ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)

Определение частной производной.

Если в точке $M(x,y)$ существует предел отношения частного приращения ФНП $z = f(x,y)$ по одному из ее аргументов к приращению этого аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, то этот предел называется **частной производной** ФНП по этому аргументу в точке $M(x,y)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Правило. Чтобы найти частную производную ФНП по одному из ее аргументов, надо все остальные аргументы ФНП считать постоянными и применять правила дифференцирования и таблицу производных функции одного аргумента, по которому берется частная производная

Градиент функции $F(x,y,z)$:

$$\overline{grad}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}$$

Градиент функции в точке характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Производная по направлению

Вектор направления $\vec{l} = (m,n,p)$;

Орт направления:

$$\vec{l^0} = \frac{(m,n,p)}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma);$$

Производная по направлению равна скалярному произведению градиента на орт направления:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = (\overrightarrow{grad}F, \vec{l}^{\,0}) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$$

Экстремум функции двух переменных

1. Необходимое условие существования экстремума.

Если функция $f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум и имеет в точке M_0 частные производные первого порядка, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю, т. е.

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

2. Достаточные условия существования экстремума.

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}$. Тогда

а) если $\Delta > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум, причем при $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$ – локальный максимум, при $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$ – локальный минимум;

б) если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремума нет;

в) если $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования.

Производные сложных функций

$$z = f(u,v),\ u = u(x,y),\ v = v(x,y);$$

u, v – промежуточные аргументы, x, y – основные аргументы.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Скалярное произведение $(\overrightarrow{grad}F(M_0), \overrightarrow{M_0M}) = 0$,

или

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0$$

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области

1. Найти точки, принадлежащие области, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют. Вычислить значения функции в этих точках.
2. Заменить одну из независимых переменных из уравнения границы области и найти наибольшее и наименьшее значения получившейся функции одного аргумента на отрезке изменения этого аргумента: вычислить значения функции в критических точках первого порядка и на концах отрезка.
3. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Производные неявно заданных функций

$F(x,y,z) = 0$, $\Leftrightarrow$ $z = f(x,y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Уравнение нормали к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

векторное произведение

$$[\overrightarrow{grad}F(M_0), \overrightarrow{M_0M}] = \vec{0},$$

или

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

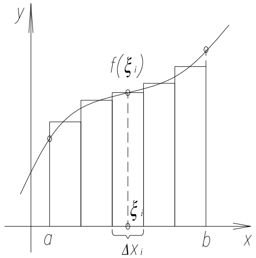
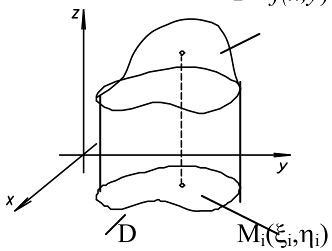
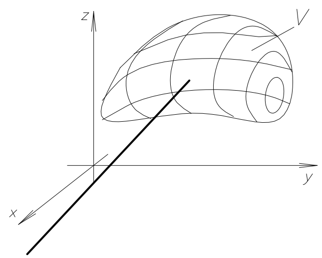
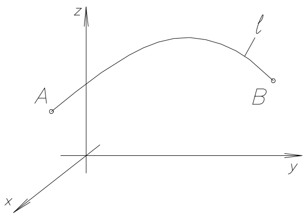
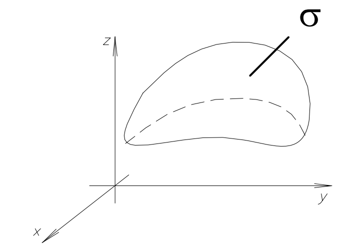
Полный дифференциал ФНП

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Полный дифференциал ФНП равен сумме ее частных дифференциалов: $dz = d_x z + d_y z$.

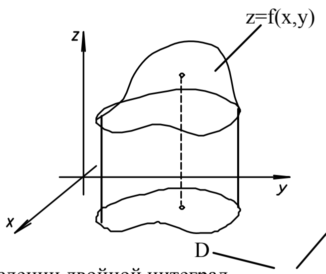
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Интегралы от скалярной функции

