МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»
(СПбГТИ(ТУ))

Кафедра высшей математики

А.А. Груздков

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания

Санкт-Петербург
2012

УДК 517.91

Груздков, А.А. Техника вычисления определённых интегралов [Текст]: методические указания / А.А. Груздков.— СПб.: СПбГТИ(ТУ), 2012.— 61 с.

В методических указаниях разъясняются основные понятия темы «Определённый интеграл», приводятся базовые определения и формулировки наиболее важных теорем, подробно разбирается решение типовых задач. Основное внимание уделяется специфике вычисления именно определённых интегралов, т. е. тем особенностям, которые отличают этот класс задач от от нахождения первообразной (вычисления неопределённого интеграла).

Методические указания предназначены для студентов первого курса всех специальностей, и могут быть полезны всем, кто приступает к изучению интегрального исчисления.

Методические указания соответствуют следующим компетенциям подготовки бакалавров: ОК-1, ПК-1 специальности 240700 — «Биотехнология»; ОК-1, ПК-1, ПК-8, ПК-9, ПК-21 специальности 240100 — «Химическая технология»; ОК-1, ОК-10 специальности 230100 — «Информатика и вычислительная техника»; ОК-1, ОК-10, ПК-1, ПК-2 специальности 220400 — «Управление в технических системах»; ОК-1, ОК-9, ПК-21 специальности 151000 —«Технологические машины и оборудование»; ОК-1, ПК-1 специальности 150100 — «Материаловедение и технологии материалов»; ОК-1, ПК-1,ПК-2 специальности 270800 — «Строительство»; ОК-5, ОК-15, ПК-31 специальности 080200 — «Менеджмент»; ОК-1, ОК-10 специальности 031600 — «Реклама и связи с общественностью».

Рис. 15, библиогр. 4 назв.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики Государственной полярной академии, канд. физико-математических наук, доцент Г. В. Никитенко,

Утверждены на заседании учебно-методической комиссии факультета информационных технологий и управления 29.05.2012.

Рекомендованы к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

Содержание

Введение

Техника вычисления интегралов представляет собой важную часть математического анализа. Вычисление интегралов является основой решения многих прикладных задач, навыки вычисления интегралов необходимы, как при изучении других разделов математики (дифференциальные уравнения, ряды, теория вероятностей, векторный анализ, уравнения математической физики и др.), так и при изучении других дисциплин (физика, теоретическая и прикладная механика, сопротивление материалов и др.). В отличие от дифференцирования, которое сводится к последовательному применению стандартных формул, интегрирование представляет собой достаточно сложную задачу, обычно не сводящуюся к преобразованиям по заранее заданным правилам.

При изучении интегрирования основное внимание обычно уделяется технике нахождения первообразных, т.е. теме «Неопределённый интеграл», в то же время специфике вычисления опредлённых интегралов часто не уделяется должного внимания.

В первом разделе, который является введением в интегральное исчисление, разбирается геометрический смысл «интегральных сумм», а также приводятся примеры их прямого вычисления. Рассмотрение некоторых примеров этого раздела должно способствовать более глубокому пониманию определения интеграла и основных идей интегрального исчисления, а также расширению кругозора и повышению общего уровня математической культуры. Однако, поскольку материал этого раздела непосредственно не используется в дальнейшем изложении, изучение темы можно начать сразу со второго раздела.

Предполагается, что студенты уже знакомы с понятием первообразной и неопределённого интеграла, таблицей первообразных, а также с методами интегрирования некоторых типов выражений, хотя бы на начальном уровне. Разумеется, для усвоения материала совершенно необходимо владение основными приёмами дифференциального исчисления.

Примеры, связанные с приложением интегралов к задачам геометрии, физики и пр., очень полезны при изучении интегрального исчисления, однако здесь они не разбираются, поскольку заслуживают отдельного рассмотрения. Большой практический интерес представляют численные методы приближённого вычисления интегралов. В пособии обсуждаются лишь самые общие соображения, необходимые для понимания сути этих методов. Подробное рассмотрение численных методов также выходит за рамки данного пособия.

1 Аддитивные величины. Примеры вычисления площадей

1.1 Свойство аддитивности

Свойство ***аддитивности***, которым обладают многие величины, заключается в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям (класс возможных разбиений объекта на части предполагается заданным). Примерами аддитивных величин в геометрии являются длина, площадь, объем. Действительно, площадь целой фигуры равна сумме площадей её частей. В физике свойством аддитивности обладают масса (но только в классической физике!), энергия, электрический заряд, энтропия и др. Такие величины называются также ***экстенсивными***. Немало аддитивных величин есть в других областях. Так, примером аддитивной величины можно считать деньги. Многие величины не обладают свойством аддитивности. К таковым относятся ***интенсивные*** величины, например температура и плотность. Не выполняется свойство аддитивности для объемов смешиваемых жидкостей и т.д.

Интеграл представляет собой абстракцию, служащую для описания аддитивных величин, т.е. таких как площадь, длина, объем, масса, энергия и т.д. Исторически идеи интегрального исчисления появились как раз при решении задач на нахождение площадей, объемов и т.д. В этой связи можно упомянуть задачи о вычислении площадей и объемов, решенные Архимедом (III в. до н. э.) и работу Иогана Кеплера «Новая стереометрия винных бочек преимущественно австрийских» (XVII в.). Рассмотрение подобных задач может служить хорошей базой для последующего изучения интегрального исчисления.

1.2 Площадь плоской фигуры

Не обсуждая подробно вопроса об определении понятия «площадь», будем считать, что на основании интуитивных представлений является очевидным факт, что площадь фигуры обладает перечисленными ниже свойствами. Пусть G — некоторый класс плоских фигур, для которых определено понятие площади, $S(D)$ — площадь фигуры D. Тогда:

1) $\forall D \in G \quad S(D) \geqslant 0$ (неотрицательность);

2) $D_1,\ D_2 \in G, \quad D_1 \subset D_2 \Longrightarrow S(D_1) \leqslant S(D_2)$ (монотонность);

3) $D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset \Longrightarrow S(D) = S(D_1) + S(D_2)$ (аддитивность).

Будем считать также известной элементарную формулу для площади прямоугольника и её простые следствия.

1.3 Площадь, лежащая под аркой синусоиды

Рассмотрим задачу о нахождении площади арки синусоиды, т.е. площади фигуры, лежащей между осью Ox и графиком синуса на отрезке $[0; \pi]$. В силу свойства $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ график синуса симметричен относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$ поэтому достаточно рассмотреть отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Грубые оценки можно получить, пользуясь методами дифференциального исчисления. Поскольку $f(x) = \sin x$ является выпуклой функцией на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$, ее график лежит ниже касательных, проведенных в концах отрезка — $y = x$ и $y = 1$, но выше хорды, соединяющей крайние точки графика, т.е.

$$\forall x \in \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Поэтому искомая площадь меньше площади трапеции, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 1$, $y = x$ и $x = \frac{\pi}{2}$, но больше площади треугольника, ограниченного линиями $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{2x}{\pi}$ (рис. 1). Вычисляя площади

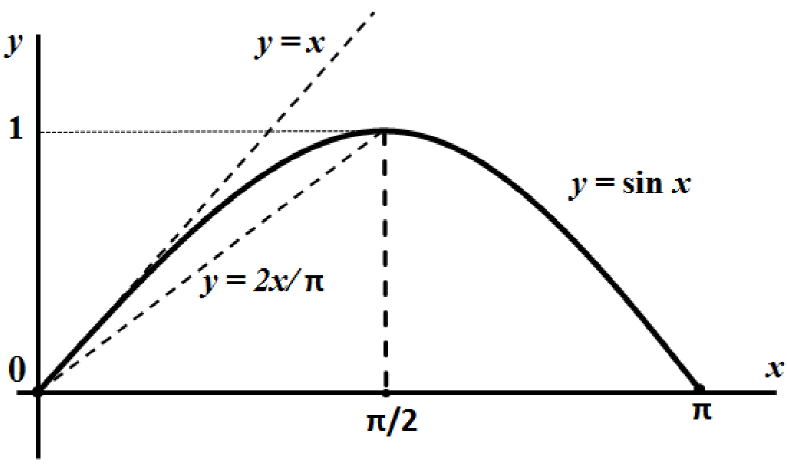

Рисунок 1: Грубая оценка площади под аркой синусоиды через площади элементарных фигур.

элементарных фигур, находим:

$$0.78 \approx \frac{\pi}{4} \leqslant S \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 1 = \frac{\pi - 1}{2} \approx 1.07.$$

Разобьём рассматриваемый отрезок на n равных частей точками $x_k = \dfrac{\pi k}{2n}$, $(k = 0, 1 \ldots n)$. Очевидно, что вертикальные линии $x = x_k$ разбивают фигуру на n (неравных) частей (рис. 2).

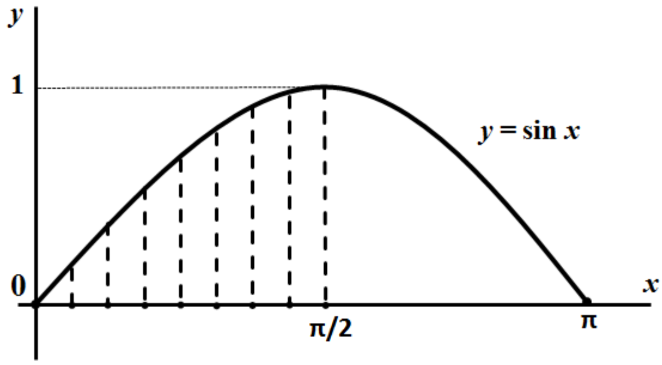

Рисунок 2: Разбиение фигуры на части

Пусть S_k — площадь k-ого кусочка. Учитывая монотонное возрастание синуса на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, имеем:

$$\forall x \in [x_{k-1}; x_k] \quad \sin x_{k-1} \leqslant \sin x \leqslant \sin x_k.$$

Таким образом площадь k-ого кусочка можно оценить сверху и снизу через площади прямоугольников (свойство монотонности):

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \sin x_{k-1} \leqslant S_k \leqslant \frac{\pi}{2n} \cdot \sin x_k. \qquad \text{(рис. 3)}$$

