$; $I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \mu(x,y,z)dxdydz$.
5	Моменты инерции тела относительно осей координат *Ox*, *Oy*, *Oz*.	$I_x = I_{xz} + I_{xy}$; $I_y = I_{yx} + I_{yz}$; $I_z = I_{zx} + I_{zy}$;
6	Момент инерции тела относительно начала координат.	$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$
7	Ньютоновский потенциал поля тяготения тела *V* в точке (x_0, y_0, z_0); где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ − расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$	$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint\limits_V \frac{\mu(x,y,z)}{r} dxdydz$
8	Сила притяжения материальной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ массы m_0 телом *V*, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ − расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$, γ − гравитационная постоянная.	$F_x = \gamma m_0 \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{x = x_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\frac{x - x_0}{r^3} dxdydz$; $F_y = \gamma m_0 \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{y = y_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\frac{y - y_0}{r^3} dxdydz$; $F_z = \gamma m_0 \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{z = z_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_V \mu(x,y,z)\frac{z - z_0}{r^3} dxdydz$;