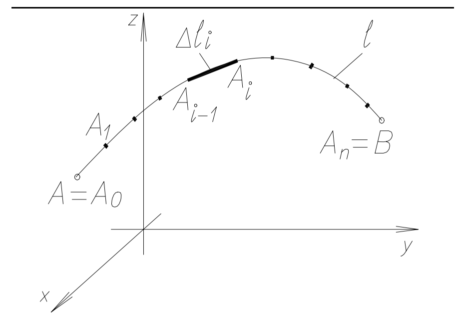
ТЕОРИЯ ПОЛЯ

§ Криволинейный интеграл по координатам (второго рода)

Определение векторного поля	Полем называется множество, элементы которого удовлетворяют аксиомам сложения, умножения, связи сложения и умножения. Поле, элементами которого являются векторы, называется векторным полем.

Определение векторной линии	Векторной линией векторного поля называется линия, в каждой точке которой касательная совпадает с вектором, соответствующим этой точке. Если векторное поле задано вектор-функцией $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$, то векторные линии можно найти, решив систему дифференциальных уравнений: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Задача о работе силового поля	Найти работу E силового поля $\overline{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ по перемещению материальной точки вдоль спрямляемой незамкнутой кривой AB из точки A в точку B.



Вектор силы $\overline{F}$, перемещающей материальную точку по кривой AB от точки A к точке B равен:

$$\overline{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k} = (P,Q,R)$$

1. Разобьем кривую AB на непересекающиеся дуги $\overset{\cup}{AB} = \left\{ \overset{\cup}{A_0A_1}, \overset{\cup}{A_1A_2}, \dots, \overset{\cup}{A_{n-1}A_n} \right\} = \{\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n\}$;

2. Выберем произвольно точки M_i на каждом элементе разбиения Δl_i ($i=1\div n$): $M_i \in \Delta l_i$; $\overrightarrow{F}(M_i)$ – сила в точке M_i дуги Δl_i

Элемент работы $\Delta E_i = (\overrightarrow{F}(M_i), \Delta\vec{r}_i)$ – скалярное произведение силы в точке M_i на вектор $\Delta\vec{r}_i = \overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\quad \Delta\bar{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$, $\quad i = 1 \div n$;

3. Просуммируем элементы работы ΔE_i

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta E_i = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{F}(M_i), \Delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\xi_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i,$$

получим интегральную сумму для криволинейного интеграла по координатам;

4. Перейдем к пределу при $n \to \infty$, $\lambda = \max \Delta l_i \to 0$ ($i=1\div n$):

$$E = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta E_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} (\overline{F}(M_i), \Delta\bar{r}_i) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i =$$

$$= \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} (\overline{F}, \overline{dr}), \quad \textit{где } \overline{dr} = (dx, dy, dz).$$

E – работа силы $\overline{F}$ по перемещению материальной точки из A в B по кривой AB, а интеграл называется **криволинейным по координатам (второго рода).**

Теорема существования криволинейного интеграла по координатам	Пусть кривая AB задана параметрически функциями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, имеющими непрерывные производные первого порядка при $\alpha \le t \le \beta$. Тогда для всякой вектор-функции $\overline{\Phi} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, имеющей непрерывные проекции P, Q, R вдоль этой кривой, существует криволинейный интеграл по координатам: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} (\overline{\Phi}, \overline{dr}),\quad где\ \overline{dr} = (dx, dy, dz).$

§ Вычисление и свойства криволинейных интегралов по координатам (второго рода)

Правило вычисления криволинейного интеграла по координатам	Чтобы вычислить криволинейный интеграл по координатам (II рода), нужно привести его к определённому интегралу: 1) в подынтегральном выражении вместо переменных *x, y, z* и дифференциалов *dx, dy dz* подставить их выражения из параметрических уравнений линии интегрирования; 2) взять определенный интеграл в пределах изменения параметра *t* от точки *A* до точки *B*.