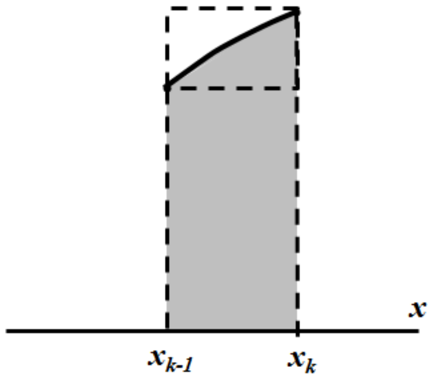

Рисунок 3: Оценка площади фигуры через площади прямоугольников

Поскольку неравенства справедливы для любого k, они будут справедливы для суммы:

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin x_{k-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2n} \sin x_k \Longrightarrow$$

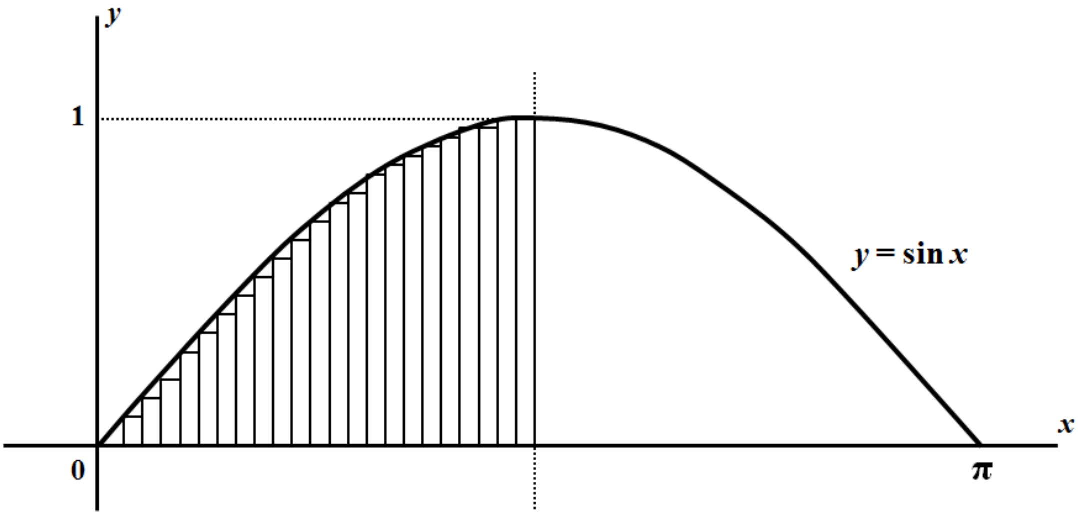

Рисунок 4: Оценка площади снизу

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi(k-1)}{2n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}S_k\leqslant\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2n}$$

Учитывая свойство аддитивности и заменяя в первой сумме индекс $m = k-1$, получаем (рис. 4)

$$\frac{\pi}{2n}\sum_{m=0}^{n-1}\sin\frac{\pi m}{2n}\leqslant S\leqslant\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2n}.$$

Заметим, что в левой сумме первое слагаемое нулевое. Таким образом, в правой сумме на одно (последнее) слагаемое больше:

$$\frac{\pi\sigma_{n-1}}{2n}\leqslant S\leqslant\frac{\pi\sigma_n}{2n}, \tag{1}$$

где σ_p обозначает сумму синусов:

$$\sigma_p=\sum_{k=1}^{p}\sin\frac{\pi k}{2n}. \tag{2}$$

Подсчитаем сумму синусов. Введем обозначение $\alpha=\dfrac{\pi}{2n}$. Тогда:

$$\sigma_p=\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin p\alpha.$$

Домножим и поделим на удвоенный синус половинного угла

$$\sigma_p=\frac{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 3\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots+2\sin p\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Разложим произведения в сумму, пользуясь известным тождеством

$$\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\right)$$

и упростим выражение:

$$\sigma_p = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)+\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\frac{5\alpha}{2}-\cos\frac{7\alpha}{2}\right)+\dots+\left(\cos\left(p-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2p+1)\pi}{4n}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}.$$

Подставляя вместо p числа n и $n-1$, получаем:

$$\sigma_n=\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{4n}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}},\quad \sigma_{n-1}=\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4n}}{2\sin\dfrac{\pi}{4n}}.$$

Будем неограниченно, увеличивать число n, что соответствует всё более мелкому разбиению области на части. Из интуитивных соображений ясно, что при этом прямоугольники будут всё точнее приближать интересующую нас область. Формально это выражается в том, что левая и правая часть неравенства (1) имеют одинаковый предел при $n\to\infty$ и, значит, при достаточно больших значениях n пренебрежимо мало отличаются друг от друга:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\sigma_n}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\dfrac{(2n+1)\pi}{4n}}{2n\sin\dfrac{\pi}{4n}}=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\dfrac{\pi}{4n}-\cos\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4n}\right)\pi}{2n\cdot\dfrac{\pi}{4n}}=$$

$$=\pi\cdot\frac{\cos 0-\cos\dfrac{\pi}{2}}{\pi}=1.$$

Очевидно, что предел левой части тоже равен 1. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах из (1) получаем

$$1\leqslant S\leqslant 1,$$

откуда с очевидностью заключаем, что $S=1$. Поскольку половина площади равна единице, площадь, лежащая под аркой синусоиды равна 2.

1.4 Площадь, лежащая под параболой

Рассмотрим параболу, задаваемую уравнением $y = x^2$ и поставим вопрос о нахождении площади, лежащей под этой параболой на отрезке $[0; 1]$ или, точнее, о площади плоской фигуры, ограниченной линиями

$$y = 0, \quad y = x^2, \quad x = 1.$$

Сделаем предварительно грубую оценку искомой площади. Парабола на отрезке $[0; 1]$ лежит ниже хорды $y = x$, но выше касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ — прямой $y = 2x - 1$. Вычисляя площади треугольников, ограниченных линиями $y = 0$, $y = x$, $x = 1$ и $y = 0$, $y = 2x - 1$, $x = 1$, получаем, что

$$\frac{1}{4} \leqslant S \leqslant \frac{1}{2}.$$

Разобьем отрезок $[0; 1]$ на n равных частей точками $x_k = \dfrac{k}{n}$, $k = 0, 1 \ldots n$. Очевидно, что вертикальные прямые с уравнениями $x = \dfrac{k}{n}$ разобьют рассматриваемую фигуру на n неравных частей (разрежут её на «ломтики»). Заметим, что площадь каждого «ломтика» легко оценивается сверху и снизу через площади прямоугольников:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \quad \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leqslant S_k \leqslant \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Суммирование площадей «ломтиков» дает, согласно свойству аддитивности, искомую площадь фигуры. Поскольку неравенства справедливы для каждого слагаемого, они сохранят силу и для всей суммы.

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \leqslant S \leqslant \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Заметим, что в левой сумме первое слагаемое является нулевым, преобразуем её сделав замену $m = k - 1$:

$$\frac{\sigma_{n-1}}{n^3} \leqslant S \leqslant \frac{\sigma_n}{n^3}, \quad \text{где} \quad \sigma_p = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2.$$

Для получения окончательного результата нужно вычислить сумму квадратов первых чисел натурального ряда. Докажем нужную формулу, не обсуждая вопроса о её выводе.

$$\sigma_p = \sum_{k=1}^{p} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}. \quad (3)$$

Формулу (3) легко доказать методом математической индукции. В качестве базы индукции достаточно проверить справедливость формулы при $p = 1$:

$$\sigma_1 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Предположим, что формула (3) верна для некоторого $n \in \mathbb{N}$ (индукционное предположение). Рассмотрим следующее за p натуральное число: $q = p+1$. Имеем:

$$\sigma_q = \sigma_{p+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + p^2 + (p+1)^2 = \sigma_p + (p+1)^2.$$

Применяя индукционное предположение (оно заключается в том, что для натуральных чисел, не превосходящих p, формула (3) считается установленной), получаем

$$\sigma_q = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{(p+1)}{6} \cdot (p(2p+1) + 6p) =$$

$$= \frac{(p+1)}{6} \cdot \big(2p^2 + p + 6p + 6\big) = \frac{(p+1)}{6} \cdot \big(2p^2 + 7p + 6\big) =$$

$$= \frac{(p+1)}{6} \cdot (2p+3)\,(p+2).$$

Подставляя $p = q - 1$, получаем

$$\sigma_q = \frac{q-1+1}{6} \cdot (2q - 2 + 3)(q - 1 + 2) = \frac{q(q+1)(2q+1)}{6},$$

что совпадает с (3). Таким образом, если формула (3) верна для некоторого натурального числа, то она верна и для следующего за ним натурального числа, что доказывает справедливость этой формулы для всех $n \in \mathbb{N}$.

Остаётся применить формулу (3). Очевидно, что

$$\sigma_{n-1} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

поэтому

$$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \leqslant S \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\leqslant S\leqslant\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\Longrightarrow$$
$$\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\leqslant S\leqslant\frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Неограниченно увеличивая мелкость разбиения, т.е. осуществляя в неравенствах предельный переход $n\to\infty$, получаем

$$\frac{1}{3}\leqslant S\leqslant\frac{1}{3}\Longrightarrow S=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, искомая площадь равна $\dfrac{1}{3}$. Парабола разбивает единичный квадрат в отношении 2:1 (площадь над параболой вдвое больше площади под параболой — рис. 5).

