Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1, y\to -1} \dfrac{tg(x+y)e^{x-y}}{x^2-y^2}$. На палитре Calculus два раза щёлкаем кнопку оператора вычисления предела, заполняем метки. На палитре Symbolic щёлкаем стрелку вправо, затем нажимаем клавишу Enter.

$$\lim_{x\to 1}\ \lim_{y\to -1} \frac{(\tan(x+y)\cdot\exp(x-y))}{x^2-y^2} \to \frac{1}{2}\cdot\exp(2)$$

2. Доказать, что $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$. Сначала задаём функцию двух переменных $z(x,y)$ оператором присваивания из палитры Calculator и меню функций $f(x)$ в верхней строчке панели инструментов. Записываем проверяемое выражение. На палитре Symbolic щёлкаем стрелку вправо, затем нажимаем клавишу Enter.

$$z(x,y) := \operatorname{acsc}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{x\cdot\frac{d}{dx}z(x,y)}{y} + \frac{d}{dy}z(x,y) \to 0$$

3. Дана функция $z=\cos\dfrac{xy}{t}$, где $x=\ln t$, $y=\dfrac{1}{t}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и $\dfrac{dz}{dt}$. Вычислить $\dfrac{dz}{dt}$ при $t=1$.

$$z(t) := \cos\left(\ln(t)\cdot\frac{\frac{1}{t}}{t}\right) \qquad \frac{d}{dt}z(t) \to -\sin\left(\frac{\ln(t)}{t^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{t^3}-2\cdot\frac{\ln(t)}{t^3}\right)$$

$$t := 1$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = 3.67\times 10^{-15} \qquad Z(X,Y,T) := \cos\left(X\cdot\frac{Y}{T}\right) \qquad \frac{d}{dT}Z(X,Y,T) \to \sin\left(X\cdot\frac{Y}{T}\right)\cdot X\cdot\frac{Y}{T^2}$$

4. Дана дифференцируемая функция $z=arctg(x+y)$, где $x=\sin uv$, $y=\cos(u-v)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

$$w(u,v) := \operatorname{atan}(\sin(u\cdot v)+\cos(u-v))$$

$$\frac{d}{du}w(u,v) \to \frac{\cos(u\cdot v)\cdot v+\sin(-u+v)}{1+(\sin(u\cdot v)+\cos(-u+v))^2} \qquad \frac{d}{dv}w(u,v) \to \frac{\cos(u\cdot v)\cdot u-\sin(-u+v)}{1+(\sin(u\cdot v)+\cos(-u+v))^2}$$

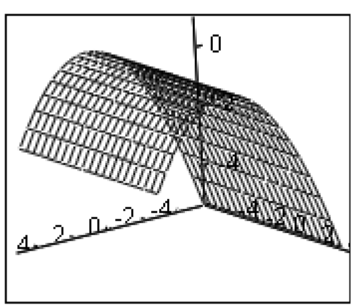
Найдите $\dfrac{d}{du}\dfrac{d}{dv}w(u,v)$ и $\dfrac{d^2}{du^2}w(u,v)$

5. Вычислить приближённо $\sqrt{5e^{0,02}+2,03^2}$

$$\sqrt{5\cdot\exp(0.02)+(2.03)^2} = 3.036759243$$

6. Построить поверхность $x^2-2x+6y=4$. Задаём функцию двух переменных, на палитре Graph щёлкаем 5-ю кнопку и заполняем метку именем функции.

$$y(x,z) := \frac{\left(4+2\cdot x-x^2\right)}{6}$$

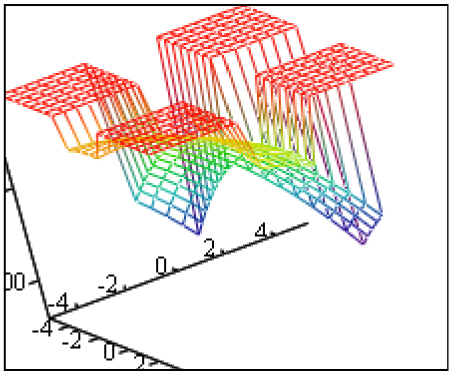


y

Поставьте курсор на график, повертите поверхность, удерживая левую кнопку мыши.
Покрутите колёсико мыши.

6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$ в области D $|x| \le 1, |y| \le 1$.

$z(s,h) := -s^2 + s \cdot h - h^2 - 9 \cdot h + 6 \cdot s - 35$ $\qquad$ $Z(s,h) := \mathrm{if}(-1 \le s \le 1 \vee -1 \le h \le 1, z(s,h), 0)$

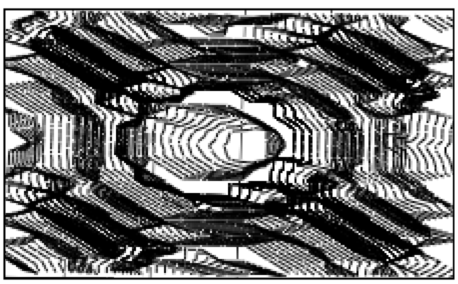


Z

Левой кнопкой мыши щёлкните 2 раза в поле графика. В открывшемся окне выберите Appearance, активируйте Colomap. Красный цвет характеризует максимум по оси Z, а фиолетовый - минимум.

7. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$.

$P(m,n) := \mathrm{if}\left[\left(\cos\left(m^2 + n^2\right) \ge 0\right), \sqrt{\cos\left(m^2 + n^2\right)}, 0\right]$

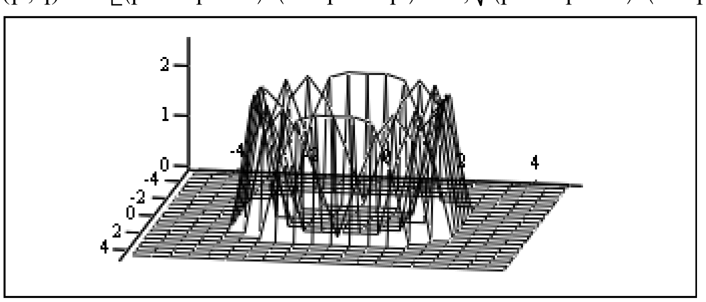


P

Левой кнопкой мыши щёлкните 2 раза в поле графика. В открывшемся окне выберите Appearance, активируйте Contour Lines.

8. Найти и построить область определения функции $z = \sqrt{\left(x^2 + y^2 - 4\right)\left(9 - x^2 - y^2\right)}$.

$S(p,q) := \mathrm{if}\left[\left(p^2 + q^2 - 4\right) \cdot \left(9 - p^2 - q^2\right) \ge 0, \sqrt{\left(p^2 + q^2 - 4\right) \cdot \left(9 - p^2 - q^2\right)}, 0\right]$



S

9. Дана функция $u = \ln\left(x^2 + y^2\right) + xyz$:

Найти производную по направлению вектора $\overline{a} = i - j + 5k$ в точке. $M(1,-1,2)$.

Используем палитру Matrix

$u(x,y,z) := \ln\left(x^2 + y^2\right) + x \cdot y \cdot z$ $\quad x := 1 \quad y := -1 \quad z := 2$

$a := \frac{d}{dx}u(x,y,z) \qquad b := \frac{d}{dy}u(x,y,z)$

$c := \frac{d}{dz}u(x,y,z) \qquad gradu := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad gradu = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad L := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$L0 := \frac{L}{|L|}$

Кнопкой скалярного умножения находим производную по направлению:

$graduL0 = -1.347$