# Несобственные интегралы (н.и.)

| | | I рода<br>(по бесконечному промежутку) | II рода (от неограниченной<br>на промежутке интегрирования функции) |
|---|---|---|---|
| Определение н.и. | 1 | $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ | $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ |
| | 2 | $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ | $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ |
| | 3 | $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$ | $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$<br>$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ |
| Определение сходимости н.и. | | Несобственный интеграл ***сходится***, если существуют **конечные пределы** в правых частях равенств, определяющих эти интегралы.<br>Если эти **пределы бесконечны или не существуют**, то несобственный интеграл ***расходится***.<br>$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} A - \text{конечное число} \Rightarrow \text{интеграл сходится}; \\ \left.\begin{matrix}\infty \\ \overline{\exists}\end{matrix}\right\} - \text{интеграл расходится}. \end{cases}$ | |
| Признаки сходимости н.и. | 1 | $\varphi(x),\ f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,+\infty)$ | $\varphi(x),\ f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,b)$<br>$\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ |
| | | $0\le\varphi(x)\le f(x)$ | |
| | | $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \xleftarrow{\text{Сходимость}} \int_a^{+\infty} f(x)dx$<br>$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx \xrightarrow{\text{Расходимость}} \int_a^{+\infty} f(x)dx$ | $\int_a^{b}\varphi(x)dx \xleftarrow{\text{Сходимость}} \int_a^{b} f(x)dx$<br>$\int_a^{b}\varphi(x)dx \xrightarrow{\text{Расходимость}} \int_a^{b} f(x)dx$ |
| | 2 | $\varphi(x)>0,\ f(x)>0,\ \forall x\in[a,+\infty)$ | $\varphi(x),\ f(x)$ *непрерывны* $\forall x\in[a,b)$<br>$\lim\limits_{x\to b}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ |
| | | $\exists\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A\neq 0,\quad A<\infty$ | $\exists\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A\neq 0,\quad A<\infty$ |
| | | Несобственные интегралы от функций $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ ведут себя одинаково:<br>или оба сходятся, или оба расходятся | |
| | 3 | $\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx$<br>*сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно*<br>*расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно;}\\ \text{расходится.}\end{cases}$ | $\int_a^{b}\lvert f(x)\rvert dx \Rightarrow \int_a^{b} f(x)dx$<br>*сходится* $\Rightarrow$ *сходится абсолютно*<br>*расходится* $\Rightarrow \begin{cases}\text{сходится условно;}\\ \text{расходится.}\end{cases}$ |
| Эталонные н.и. | | $\int\limits_{a>0}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^k} = \begin{cases}\dfrac{a^{-k+1}}{k-1} - \text{сходится, если } k>1, \\ +\infty - \text{расходится, если } k\le 1.\end{cases}$ | $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k<1, \\ \infty - \text{расходится, если } k\ge 1.\end{cases}$<br>$\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{-k+1}}{-k+1} - \text{сходится, если } k<1, \\ \infty - \text{расходится, если } k\ge 1.\end{cases}$ |

## Приложения определенного интеграла

**Теорема.** Если величина $Q$ обладает на $[a,b]$

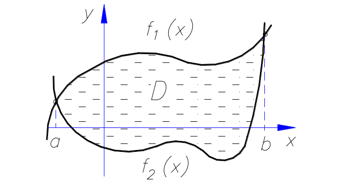
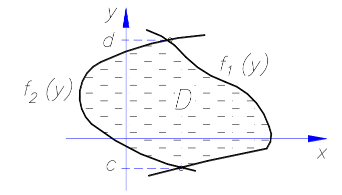
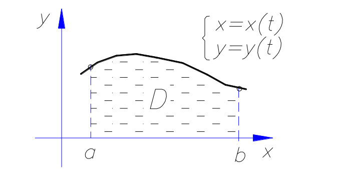
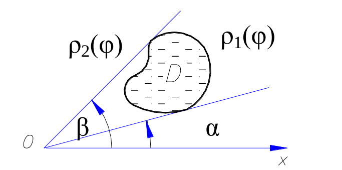
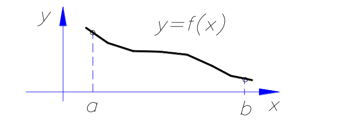
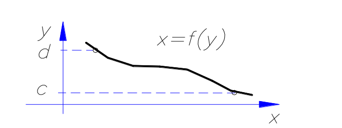
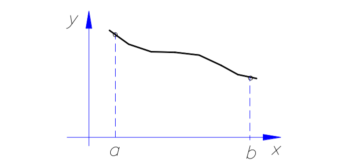
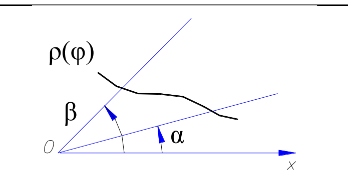
1. свойством аддитивности, а именно, если $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$,