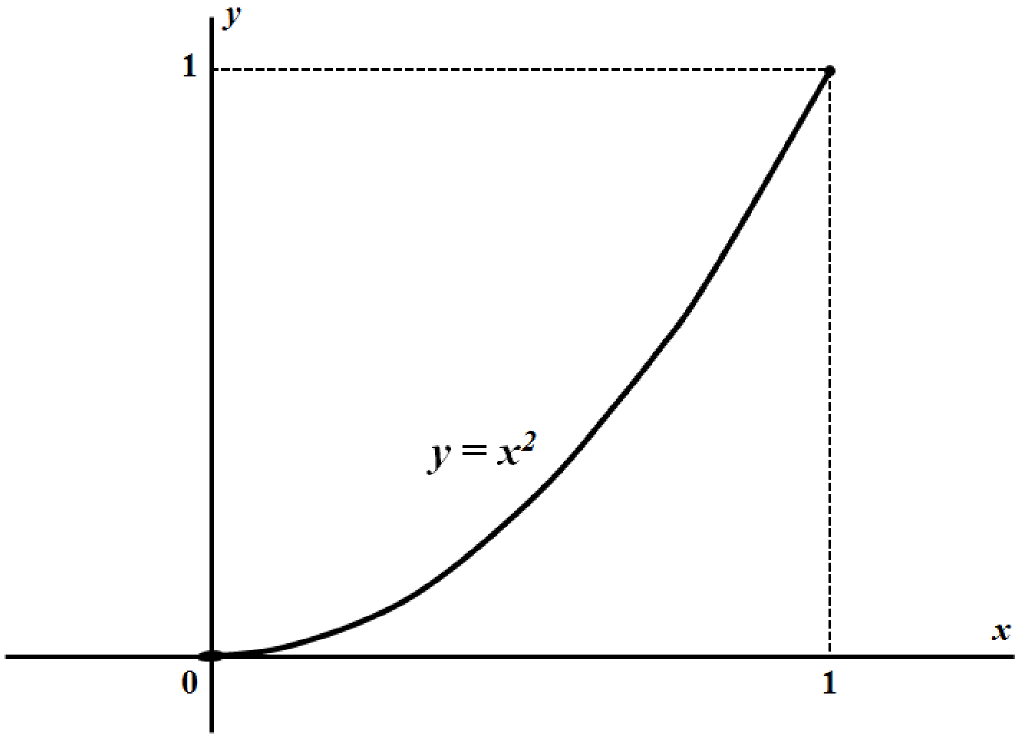

Рисунок 5: Парабола разбивает единичный квадрат в отношении 2:1

1.5 Площадь, лежащая под графиком показательной функции

Рассмотрим площадь фигуры, ограниченной линиями с уравнениями

$$y=2^x,\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1.$$

Разобьем отрезок $[0;1]$ на n равных частей точками $x_k=\frac{k}{n}$. Рассматриваемая фигура разобьётся вертикальными линиями $x=x_k$ на n неравных частей. Учитывая монотонность показательной функции нетрудно заметить, что площадь каждого кусочка (S_k) оценивается сверху и снизу площадями прямоугольников:

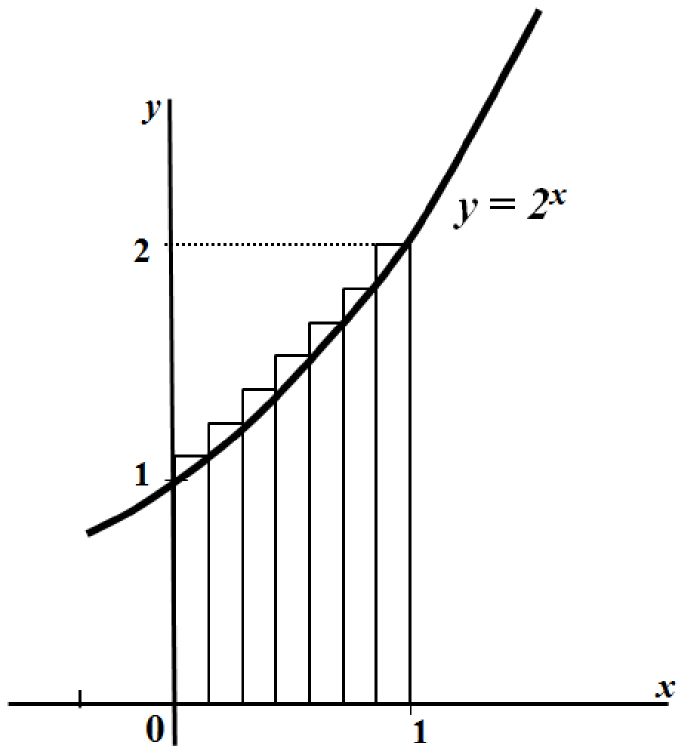

Рисунок 6: Оценка сверху для площади под графиком

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n \qquad \frac{1}{n} \cdot 2^{\frac{k-1}{n}} \leqslant S_k \leqslant \frac{1}{n} \cdot 2^{\frac{k}{n}}.$$

Суммируя эти неравенства по всем k, получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k-1}{n}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}} = \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k-1}{n}} \Longrightarrow \frac{\sigma_n}{n} \leqslant S \leqslant \frac{2^{\frac{1}{n}}\sigma_n}{n},$$

где

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k-1}{n}} = \sum_{m=0}^{n-1} 2^{\frac{m}{n}} = 1 + 2^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{2}{n}} + \cdots + 2^{\frac{n-1}{n}}.$$

Сумма σ_n может быть найдена по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{4}$$

достаточно подставить $q = 2^{\frac{1}{n}}$. Получаем

$$\sigma_n = \frac{2-1}{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Рассмотрим предельный переход $n \to \infty$. При вычислении предела воспользуемся заменой бесконечно малой на эквивалентную

$$\frac{1}{n} \to 0 \Longrightarrow 2^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{n}.$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \;.$$

Поскольку $2^{\frac{1}{n}} \to 2^0 = 1$, пределы правой части и левой части совпадают. Поэтому получаем, что искомая площадь фигуры равна $S = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Проверим, что полученный результат соответствует грубым оценкам. График показательной функции лежит ниже хорды $y = x + 1$, но выше касательной, проведенной в точке $x = 0$, т.е. прямой $y = 1 + x \ln 2$. Вычисляя площади соответствующих трапеций, получаем

$$1 + \frac{\ln 2}{2} \leqslant S \leqslant \frac{3}{2},$$

что не противоречит полученному выше результату, т.к. $1.347 < 1.443 < 1.5$.

1.6 «Квадратура гиперболы»

Вычислим площадь части фигуры, заключенной между гиперболой и её асимптотой — фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = b,$$

т.е., если говорить, используя старинную терминологию, найдём «квадратуру гиперболы». Разобьём отрезок $[1; b]$ на n частей. В разобранных выше примерах разность координат граничных точек, т.е. $x_k - x_{k-1}$, была постоянной, следовательно, точки x_k образовывали арифметическую прогрессию. На этот раз выберем точки x_k так, чтобы они образовывали геометрическую прогрессию:

$$\forall k \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \quad \frac{x_k}{x_{k-1}} = q = \sqrt[n]{b}.$$

Очевидно, $x_k = q^k = b^{\frac{k}{n}}$, причем $x_n = q^n = b$. Ясно, что

$$x_k - x_{k-1} = q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q-1).$$

Поскольку $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является убывающей функцией при $x > 0$, получаем

$$\forall x \in [x_{k-1}; x_k] \qquad \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x_{k-1}}$$

и, следовательно, для площадей кусочков получаются неравенства

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \leqslant S_k \leqslant \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} \Longrightarrow \frac{1-q}{q} \leqslant S_k \leqslant 1 - q.$$

Заметим, что оценки сверху и снизу не зависят от k, т.е. являются одинаковыми для каждой из частей. Складывая эти неравенства для всех значений k, получаем:

$$n(q-1) \cdot \frac{1}{q} \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k = S \leqslant n(q-1).$$

Будем увеличивать мелкость разбиения, неограниченно увеличивая число промежуточных точек ($n \to \infty$). Определим предельные значения правой и левой частей.

$$\lim_{n\to\infty} n(q-1) = \lim_{n\to\infty} n(b^{\frac{1}{n}} - 1)\,\{\infty \cdot 0\} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Сделаем замену переменной $t = \frac{1}{n} \to 0$ и воспользуемся замечательным пределом:

$$\lim_{t\to 0} \frac{b^t - 1}{t} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \ln b.$$

заметим, что $q = b^{\frac{1}{n}} \to b^0 = 1$, поэтому предельные значения левой и правой частей одинаковы:

$$\ln b \leqslant S \leqslant \ln b \Longrightarrow S = \ln b.$$

1.7 Общий случай нахождения площади фигуры, лежащей под графиком степенной функции

Площадь под параболой и гиперболой представляют собой частные случаи задачи о нахождении площади под графиком степенной функции. Рассмотрим фигуру, ограниченную линиями

$$y = x^m, \quad y = 0, \quad x = a, \quad x = b,$$

где $0 < a < b$, $m \neq -1$. Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками x_k, образующими геометрическую прогрессию:

$$\forall k \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \quad \frac{x_k}{x_{k-1}} = q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Тогда, очевидно,

$$x_0 = a,\ x_1 = aq = a^{1-\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}},\ \ldots,\ x_k = aq^k = a^{1-\frac{k}{n}} b^{\frac{k}{n}},\ \ldots,\ x_n = a \cdot \frac{b}{a} = b.$$

Заметим, что

$$x_k - x_{k-1} = aq^k - aq^{k-1} = aq^{k-1}(q-1).$$

Площадь кусочков, на которые разобьётся фигура, оценим сверху и снизу через площади прямоугольников. Будем для определенности считать, что $m > 0$ и, следовательно, показательная функция при положительных значениях x является возрастающей. Тогда

$$\begin{aligned}
&(x_{k-1})^m (x_k - x_{k-1}) \leqslant S_k \leqslant (x_k)^m (x_k - x_{k-1}) \\
&a^m q^{m(k-1)} a q^{k-1}(q-1) \leqslant S_k \leqslant a^m q^{mk} a q^{k-1}(q-1) \\
&a^{m+1} q^{(m+1)(k-1)}(q-1) \leqslant S_k \leqslant a^{m+1} q^{(m+1)k-1}(q-1).
\end{aligned}$$

Для случая $m < 0$ знаки неравенств окажутся противоположными, что, однако, не повлияет, как это будет видно из дальнейшего, на окончательный результат. Складывая неравенства для всех значений k, получаем

$$a^{m+1} \cdot \frac{q-1}{q^{m+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{(m+1)k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k \leqslant a^{m+1} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{(m+1)k}. \tag{5}$$

При $m \neq -1$ суммы легко подсчитываются по формуле для суммы членов геометрической прогрессии (4):

$$\sum_{k=1}^{n} q^{(m+1)k} = q^{m+1} + \left(q^{m+1}\right)^2 + \cdots + \left(q^{m+1}\right)^n = q^{m+1} \cdot \frac{q^{(m+1)n} - 1}{q^{m+1} - 1}.$$

Учитывая, что $aq^n = b$, получаем:

$$\frac{q-1}{q^{m+1}-1}\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right) \leqslant S \leqslant q^m \cdot \frac{q-1}{q^{m+1}-1}\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)$$

Осталось сделать разбиение достаточно мелким, т.е. перейти к пределу при $n \to \infty$. При этом, очевидно, $q \to 1$. Сделаем замену переменной и воспользуемся замечательным пределом:

$$\lim_{q \to 1} \frac{q-1}{q^{m+1}-1} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{(1+t)^{m+1}-1} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{1}{m+1}.$$

Поскольку $q^m \to 1$, предел левой и правой части совпадает, поэтому заключаем, что

$$S = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Хотя число a предполагалось строго положительным, его можно взять сколь угодно близким к 0, поэтому результат остается верен (по крайней мере для положительных m) при предельном переходе $a \to 0$. Подставляя $a = 0$, $b = 1$ и $m = 2$ получаем для квадратичной функции тот же результат, что и в пункте 1.4.