Свойство 1 (зависимость от ориентации на кривой)	При изменении направления интегрирования на противоположное криволинейный интеграл по координатам меняет знак: $\int\limits_{AB} (\overline{\Phi}, \overline{dr}) = -\int\limits_{BA} (\overline{\Phi}, \overline{dr})$

Свойства определённого интеграла **линейности, аддитивности** и остальные (с учётом теоремы существования для криволинейных интегралов по координатам) также имеют место для криволинейных интегралов второго рода.

Пример. Вычислить $\int\limits_{AB} 2xydx + y^2dy + z^2dz$, где AB – один виток винтовой линии $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2t$ от точки $A(1, 0, 0)$ до точки $B(1, 0, 4\pi)$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, где AB – дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2, 8)$.

Определение циркуляции векторного поля	Если криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (\overline{\Phi}, \overline{dr})$ берётся по замкнутому контуру L (точки A и B совпадают), то он называется циркуляцией векторного поля по замкнутому контуру L и обозначается $C = \oint\limits_{L} (\overline{\Phi}, \overline{dr})$.

Пример. Вычислить циркуляцию поля $\overline{\Phi}=x\overline{i}+2y\overline{j}+z\overline{k}$ вдоль окружности L, образованной пересечением цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскости $z=1$, если контур обходится в положительном направлении.

§ Формула Грина (английский математик и физик (1793-1841)) **(связь двойных и криволинейных интегралов)**

Теорема (формула Грина)	Пусть на плоскости XoY в каждой точке правильной области D определены функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда имеет место формула Грина $C=\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$, где криволинейный интеграл берётся в положительном направлении по замкнутому контуру L, ограничивающему область D.

Следствие. а) $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x$. Площадь области D равна $S_D=\iint\limits_D dxdy=\oint\limits_L xdy$;

б) $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=0$. Площадь области D равна $S_D=\iint\limits_D dxdy=-\oint\limits_L ydx$;

в) $P(x,y)=-\frac{1}{2}y$, $Q(x,y)=\frac{1}{2}x$. Площадь области D равна $S_D=\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом: $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$.

§ Независимость криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования

Определение	Пусть A и B – две произвольные точки области G. Если криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(\overline{\Phi},\overline{dr})$ по любой кривой, лежащей в области G и соединяющей точки A и B, принимает одно и то же значение, то говорят, что интеграл не зависит от пути интегрирования.

Теорема 1 (критерий независимости интеграла от пути интегрирования)	Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(\overline{\Phi},\overline{dr})$ не зависит от пути интегрирования в некоторой области G, тогда и только тогда, когда интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равен нулю.

Теорема 2 (основная)	Криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования в односвязной области G плоскости XoY, тогда и только тогда, когда в каждой точке этой области непрерывны функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и выполняется равенство: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример. Вычислить $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$.

§ Интегрирование полных дифференциалов

Теорема 3 (критерий полного дифференциала)	Дифференциальное выражение $Pdx + Qdy$ в односвязной области G является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ тогда и только тогда, когда в области G непрерывны функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и выполняется равенство: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

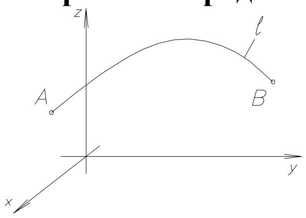
Теорема 4 (следствие основной)	Криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда его подынтегральное выражение является полным дифференциалом: $Pdx + Qdy = du$.

Формулы интегрирования полного дифференциала (по ломаной, звенья которой параллельны осям декартовой системы координат)	$u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + c$ $x{=}const \neq x_0$ или $u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + c$ $y{=}const \neq y_0$

Пример. Найти первообразную функцию $u(x, y)$, если $du = (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2 y + 2y)dy$

§ Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода)

Задача о вычислении массы кривой	Найти массу m спрямляемой кривой AB длины l, если линейную плотность вдоль этой кривой задаёт функция $\mu = f(x, y, z)$.