то $Q=\Delta Q_1+\Delta Q_2+\ldots+\Delta Q_n$, где $\Delta Q_i$ – значение $Q$ на $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots n$;

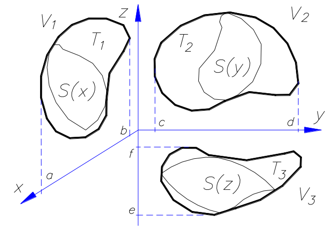
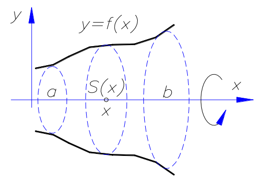
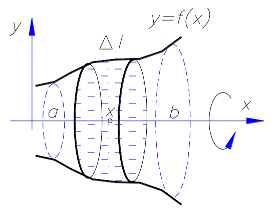
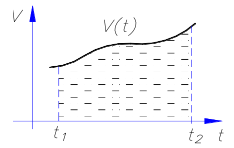
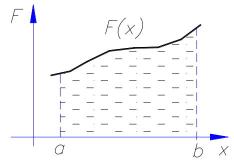
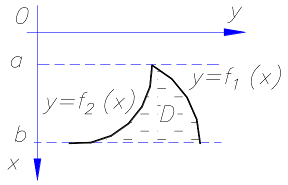
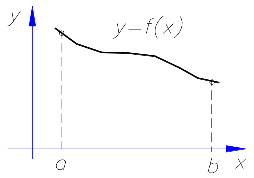
2. свойством линейности Q в малом: $\Delta Q \approx f(x)\Delta x$, где $f(x)$ – интегрируемая на $[a,b]$ функция,

то величину $Q$ можно найти интегралом от её элемента $dQ = f(x)dx$ по промежутку $[a,b]$:

$$Q=\int_a^b f(x)dx$$

| Q | № | Чертеж | Система координат и пояснения | Формула | Q |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$, площадь плоской фигуры $D$ | 1 |  | Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области $D$ не выше другой. | $S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$ | $S$, площадь плоской фигуры $D$ |
| | 2 |  | Д. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ f_2(y)\le x\le f_1(y)\end{matrix}\right\}$ Одна кривая границы области $D$ не левее другой. | $S=\int_c^d (f_1(y)-f_2(y))dy$ | |
| | 3 |  | Д. С. К. $\alpha\le t\le\beta$ $x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b$ $(\ y(t)\ge 0,\ \forall t\in[\alpha,\beta]\ )$ Верхняя граница области задана параметрически | $S=\int_\alpha^\beta y(t)x_t' dt$ | |
| | 4 |  | П. С. К. $D=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho_2(\varphi)\le\rho\le\rho_1(\varphi)\end{matrix}\right\}$ | $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho_1^2(\varphi)-\rho_2^2(\varphi))d\varphi$ | |
| $l$, длина кривой $L$ | 1 |  | Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} a\le x\le b \\ y=f(x)\end{matrix}\right\}$ | $l=\int_a^b \sqrt{1+(y_x')^2}dx$ | $l$, длина кривой $L$ |
| | 2 |  | Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} c\le y\le d \\ x=f(y)\end{matrix}\right\}$ | $l=\int_c^d \sqrt{1+(x_y')^2}dy$ | |
| | 3 |  | Д. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le t\le\beta \\ x=x(t),\ y=y(t) \\ x(\alpha)=a,\ x(\beta)=b\end{matrix}\right\}$ Линия $L$ задана параметрически | $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt$ | |
| | 4 |  | П. С. К. $L=\left\{\begin{matrix} \alpha\le\varphi\le\beta \\ \rho=\rho(\varphi)\end{matrix}\right\}$ | $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$ | |