1.8 Заключительные замечания о вычислении площадей

Разбирая приведенные выше примеры, можно выделить следующие закономерности:

1. площадь фигуры складывается из большого числа малых частей;

2. площади частей приближенно равны площадям многоугольников (прямоугольников);

3. в результате предельного перехода приближенные равенства (оценки сверху и снизу) становятся точными;

4. для осуществления предельного перехода нужно знать явные формулы, по которым «приближенные» площади, т.е. суммы площадей прямоугольников выражаются через n.

5. круг задач, которые могут быть решены по этой схеме весьма ограничен, поскольку в каждом случае явные формулы для суммы находятся по разному, возникающие при этом трудности могут оказаться непреодолимыми.

Последнее замечание не исключает, однако, того, что данный подход может быть успешно применён для приближенного вычисления площадей. Подсчитывая суммы для конкретных значений n можно получать приближенные значения S. Поскольку приемлимая точность достигается при больших значения n, подсчёт должен осуществляться с помощью компьютера. В этом случае встает вопрос о доказательстве существования предела и об оценке погрешности.

1.9 Упражнения для самостоятельного разбора

1. Вычислите непосредственно площадь фигуры, лежащей под кубической параболой на отрезке $[0;1]$, т.е. фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3; \quad y = 0; \quad x = 1.$$

Указание. Задача может быть решена двумя способами.

Способ первый. Разбить отрезок на равные части и, оценивая площади частей через площади прямоугольников, составить суммы (см. параграф 1.4). Для вычисления сумм проверить и применить формулу:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Второй способ. Рассмотреть отрезок $[a;1]$ при $a > 0$. Разбить этот отрезок на части точками, образующими геометрическую прогрессию (см. параграфы 1.6,1.7). Для вычисления сумм воспользоваться формулой (4). Окончательный результат получается предельным переходом $a \to 0$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Указание. См. задачу, разобранную в параграфе 1.5.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Указание. Задача является частным случаем задачи, разобранной в параграфе 1.7.

4. Вычислите площадь фигуры, лежащей под графиком логарифма:

$$y = \ln x, \ y = 0 \ x = 2.$$

Указание. Разбить отрезок $[1;2]$ точками, образующими геометрическую прогрессию (см. 1.6). При вычислении сумм площадей прямоугольников применить формулу

$$\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1}{(q-1)^2}.$$

2 Определённый интеграл Римана

2.1 Определение интеграла по Риману

Пусть функция f определена в точках отрезка $[a;b]$. Выполним следующее построение.

1. Разбиение отрезка
   Разобьем отрезок $[a; b]$ на n, вообще говоря, неравных частей:
   $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

2. Выбор точек
   На каждой из частей отрезка выберем по некоторой точке. Ограничений на выбор не налагается, точка может быть как внутренней, так и граничной точкой отрезка.
   $$\forall k \in \mathbb{N} \quad 1 \leqslant k \leqslant n \qquad \xi_k \in [x_{k-1}\,; x_k]\,.$$

3. Интегральная сумма
   Назовём ***интегральной суммой*** сумму произведений значений функции в выбранных точках на длину соответствующей части отрезка:
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

4. Ранг разбиения
   Назовем ***рангом разбиения*** длину самой большой части рассматриваемого отрезка:
   $$\lambda = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (x_k - x_{k-1})\,.$$
   Эта величина, очевидно, характеризует мелкость разбиения отрезка.

5. Предельный переход
   Рассмотрим последовательность разбиений отрезка, причём предполагаем, что ранг разбиения неограниченно уменьшается, т.е. разбиение становится всё более мелким. Осуществим предельный переход $\lambda \to 0$:
   $$\lim_{\lambda \to 0} S_n.$$
   Если данный предел существует конечен и не зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек, то функция называется ***интегрируемой*** на отрезке $[a; b]$, а значение предела — ***определённым интегралом*** функции f на отрезке $[a; b]$, для которого будет использоваться следующее обозначение:
   $$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Важно заметить, что условие $\lambda \to 0$ влечет за собой $n \to \infty$, но обратное неверно! Если разбиение мелкое, то число частей должно быть большим. Однако, тот факт, что отрезок разбит на большое число частей, не означает, что разбиение мелкое. Вот простейший пример. Разобьем отрезок $[a; b]$ пополам, одну из половин ещё раз пополам, одну из получившихся четвертей ещё раз пополам и т. д. Эту процедуру можно продолжать, сколь угодно долго, но разбиение нельзя будет признать мелким, поскольку его ранг оказывается равным половине длине отрезка (длине самой большой части). Конечно при разбиении на равные части условия $\lambda \to 0$ и $n \to \infty$ оказываются равносильными, но надо иметь ввиду, что это лишь один из возможных способов разбиения отрезка.

2.2 Основные свойства интеграла

Пусть функции f и g интегрируемы, на отрезке $[a; b]$.

1. Интеграл от единицы равен длине отрезка интегрирования:

$$\int\limits_a^b dx = b - a.$$

2. Линейность:

$$\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx + \mu \int\limits_a^b g(x)dx,$$

в частности интеграл от суммы равен сумме интегралов (случай $\lambda = \mu = 1$), постоянный сомножитель можно выносить за знак интеграла (случай $\mu = 0$).

3. Аддитивность:

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \quad (a < c < b),$$

т. е. интеграл по целому отрезку равен сумме интегралов по его частям.

4. Монотонность:

$$\forall x \in [a; b] \quad f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)dx,$$

в частности неотрицательная функция имеет неотрицательный интеграл.

Заметим, что, если положить

$$\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx,$$

то свойство аддитивности можно применять при любом взаимном расположении точек a, b, c.

Условие интегрируемости, которое указано в определении интеграла, непосредственно проверить довольно трудно, поэтому важно иметь простые достаточные условия интегрируемости.

Теорема. (достаточное условие интегрируемости)

$$f \quad \text{непрерывна на} \quad [a;b] \Longrightarrow f \quad \text{интегририуема на} \quad [a;b].$$

Во многих практических задачах представляет интерес рассматривать интегралы от разрывных функций. С учётом свойства аддитивности теорема легко обобщается на гораздо более широкий класс функций — ***кусочно-непрерывные функции***.

Определение. Функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если отрезок можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых функция непрерывна, а в граничных точках имеет разрывы первого рода (т.е. скачок).

Кусочно-непрерывная функция является, очевидно, интегрируемой, поскольку она интегрируема на каждой части отрезка, на которой непрерывна, а интеграл по целому отрезку равен сумме интегралов по его частям.

Теорема. (геометрический смысл интеграла)

Пусть f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S,$$

где S — площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 0, \quad y = f(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

Фигуру, заключенную между графиком функции и осью абсцисс, иногда называют ***криволинейной трапецией***. Заметим, что, если f — линейная функция, т.е. функция вида $f(x) = kx+b$, то S представляет собой площадь обычной трапеции.

Нетрудно убедиться, что если функция не является знакопостоянной, то интеграл равен сумме площадей, причем площади участков, лежащих выше оси абсцисс входят в сумму со знаком «+», а площади участков, лежащих ниже оси абсцисс входят в сумму со знаком «—».

Разберём также механический смысл интеграла. Пусть материальная точка движется вдоль прямой. Предположим, что нам известен закон изменения скорости во времени, т.е. задана функция $v(t)$. Тогда интеграл

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

равен перемещению, которое совершает точка за промежуток времени $[t_1; t_2]$.

2.3 Теорема о среднем

Теорема о среднем.

Пусть f — непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\exists c \in (a; b): \quad \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

т.е. интеграл по отрезку равен значению функции в некоторой точке отрезка, умноженной на длину отрезка. Значение функции в этой точке называется средним значением функции на отрезке [a;b]. Геометрический смысл теоремы заключается в том, что площадь, лежащая под графиком функции равна площади прямоугольника, одной стороной (длиной) которого является отрезок интегрирования, а шириной — значение функции в некоторой промежуточной точке (рис. 7). Механический смысл теоремы заключается в том, что, если скорость материальной точки на некотором интервале времени меняется непрерывным образом (скачок скорости соответствует удару), то в некоторый момент времени мгновенная скорость равна средней скорости.

Очень важно понимать, что условие непрерывности функции является существенным. В противном случае величина

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

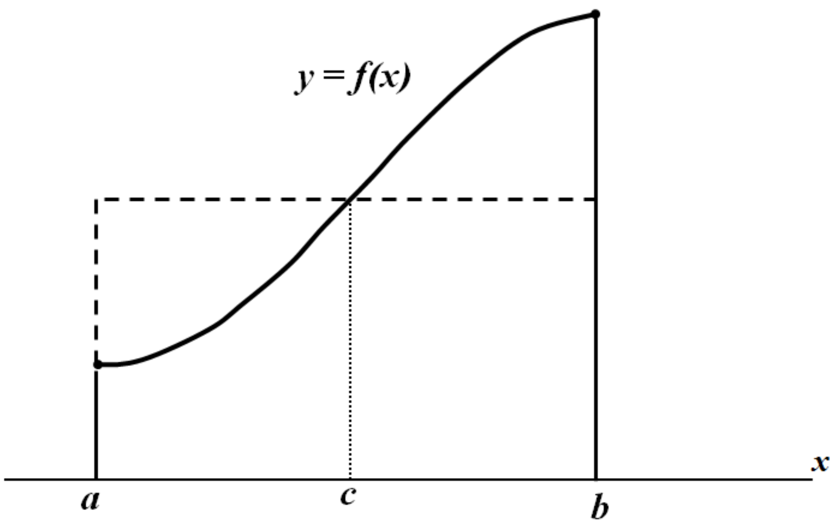

Рисунок 7: Геометрическая интерпретация теоремы о среднем

может не быть значением функции. Рассмотрим простейший пример. Пусть функция f является кусочно-постоянной и принимает только два значения — 0 и 1:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{1-0} \cdot \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

В то же время, число $\dfrac{1}{2}$ не является значением функции ни в одной точке.