	Определенный	Двойной	Тройной	Криволинейный I рода	Поверхностный I рода
Ω	$M\in R_1$ $\Omega:\{\forall x\in[a,b]\}$ отрезок оси ОX	$M\in R_2$ Ω-область D в плоскости XOY S-площадь D	$M\in R_3$ Ω – область трехмерного пространства. V-некоторый объем.	$M\in R_3$ Ω-дуга кривой l в R_3	$M\in R_3$ Ω-часть поверхности σ в R_3
$\Delta\Omega$ Mi	$\Delta\Omega=\Delta x$ $M_i=\xi_i\in\Delta x_i$	$\Delta\Omega=\Delta S=\Delta x\Delta y$ $M_i(\xi_i,\eta_i)\in\Delta S_i$	$\Delta\Omega=\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$ $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta V_i$	$\Delta\Omega=\Delta l$-элемент дуги кривой $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta l_i$	$\Delta\Omega=\Delta\sigma$-элемент поверхности $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta\sigma_i$
Определение, обозначение инт-ла	$\int\limits_a^b f(x)dx =$ $= \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max\|\Delta x_i\|\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$	$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i$	$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta V_i$	$\int\limits_l f(x,y,z)dl =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta l$	$\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma =$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta\sigma_i$
Геометрический и физический смысл.	S – площадь криволинейной трапеции  $\int\limits_a^b f(x)dx=S$ $f(x)=1\Rightarrow\int\limits_a^b dx=b-a$	Уравнение поверхности: $z=f(x,y)$  $\iint\limits_D f(x,y)dS = V$цил. тела; $f(x,y)$ – *плотность плоской пластины* $D\Rightarrow\iint\limits_D f(x,y)dS=m_D$ – – *масса* D; $f(x,y)=1\Rightarrow\iint\limits_D dS=S_D$ – *площадь* D	 $f(x,y,z)$ – плотность в т.M тела V $\iiint\limits_V \mathrm{f(x,y,z)dV} = m_{\text{телаV}}$ $f(x,y,z)=1\Rightarrow\iiint\limits_V dV=V_{\text{тела } V}$	 $f(x,y,z)$ – плотность в т.M кривой l $\int\limits_l f(x,y,z)dl=m_{\text{кривой } l}$ $f(x,y,z)=1\Rightarrow\int\limits_l dl=$ длина l	 $f(x,y,z)$ – плотность в т.M поверхности σ $\iint\limits_\sigma f(x,y,z)d\sigma=\mathrm{m}_{\text{поверхности}}$ $f(x,y,z)=1\Rightarrow$ $\Rightarrow\iint\limits_\sigma d\sigma=$ *площадь* σ

Вычисление кратных интегралов

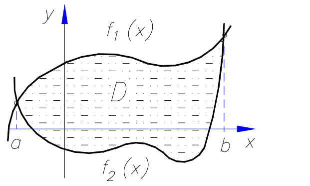
Двойной интеграл



При вычислении двойной интеграл сводится к повторному (двукратному):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_2(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)dx$$

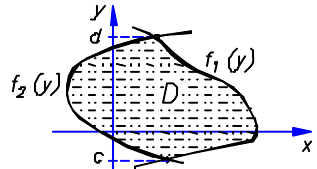
Декартова система координат (ДСК)



Область D – правильная в направлении оси OY.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_2(x)}^{f_1(x)} f(x,y)dy$$

Внутренний интеграл меняется от кривой $y=f_2(x)$ до кривой $y=f_1(x)$, внешний – от прямой $x=a$ до прямой $x=b$

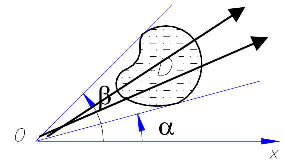


Область D – правильная в направлении оси OX

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{f_2(y)}^{f_1(y)} f(x,y)dx$$

Внутренний интеграл меняется от кривой $x=f2(y)$ до кривой $x=f_1(y)$, внешний – от прямой $y=c$ до прямой $y=d$.

Полярная система координат (ПСК)



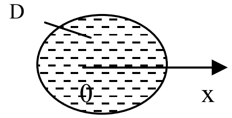
$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi$

$dS = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_2(\varphi)}^{\rho_1(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$$

ρ меняется от кривой до кривой – границ области D -в направлении стрелок на рис., φ меняется от α до β.

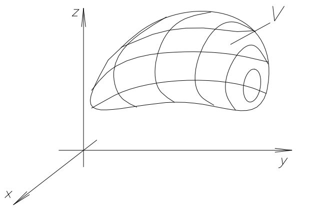


$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi$

$dS = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$$

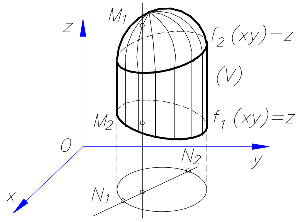
Тройной интеграл



При вычислении тройной интеграл сводится к повторному (трехкратному):

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

ДСК

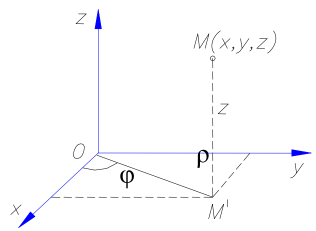


Внутренний интеграл меняется от поверхности до поверхности, средний – от кривой до кривой в области D, внешний – от прямой до прямой в области D.

Пределы интегрирования зависят от переменных внешних интегралов или постоянны, если граница области совпадает с плоскостями координатной сетки:

$x = const, y = const, z = const$

Цилиндрическая (ЦСК)



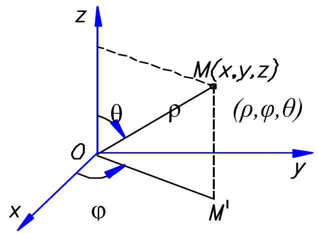
$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, z = z;$

$dV = \rho d\rho d\varphi dz;\ x^2 + y^2 = \rho^2;$

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int\limits_{z_1(\varphi,\rho)}^{z_2(\varphi,\rho)} f(\varphi,\rho,z)dz$$

Пределы интегрирования постоянны, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: *φ =const, ρ=const, z=const.*

Сферическая (ССК)



$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$

$z = \rho\cos\theta,$

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$

$dV = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta,$

$$I = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f(\varphi,\rho,\theta)\rho^2 d\rho$$

Пределы интегрирования постоянны, если граница области состоит из поверхностей координатной сетки: *φ =const, ρ=const, θ=const.*