Определение криволинейного интеграла 1-го рода  	Разобьём кривую AB на n непересекающихся элементарных дуг, найдём элемент массы i-го элемента разбиения $\Delta m_i = f(M_i)\Delta l_i, \quad M_i \in \Delta l_i, \quad i = 1, 2, ..., n$. Предел интегральной суммы $$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \int_{AB} f(x,y,z)dl = m,$$ если он существует, не зависит от способа разбиения кривой AB на элементарные дуги и выбора точек M_i на каждой из них, называется криволинейным интегралом по длине дуги (первого рода) и равен массе m спрямляемой кривой AB длины l, если линейную плотность вдоль этой кривой задаёт функция $\mu = f(x,y,z)$.

Свойство 1	Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от ориентации на кривой: $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{BA} f(x,y,z)dl$.

Свойство 2	$f(M) = 1, \quad \forall M \in AB \Rightarrow \int\limits_{AB} dl = l$, где l – длина кривой AB.

Правило вычисления криволинейного интеграла 1-го рода	Чтобы вычислить криволинейный интеграл по длине дуги (I рода), нужно привести его к определённому интегралу: 1) в подынтегральную функцию вместо переменных *x, y, z* подставить их выражения из параметрических уравнений линии интегрирования; 2) заменить элемент дуги *dl* корнем квадратным из суммы квадратов производных *x, y, z* по *t,* умноженным на *dt*: $dl = \sqrt{(x_t^/)^2 + (y_t^/)^2 + (z_t^/)^2}\,dt$; 3) взять определенный интеграл в пределах изменения параметра *t*.

Пример. Найти массу четверти окружности $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = 0, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$,

если плотность в каждой точке кривой равна квадрату ординаты этой точки.

Замечание. Если плоская кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, то, считая x параметром, получим: $$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{x_A}^{x_B} f(x,\ y(x))\sqrt{1 + (y_x^/)^2}\,dx$$

Теорема существования криволинейного интеграла по длине дуги	Для всякой функции $f(x,y,z)$, непрерывной на кривой AB, имеющей длину l и заданной параметрически функциями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ с непрерывными производными первого порядка, существует криволинейный интеграл по длине дуги (1-го рода): $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl$.

Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода	Пусть $\cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$ – направляющие косинусы касательной к кривой AB в точке M. Тогда $dx = \cos\alpha\ dl,\quad dy = \cos\beta\ dl,\quad dz = \cos\gamma\ dl$. Поэтому $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl$.

§ Приложения криволинейных интегралов первого рода.

Пусть L − спрямляемая кривая с линейной плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда:

№	Физический смысл	Формула
1	Масса m кривой	$m = \int\limits_L \mu(x,y,z)dl$.
2	Длина l кривой	$l = \int\limits_L dl$.
3	Площадь S цилиндрической поверхности	$S = \int\limits_L f(x,y)dl$, где $z = f(x,y)$ – аппликата, L – направляющая цилиндрической поверхности в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz.
4	Статические моменты кривой L относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz	$M_{yz} = \int\limits_L x\mu(x,y,z)dl$; $\quad M_{xz} = \int\limits_L y\mu(x,y,z)dl$; $\quad M_{yx} = \int\limits_L z\mu(x,y,z)dl$.
5	Координаты центра тяжести кривой	$x_0 = \dfrac{M_{yz}}{m};\quad y_0 = \dfrac{M_{xz}}{m};\quad z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m}$.
6	Моменты инерции кривой относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy	$I_{yz} = \int\limits_L x^2\mu(x,y,z)dl$; $\quad I_{xz} = \int\limits_L y^2\mu(x,y,z)dl$; $\quad I_{yx} = \int\limits_L z^2\mu(x,y,z)dl$.
7	Моменты инерции кривой относительно осей координат Ox, Oy, Oz	$I_x = I_{xz} + I_{xy};\quad I_y = I_{yx} + I_{yz};\quad I_z = I_{zx} + I_{zy}$.
8	Момент инерции кривой относительно начала координат	$I_0 = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} = \int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)dl$.