Можно показать, что понятие «среднего значения функции на отрезке» является естественным обобщением понятия среднего арифметического. Рассмотрим интегральную сумму Римана для некоторой функции при делении отрезка интегрирования на равные части:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \frac{b-a}{n} = (b-a) \cdot \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n},$$

где $\dfrac{k-1}{n} < \xi_k < \dfrac{k}{n}$. Тогда среднее значение функции на отрезке равно

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\cdots+f(\xi_n)}{n}\ .$$

Таким образом, «среднее значение» функции равно предельному значению средних арифметических значений функции в точках равномерно распределенных по длине отрезка.

Вычисленные в разделе 1 интегралы, позволяют найти средние значения некоторых функций. Так из параграфа 1.3 вытекает, что среднее значение синуса на полупериоде $[0;\pi]$ равно (рис. 8)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}.$$

Это значение достигается в точках $x_1 = \arcsin\frac{2}{\pi}$ и $x_2 = \pi - \arcsin\frac{2}{\pi}$ ($x_1 \approx 0.690$). Среднее значение квадратичной функции (параграф 1.4) на отрезке $[0;1]$ равно $\dfrac{1}{3}$, оно достигается в точке $x_* = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$, среднее значение функции $y = 2^x$ на том же отрезке равно $\dfrac{1}{\ln 2}$ (см. параграф 1.5), оно достигается в точке $x_* = -\ln\ln 2 \approx 0.521$. Для линейной функции, как это легко понять, среднее значение равно среднему арифметическому значений на концах отрезка интегрирования и достигается в его середине.

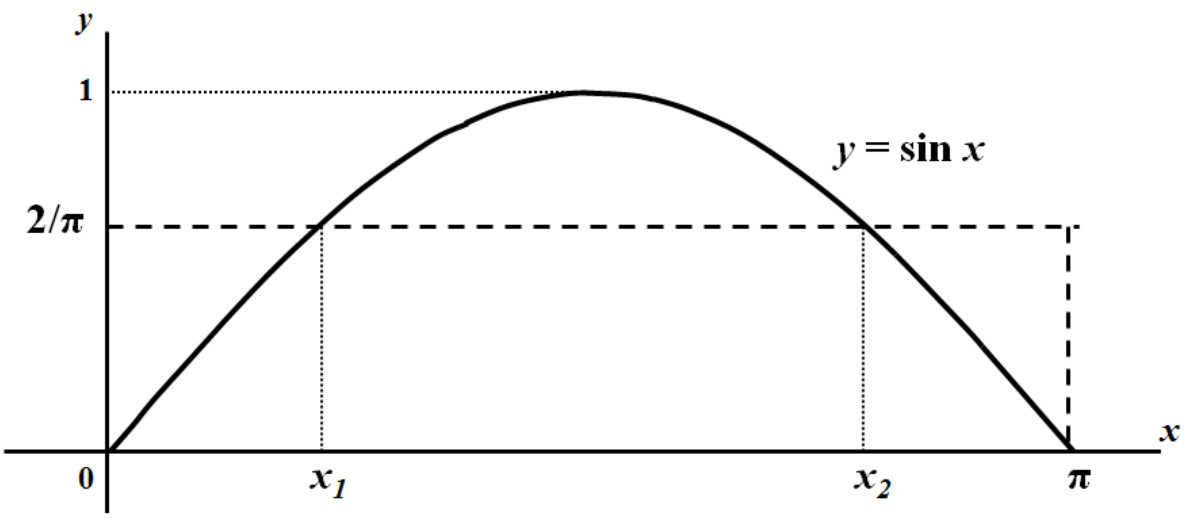

Рисунок 8: Теорема о среднем для синуса

2.4 Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на любой его части, следовательно корректно рассматривать интеграл по отрезкам вида $[a;x]$, где $x \in [a;b]$. Таким образом мы получаем функцию, которая числу x из отрезка [a;b] сопоставляет значение интеграла по отрезку $[a;b]$. Такая функция называется ***интегралом с переменным верхним пределом:***

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{6}$$

Приведем формулировки важнейших теорем о функции Φ, задаваемой равенством (6).

Теорема (о непрерывности интеграла с переменным верхним пределом)

Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда функция Φ, задаваемая равенством (6) (т.е. интеграл с переменным верхним пределом), непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Теорема Барроу

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда функция Φ, задаваемая равенством (6), дифференцируема на интервале $(a;b)$, а её производная совпадает со значением функции f в соответствующей точке, т.е.

$$\forall x \in (a;b) \qquad \Phi'(x) = f(x).$$

Следствие. Любая непрерывная функция имеет первообразную. Действительно, как следует из теоремы и определения первообразной, одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом.

Как известно из темы «Неопределённый интеграл», если известна одна из первообразных функции, то любая другая первообразная получается из неё прибавлением некоторой постоянной. Пусть F — одна из первообразных f. Тогда найдется некоторое число C такое, что $\Phi(x) = F(x)+C$. Заметим, что из (6) следуют равенства

$$\Phi(a) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Поэтому имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a),$$

справедливость которого не зависит от выбора конкретной первообразной. Введем специальное обозначение для разности значений функции на концах отрезка:

$$h(b) - h(a) = h(x) \Big|_a^b .$$

Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b} \qquad (7)$$

Формула (7) называется ***формулой Ньютона-Лейбница***. Она означает, что интеграл от функции по отрезку равен разности значений одной из её первообразных на концах этого отрезка. Формула легко обобщается на случай кусочно-непрерывной подынтегральной функции.

Среди студентов широко распространены глубоко ошибочные суждения о тривиальности формулы Ньютона-Лейбница или о том, что формула (7) является определением для определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница является следствием теоремы Барроу, при доказательстве которой существенно используется теорема о среднем, доказательство которой требует теоремы Вейерштрасса и теоремы Коши о непрерывных функциях, для доказательства которых, в свою очередь, требуется теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности и другие теоремы о пределах и т.д. С другой стороны, опираясь только на понятие первообразной и формулу (7), довольно трудно показать, что определённый интеграл равен площади под графиком функции и т.д.

В действительности, формула Ньютона-Лейбница связывает понятия, относящиеся к разным классам задач. Задача о нахождении первообразной является обратной к задаче нахождения производной, решение которой важно для построения касательных, определения точек экстремума и перегиба, вычисления скорости и т.д. Понятие интеграла естественным образом вырастает из задач нахождения площадей, объемов, массы и т.д. Дифференцирование заключается в нахождении главной части приращения функции, а интегрирование связано с нахождением предельных значений некоторых сумм. В связи с этим формула Ньютона-Лейбница является скорее неожиданной, чем очевидной. Как формула, связывающая между собой явления и понятия различной природы, формула Ньютона-Лейбница является одним из наиболее глубоких результатов математического анализа, а возможно даже, что и одной из наиболее важных формул известных человечеству.

В качестве примеров применения имеет смысл рассмотреть задачи, разобранные в первом разделе. Опираясь, на таблицу первообразных, получаем, что:

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2;$$

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\ ;$$

$$\int_0^1 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{2^1 - 2^0}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\ ;$$

$$\int_a^b x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \qquad (m \neq -1);$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}\ .$$

Полученные результаты полностью совпадают с теми, которые были получены в первом разделе. Сравнение трудоемкости методов получения этих результатов иллюстрирует истинную роль формулы Ньютона-Лейбница, особенно если учесть, что в большинстве подобных задач прямой подсчёт интегральных сумм оказывается вообще невозможным. Следует, правда, заметить, что простота второго способа является обманчивой, поскольку здесь в неявном виде используются многие полученные ранее результаты — в частности, составлению таблицы первообразных предшествует доказательство многих теорем дифференциального исчисления.

3 Методы вычисления определённого интеграла

3.1 Общие замечания

Широко распространено мнение, что вычисление определённого интеграла представляет собой более сложную задачу, чем отыскание неопределённого интеграла. Эта точка зрения происходит из того, что при вычислении определённого интеграла нужно не только найти первообразную, но и вычислить её значения на концах отрезка интегрирования. В действительности всё обстоит ровно наоборот. Знание определённого интеграла содержит существенно меньше информации, чем знание первообразной. Зная определённый интеграл по отрезку, мы знаем площадь фигуры, лежащей под графиком функции. Знание первообразной подразумевает знание не только площади фигуры в целом, но и возможность определить площадь любой части этой фигуры. Отыскивая определённый интеграл, мы пытаемся найти конкретное число, а находя неопределённый интеграл — бесконечное семейство функций. Простая логика подсказывает, что задача, связанная с получением большего объема информации является более трудной. Это проявляется в том, что при вычислении определённого интеграла круг возможных преобразований значительно шире, можно использовать гораздо больше дополнительных соображений. Поэтому для многих «неберущихся» интегралов удаётся вычислить значения для конкретных отрезков интегрирования.

Представляется важным, поэтому, не ограничиваться изучением техники нахождения первообразной (тема «Неопределённый интеграл»), а обратить пристальное внимание на особенности вычисления определённого интеграла и те дополнительные возможности, которые при этом открываются.

3.2 Непосредственное интегрирование

Для вычисления определённого интеграла достаточно знать неопределённый интеграл, поскольку для получения результата в этом случае достаточно будет применить формулу Ньютона-Лейбница. Применяя тождественные преобразования или подведение под знак дифференциала, неопределённый интеграл часто удается свести к табличным.

Пример 1.

$$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)}\,dx = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)}\,dx = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{x^2\left(x^2+1\right)} + \frac{x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)}\right) dx =$$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4} + 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}\,.$$

Пример 2.

$$\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}+\ln(2x+1)}{2x+1}\,dx = \int\limits_0^4 \left(\frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1}+\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\right)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} + \int\limits_0^4 \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^4 \ln(2x+1)d\left(\ln(2x+1)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2x+1}\,\Bigg|_0^4 + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(2x+1)}{2}\,\Bigg|_0^4 =$$

$$= \sqrt{9}-\sqrt{1}+\frac{\ln^2 9-\ln^2 1}{4} = 3-1+\frac{(2\ln 3)^2-0}{4} = 2+\ln^2 3.$$

3.3 Интегрирование по частям

Опираясь на формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле и формулу Ньютона-Лейбница, нетрудно получить формулу интегрирования по частям в определённом интеграле:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\,\Bigg|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \qquad (8)$$

Выполнение подстановки во внеинтегральном члене превращает его в число, что упрощает дальнейшие вычисления, особенно при многократном интегрировании по частям.