# Приложения определенного интеграла

| Q | № | Чертеж | Система координат и пояснения | Формула | Q |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$, объем тела $T$ | 1 |  | Д. С. К. $T_1=\begin{Bmatrix} a\le x\le b \\ S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ $T_2=\begin{Bmatrix} c\le y\le d \\ S(y)\perp 0Y\end{Bmatrix}$ $T_3=\begin{Bmatrix} e\le z\le f \\ S(z)\perp 0Z\end{Bmatrix}$ | $V_1=\int_a^b S(x)dx$ $V_2=\int_a^b S(y)dy$ $V_3=\int_e^f S(z)dz$ | $V$, объем тела $T$ |
| | 2 |  | Д. С. К. $T=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x) \\ \pi y^2=S(x)\perp 0X\end{Bmatrix}$ Тело $T$ образовано вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$ | $V_{ox}=\pi\int_a^b y^2(x)dx$ $V_{ox}=2\pi\int_{y_1}^{y_2} y\cdot x(y)dy$ | |
| $\sigma$, площадь поверхн. ω | 1 |  | Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} a\le x\le b \\ y=f(x) \\ \Delta\sigma=2\pi\, y(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x)$ вокруг оси $0X$ | $\sigma_x=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$ | $\sigma$, площадь поверхн. ω |
| | | | Д. С. К. $\omega_x=\begin{Bmatrix} \alpha\le t\le\beta \\ y=y(t),\ x=x(t) \\ \Delta\sigma=2\pi\, y(t)\Delta l\end{Bmatrix}$ Поверхность ϖ образована вращением кривой $y=f(x\ (t))$, заданной параметрически, вокруг оси $0X$ | $\sigma_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_x^{/})^2}\,dt$ | |
| $S$, путь | 1 |  | Д. С. К. $V=\begin{Bmatrix} t_1\le t\le t_2 \\ V=V(t)\end{Bmatrix}$ $V$ – скорость прямолинейного движения тела на промежутке времени $[t_1,t_2]$ | $s=\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$ | $S$, путь |
| $A$, работа | 1 |  | Д. С. К. $F=\begin{Bmatrix} a\le x\le b \\ F=F(x)\end{Bmatrix}$ Сила $F$ направлена параллельно оси $0X$ на промежутке $[a,b]$ | $A=\int_a^b F(x)dx$ | $A$, работа |
| $P$, давл | 1 |  | Д. С. К. $D=\begin{Bmatrix} a\le x\le b \\ f_2(x)\le y\le f_1(x) \\ \Delta P=gx\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))\end{Bmatrix}$ $\mu$ – плотность жидкости, давящей на пластину $D$ | $P=g\int_a^b x\mu(x)(f_1(x)-f_2(x))dx$ | $P$, давл. |
| $m$, масса | 1 |  | Д. С. К. $L=\begin{Bmatrix} a\le x\le b,\ y=f(x) \\ \Delta m=\mu(x)\Delta l\end{Bmatrix}$ $\mu$ – линейная плотность кривой $L$ | $m=\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx$ | $m$, масса |

Статические моменты относительно координатных осей $S_x$, $S_y$, моменты инерции $M_x$, $M_y$, координаты центра тяжести $x_c$, $y_c$ плоской кривой

$$y=f(x),\ a\le x\le b,\ dl=\sqrt{1+(y_x^{/})^2}\,dx=\sqrt{(x_t^{/})^2+(y_t^{/})^2}\,dt=\sqrt{\rho^2+(\rho_\varphi^{/})^2}\,d\varphi$$

$$S_x=\int_a^b \mu(x)y\,dl \quad S_y=\int \mu(x)x\,dl \quad M_x=\int_a^b \mu(x)y^2dl \quad M_y=\int_a^b \mu(x)x^2dl \quad x_c=\frac{S_y}{m} \quad y_c=\frac{S_x}{m}$$