Пример 3.

$$\int\limits_0^\pi x^3\cos x dx = \left\| \begin{array}{l|l} u = x^3 & du = 3x^2 dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right\| = x^3\sin x\,\Bigg|_0^\pi - 3\int\limits_0^\pi x^2 \sin x\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right\| = 0-3\left(-x^2\cos x\,\Bigg|_0^\pi + 2\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx\right) =$$

$$= \left\| \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right\| = -3\pi - 6\left(x\sin x\,\Bigg|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin x\right) =$$

$$= -3\pi^2 + 0 + 6\left(-\cos x \,\Bigg|_0^\pi\right) = -3\pi^2 + 12 \approx -17.609.$$

При вычислении аналогичного неопределённого интеграла приходится удерживать вплоть до окончательного ответа внеинтегральные члены, возникающие при каждом интегрировании по частям. В определённом интеграле, как показывает разобранный пример, такой необходимости нет. Поэтому главная рекомендация, которую можно дать в этом пункте, заключается в том, чтобы ***подстановку во внеинтегральном члене выполнять немедленно***, а не сводить задачу к нахождению неопределённого интеграла.

Отрицательное значение вычисленного интеграла было нетрудно предвидеть. Действительно, подынтегральная функция положительна на первой половине отрезка интегрирования и отрицательна на второй. Но, как легко заметить, отрицательные значения по модулю существенно превосходят положительные. Поэтому, отрицательный интеграл по второй части отрезка по модулю существенного больше, чем положительный интеграл по первой половине отрезка (рис. 9). В то же время интеграл по второй части отрезка по модулю меньше площади изображённого на рис. 9 прямоугольного треугольника с катетами $\frac{\pi}{2}$ и π^3. Интеграл, поэтому, должен

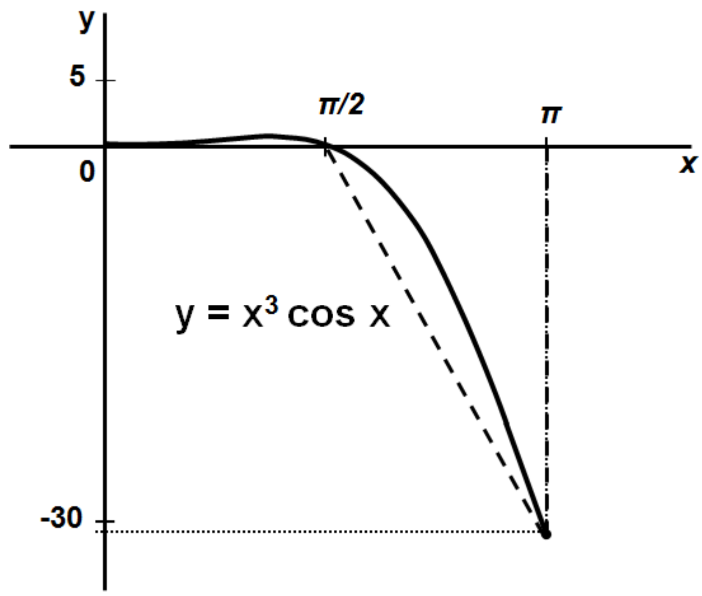

Рисунок 9: График подынтегральной функции: $y = x^3 \cos x$

удовлетворять неравенствам

$$0 \geqslant \int\limits_0^\pi x^3 \cos x \, dx \geqslant -\frac{1}{2} \cdot \pi^3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^4}{4} \approx -24.352,$$

что указывает на правдоподобность полученного ответа. Подобный анализ позволяет быстро находить случайные ошибки в вычислениях. Например, если из-за невнимательности пропущен некоторый коэффициент, значение интеграла может измениться в несколько раз. Абсурдность ответа в таких случаях часто можно установить, оценив диапазон возможных значений, как это было сделано для разобранного примера. В неопределённых интегралах такие соображения применить невозможно.

3.4 Геометрический смысл формулы интегрирования по частям в определённом интеграле

Формула интегрирования по частям в определённом интеграле имеет наглядный смысл — сведение задачи о вычислении площади к нахождению площади дополнительной фигуры (рис. 10). Внеинтегральный член

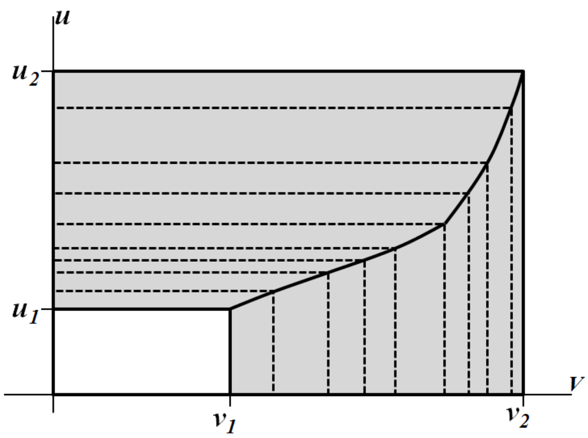

Рисунок 10: Геометрический смысл интегрирования по частям

$u_2v_2 - u_1v_1$ соответствует на рис. 10 разности площадей прямоугольников. Интегралы

$$\int\limits_{v_1}^{v_2} udv \quad \text{и} \quad \int\limits_{u_1}^{u_2} vdu$$

соответствуют площадям под и над кривой.

Геометрический смысл формулы (8) можно проиллюстрировать на простых примерах.

Пример 4.

$$I = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x \, \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x \, d\left(\operatorname{arctg} x\right).$$

Рассмотрим смысл каждого слагаемого. График арктангенса разбивает прямоугольник, сторонами которого являются координатные оси, а также прямые $x = 1$ и $y = \frac{\pi}{4}$, на две части (рис. 11). Смысл формулы в том, что для нахождения площади под графиком арктангенса достаточно из площади прямоугольника вычесть площадь фигуры, лежащей над графиком арктангенса (т.е. под графиком тангенса!). Вычислим оба слагаемых.

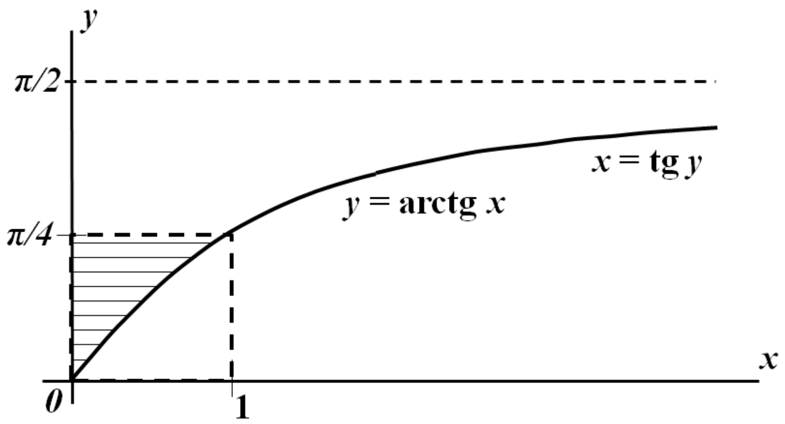

Рисунок 11: Интегрирование по частям арктангенса

$$x \cdot \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^1 = 1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 \cdot 0 = S_{\square}$$

Заметив, что $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y$, получим (см. рис. 11)

$$\int\limits_0^1 x \, d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} y \, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y} \, dy = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\cos y\right)}{\cos y} =$$

$$= -\ln\left|\cos x\right| \,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \ln 1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Разумеется, дополнительную площадь можно вычислить и непосредственно:

$$\int\limits_0^1 x \, d\left(\operatorname{arctg} x\right) = \int\limits_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^1 \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) \,\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\ln 2}{2}.$$

Таким образом, $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2} \approx 0.439$. Оценим диапазон возможных значений для I. Поскольку арктангенс является выпуклой функцией при $x > 0$, на интервале $(0; 1)$ график лежит выше хорды $y = \frac{\pi x}{4}$, но ниже касательной, проведённой в точке $x = 0$, т.е. прямой $y = x$ (см. рис. 12). Значение

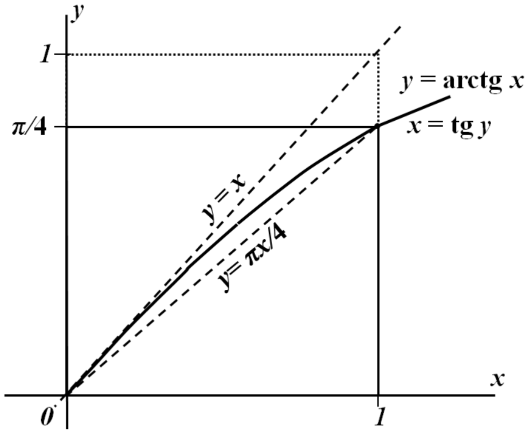

Рисунок 12: Оценка площади фигуры под графиком арктангенса

интеграла, следовательно, легко оценить через площади треугольников:

$$\frac{\pi}{8} \leqslant I \leqslant \frac{1}{2}.$$

Нетрудно заметить, что найденное значение не выпадает из этого диапазона: $0.393 < 0.439 < 0.5$. Более точную верхнюю оценку можно получить, рассмотрев площадь трапеции, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ и $y = \frac{\pi}{4}$. Получим, что

$$I \leqslant \frac{1 + 1 - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{(8 - \pi)\pi}{32} \approx 0.477,$$

что, опять же, выполнено.

3.5 Замена переменной в определённом интеграле

Пусть функция φ непрерывна на отрезке $[c; d]$ и непрерывно дифференцируема на интервале $(c; d)$ и $\forall x \in (c; d)$ $\varphi'(x) \neq 0$. Из этих условий вытекает, что производная функции φ сохраняет знак на интервале $(c; d)$ и, следовательно, функция φ является монотонной на $(c; d)$ (строго возрастающей или убывающей в зависимости от знака φ'). Тогда существует обратная функция, т.е. функция φ^{-1}, такая что

$$\forall t \in [c; d] \quad \varphi^{-1}\left(\varphi(t)\right) = t.$$

В этом случае справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_c^d f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt,$$

где $c = \varphi^{-1}(a)$, $d = \varphi^{-1}(b)$.

Практическое выполнение замены переменной в определённом интеграле по сравнению с неопределённым интегралом содержит одну дополнительную операцию — определение новых пределов интегрирования. Однако, именно умение выполнять эту операцию определяет усвоение темы «Определённый интеграл» и открывает совершенно новые возможности вычисления интегралов.

Главное, на что следует обратить внимание, заключается в том, что интеграл, полученный в результате замены переменной, содержит всю информацию, необходимую для его вычисления. В этом смысле он ничем не хуже, чем исходный интеграл, а, значит, возврата к прежней переменной не требуется. Особенно существенным это обстоятельство является тогда, когда выполняется цепочка замен переменных. Интеграл равен площади под графиком функции на заданном отрезке, но эта площадь оказывается численно равной площади под графиком другой функции на другом отрезке. Один способ представления интеграла ничем не хуже другого, и всё зависит от удобства вычислений или личных предпочтений того, кто рассматривает интеграл.

Пример 5.

$$I = \int\limits_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}.$$

Главный шаг в упрощении подынтегрального выражения заключается в избавлении от иррациональности, что может быть достигнуто заменой переменной:

$$\sqrt{2x-1} = t \Longrightarrow 2x - 1 = t^2 \Longrightarrow x = \frac{t^2+1}{2}.$$

Дифференцированием обеих частей последнего равенства находим

$$dx = d\left(\frac{t^2+1}{2}\right) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)' dt = tdt.$$

Определяем границы изменения новой переменной:

$$x = 1 \leftrightarrow t = \sqrt{2\cdot 1 - 1} = 1; \quad x = 5 \leftrightarrow t = \sqrt{2\cdot 5 - 1} = 3.$$

Переходя к новой переменной, получаем:

$$I = \int\limits_1^3 \frac{tdt}{\dfrac{t^2+1}{2}+t} = \int\limits_1^3 \frac{2tdt}{t^2+1+2t} = 2\int\limits_1^3 \frac{tdt}{(t+1)^2}.$$

В результате замены переменной получился интеграл от рациональной функции. Стандартным методом нахождения таких интегралов является разложение дроби в сумму простейших, однако, в данном случае имеет смысл сделать ещё одну замену переменной:

$$z = t+1 \iff t = z-1 \implies dt = dz.$$

Новые пределы интегрирования:

$$t = 1 \leftrightarrow z = 1+1 = 2; \quad t = 3 \leftrightarrow z = 3+1 = 4.$$

$$I = 2\int\limits_2^4 \frac{z-1}{z^2}dz = 2\int\limits_2^4 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) dz = 2\left(\ln|z| + \frac{1}{z}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= 2\left(\ln 4 + \frac{1}{4} - \ln 2 - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

3.6 Типичные ошибки при выполнении замены переменной

При определении новых пределов интегрирования необходимо определить, какие значения новой переменной соответствуют старым пределам интегрирования. Типичные ошибки (речь, разумеется, не идёт о случайных ошибках вычислительного характера) могут возникать, если при этом не проверяются условия корректности замены — непрерывность, монотонность, дифференцируемость функции φ на всём отрезке интегрирования.

Пример 6.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Рассмотрим замену переменной:

$$x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Ясно, что концы отрезка интегрирования при этом преобразовании переходят сами в себя:

$$x = 1 \longrightarrow t = \frac{1}{1} = 1, \quad x = -1 \longrightarrow t = \frac{1}{-1} = -1.$$

Выполнение замены приводит к равенству

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} = -I.$$

Поскольку интеграл заведомо существует и конечен, из условия $I = -I$ следует $I = 0$, что заведомо абсурдно, т.к.

$$\forall x \in [-1;1] \quad \frac{1}{x^2+1} \geqslant \frac{1}{2}$$

и, согласно свойству монотонности, $I \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Вычисляемый интеграл, являясь табличным, легко находится по формуле Ньютона-Лейбница:

$$I = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Ошибка возникает из-за того, что функция $x = \dfrac{1}{t}$ имеет разрыв в точке $t = 0$.

Пример 7.

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

Применим универсальную подстановку (стандартный метод интегрирования тригонометрических выражений):

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{t^2+1}.$$

Однако, оба предела интегрирования переходят в точку $t = 0$:

$$x = 0 \longrightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0, \quad x = 2\pi \longrightarrow t = \operatorname{tg}\pi = 0.$$

Длина нового отрезка интегрирования оказывается нулевой, однако вывод, что $I = 0$, разумеется неверен. Учитывая, что $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, получаем:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 + \cos x} \leqslant 1 \Longrightarrow \frac{2\pi}{3} \leqslant I \leqslant 2\pi.$$

Функция $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arctg} t$ является непрерывной и дифференцируемой на всей числовой прямой, однако её областью значений является интервал $(-\pi; \pi)$, в который не попадает часть отрезка интегрирования. Функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ является обратной к φ только на интервале $(-\pi; \pi)$.

3.7 Специфические методы вычисления определённого интеграла

3.7.1 Использование различных представлений интеграла

Определённый интеграл представляет собой число, которое определяется исключительно отрезком интегрирования и подынтегральной функцией. Переменная интегрирования (в отличие от неопределенного интеграла!) является фиктивной и может обозначаться любой буквой. Это обстоятельство может иногда быть использовано при решении задач.

Пример 8.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1}.$$

Во втором слагаемом сделаем замену переменной:

$$t = \frac{\pi}{2} - x, \quad x = \frac{\pi}{2} - t, \quad dt = -dx, \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}.$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1} - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{dt}{\operatorname{ctg}^{\sqrt{2}} t + 1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} t dt}{1 + \operatorname{tg}^{\sqrt{2}} t} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x + 1} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x dx}{1 + \operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x dx}{1 + \operatorname{tg}^{\sqrt{2}} x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 9.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Сделаем замену переменной

$$t = -x, \quad dt = -dx, \quad x = 1 \mapsto t = -1, \quad x = -1 \mapsto t = 1.$$

$$I=-\int\limits_{1}^{-1}\frac{dt}{\left(e^{-t}+1\right)\left((-t)^2+1\right)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^t dt}{\left(1+e^t\right)\left(t^2+1\right)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{\left(1+e^x\right)\left(x^2+1\right)}.$$

Сложим между собой два представления для вычисляемого интеграла:

$$2I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(1+e^x\right)\left(x^2+1\right)}+\int\limits_{-1}^{1}\frac{e^x dx}{\left(1+e^x\right)\left(x^2+1\right)}=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left(1+e^x\right)dx}{\left(1+e^x\right)\left(x^2+1\right)}=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x\,\Bigg|_{-1}^{1}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2},$$

откуда $I=\dfrac{\pi}{4}$.

3.7.2 Интегралы от чётных и нечётных функций

Интегралы от чётных или нечётных функций по отрезку симметричному относительно нуля, могут быть существенно упрощены.

Случай чётной функции. Функция, как известно, называется чётной, если для всех допустимых значений аргумента выполнено равенство

$$f(-x)=f(x),$$

т.е. изменение знака аргумента не меняет значения функции. Для интеграла от чётной функции по симметричному промежутку имеем

$$I=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx.$$

В первом слагаемом сделаем замену $x=-t$, $dx=-dt$:

$$I=-\int\limits_{a}^{0}f(-t)dt+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=\int\limits_{0}^{a}f(t)dt+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx,$$

поскольку интегралы отличаются лишь буквой, которой обозначена переменная интегрирования, что не является существенным.

Случай нечётной функции. Функция называется нечётной, если для всех допустимых значений аргумента выполнено равенство

$$f(-x)=-f(x),$$

т.е. изменение знака аргумента влечёт изменение знака её значения. Для интеграла от нечётной функции по симметричному промежутку имеем

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

В первом слагаемом сделаем замену $x = -t$, $dx = -dt$:

$$I = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Таким образом, у чётной функции интеграл по положительной и отрицательной части отрезка совпадают и складываются, а у нечётной функции интегралы по положительной и отрицательной частям отрезка сокращаются. Полезно также знать, что любая функция определенная как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента, раскладывается в сумму чётной и нечетной части:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где чётная и нечётная составляющая задаются формулами:

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{9}$$

Так, например, экспонента является суммой гиперболического косинуса (чётная часть) и гиперболического синуса (нечётная часть):

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

3.7.3 Использование чётности и нечётности при вычислении интегралов

Пример 10.

$$I = \int_{-2}^{2} \left(x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x - 5\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(x^5 - x^3 + 4x\right) dx +$$

$$+ \int_{-2}^{2} \left(2x^4 - 5\right) dx = 0 + 2\int_{0}^{2} \left(2x^4 - 5\right) dx = \left(\frac{2x^5}{5} - 5x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{64}{5} - 10 = \frac{14}{5}.$$

Использование соображений чётности-нечётности позволило существенно сократить объём вычислений.

Пример 11.

$$I = \int\limits_0^\pi \frac{x \sin x \, dx}{\cos^2 x + 1}.$$

Сделаем замену переменной, чтобы перейти к отрезку симметричному относительно нуля:

$$t = x - \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2} + t; \quad dx = dt; \quad x = 0 \mapsto t = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \pi \mapsto t = \frac{\pi}{2}.$$

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \, dt}{\cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 1} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \cos t \, dt}{\sin^2 t + 1} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \cos t \, dt}{\sin^2 t + 1} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t + 1} = 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t + 1} = \pi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,(\sin t)}{\sin^2 t + 1} =$$

$$= \pi \cdot \operatorname{arctg}(\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) = \pi \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Разложение функции в сумму чётной и нечетной позволило вычислить неберущийся интеграл. Прямое применение формулы Ньютона-Лейбница к исходному интегралу было невозможно. Рассмотрим также другой метод вычисления разобранного выше интеграла.

Пример 12.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Интеграл является неберущимся, непосредственное применение формулы Ньютона-Лейбница оказывается невозможным. Поскольку отрезок интегрирования является симметричным относительно нуля, можно ограничиться вычислением интеграла от чётной части подынтегральной функции. Для её нахождения воспользуемся формулой (9):

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{1}{e^{-x} + 1} \right) = \frac{e^{-x} + 1 + e^x + 1}{2\,(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x} + e^{x} + 2}{e^{x} + e^{-x} + 2} = \frac{1}{2}.$$

Подынтегральная функция разбивается на чётную и нечетную часть:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2+1}.$$

Интеграл от второго слагаемого равен нулю (нечётная функция), поэтому

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

3.7.4 Интеграл, как площадь

В ряде случаев вычисление интегралов можно упростить использованием геометрических соображений.

Пример 13.

$$I = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx.$$

График подынтегральной функции является, очевидно, дугой окружности:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ y^2 = 4 - x^2. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

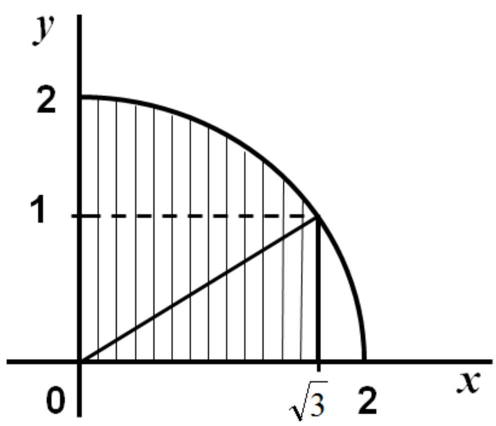

Рисунок 13: Непосредственное вычисление площади фигуры

Интеграл равен площади фигуры, которая состоит из сектора круга и прямоугольного треугольника (рис. 13). Дуга окружности соответствует углу $\frac{\pi}{3}$, поэтому сектор занимает одну шестую часть круга. Получаем:

$$I = S = \frac{4\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6}.$$

4 Несобственные интегралы

4.1 Основные определения

Геометрический смысл интеграла, как указывалось выше, заключается в том, что он равен площади фигуры, лежащей под графиком функции. Несобственный интеграл соответствует площади неограниченной фигуры. На первый взгляд, площадь неограниченной фигуры должна быть бесконечной, однако, это далеко не всегда так, в случаях, когда рассматривается область между графиком и его асимптотой.

Несобственными интегралами первого рода называются интегралы по неограниченному промежутку, т.е. интегралы вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{10}$$

Крайне важно отметить, что сама по себе подобная запись лишена смысла, т.к. в определении интеграла по Риману существенным моментом является конечность отрезка интегрирования. В противном случае интегральную сумму просто невозможно построить. Встаёт вопрос, в каком смысле следует понимать записи вида (10). Ответ на вопрос, что считать значением несобственного интеграла первого рода, дают следующие определения.

Определение.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^{R} f(x)\,dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то говорят, что интеграл ***сходится***, в противном случае интеграл ***расходится***.

Таким образом предлагается рассматривать интегралы по конечному отрезку, отодвигая верхнюю границу всё дальше вправо. Предельное значение этих величин (если существует) называется значением несобственного интеграла первого рода (рис. 14).

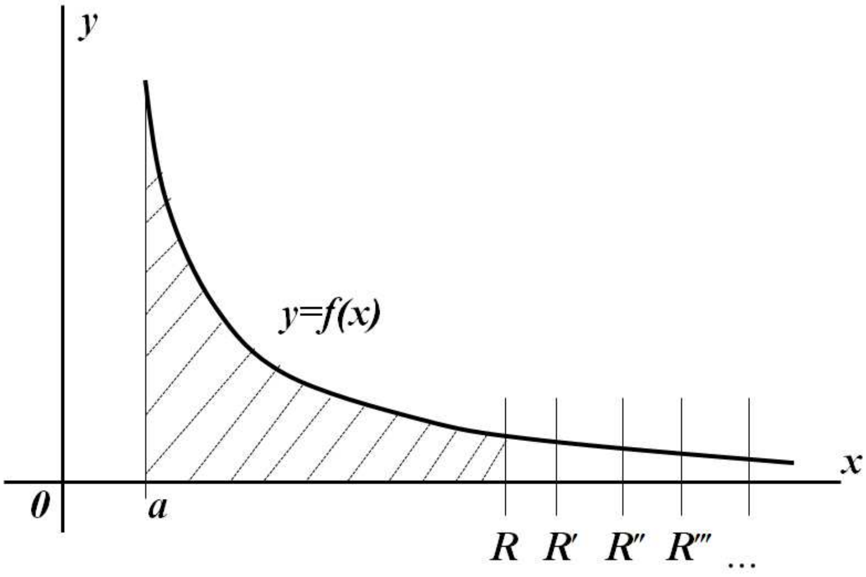

Рисунок 14: Определение несобственного интеграла первого рода

Аналогично определяется значение интеграла по промежутку неограниченному слева:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{b} f(x)\,dx.$$

Для интеграла по промежутку неограниченному обеих сторон полагают:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где a — некоторое число, а каждое слагаемое понимается в смысле данных выше определений. Интеграл в этом случае считается сходящимся, если сходятся оба интеграла, на которые он разбивается.

Несобственными интегралами второго рода называются интегралы от неограниченных функций, т.е. функций, имеющих на отрезке интегрирования точки разрыва второго рода.

Если функция неограничена на левом конце интервала, полагают

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx;$$

если функция неограничена на правом конце интервала, полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Если функция неограничена в некоторой внутренней точке интервала $(x = c)$, полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где каждое слагаемое правой части понимается в смысле данных выше определений. Понятие сходимости и расходимости для несобственных интегралов второго рода понимается так же, как для первого.

4.2 Вычисление несобственных интегралов по определению

Следуя определению, процедура вычисления несобственных интегралов включает: нахождение первообразной для подынтегральной функции, применение формулы Ньютона-Лейбница и предельный переход.

Пример 14.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R e^{-x}dx = -\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R e^{-x}d(-x) = -\lim_{R\to+\infty}\left(e^{-x}\right)\Big|_0^R =$$

$$= -\lim_{R\to+\infty}\left(e^{-R} - e^0\right) = -(0-1) = 1.$$

Пример 15.

$$I = \int\limits_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \left\| \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(x\ln x\,\Big|_\varepsilon^1 - \int\limits_\varepsilon^1 dx \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(1\cdot\ln 1 - \varepsilon\ln\varepsilon - (1-\varepsilon)\right).$$

Для получения окончательного ответа нужно раскрыть неопределенность во втором слагаемом. Применим для этого правило Лопиталя:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\varepsilon\ln\varepsilon\,\{0\cdot\infty\} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{\left(\varepsilon^{-1}\right)'} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}}{-\varepsilon^{-2}} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2}{\varepsilon^{-2} \cdot \varepsilon^2} = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon = 0.$$

Таким образом, $I = 0 - 0 - 1 + 0 = -1$.

Совпадение (с точностью до знака) ответов в двух последних примерах неслучайно. Нетрудно заметить, что этим несобственным интегралам соответствует площадь одной и той же фигуры (рис. 15), поскольку

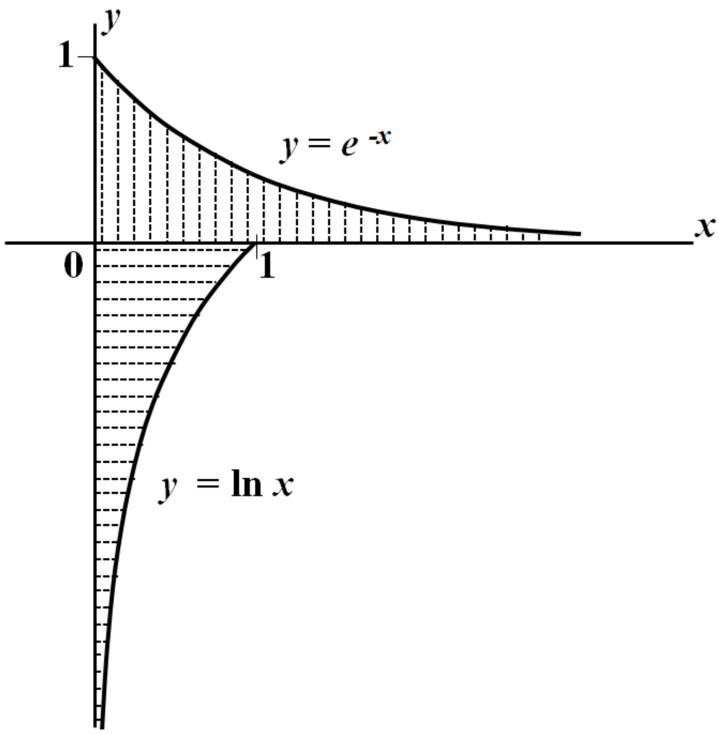

Рисунок 15: Площади, соответствующие несобственным интегралам

$$y = e^{-x} \Longleftrightarrow x = -\ln y.$$

Одной из типичных ошибок при вычислении несобственных интегралов второго рода является игнорирование особенностей подынтегральной функции и формальное применение формулы Ньютона-Лейбница, как к обычным определенным интегралам. Во многих случаях это приводит к неправильному результату, что легко показать на следующем примере.

Пример 16.

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = I_1 + I_2.$$

Нетрудно показать, что в силу симметрии подынтегральной функции значения интегралов I_1 и I_2 совпадают. Действительно, сделаем замену переменной $t = 2 - x$:

$$x = 2 - t, \quad dx = -dt, \quad x = 1 \mapsto t = 1, \quad x = 2 \mapsto t = 0.$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\int\limits_1^0 \frac{-dt}{(1-t)^2} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2} = I_1.$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что интеграл I_1 является расходящимся:

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(-\frac{1}{x-1} \Bigg|_0^{1-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

В то же время, непосредственное применение формулы Ньютона-Лейбница на отрезке $[0; 2]$ дает:

$$-\frac{1}{x-1} \Bigg|_0^2 = -1 - 1 = -2,$$

что заведомо абсурдно, поскольку подынтегральная функция строго положительна.

4.3 Теорема сравнения для несобственных интегралов

Во многих случаях интерес представляет не конкретное значение несобственного интеграла, а факт его сходимости или расходимости, т.е. конечности или бесконечности соответствующей ему площади. Во многих случаях ответ на вопрос о сходимости можно дать, не вычисляя интеграла, если применить следующую теорему.

Теорема. Пусть функции f и g определены при $x \geqslant a$ и

$$\forall x \in [a; +\infty) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

Тогда:

$$\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx \quad \text{сходится} \Longrightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{сходится};$$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{расходится} \Longrightarrow \quad \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{расходится.}$$

Геометрически утверждение теоремы очевидно, т.к. площадь, лежащая под графиком большей функции, может быть только больше, чем площадь, лежащая под графиком меньшей (один график лежит выше другого). Покажем пример применения этой теоремы.

Пример 17. Определите, сходится ли несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Дать ответ на вопрос прямым вычислением в данном случае нельзя, поскольку интеграл является неберущимся, т.е. первообразная от подынтегральной функции не выражается через элементарные функции. Ответ на вопрос может быть получен с помощью теоремы сравнения. При $x \geqslant 1$ имеем:

$$x^2 \geqslant x \Longrightarrow e^{x^2} \geqslant e^x \Longrightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leqslant \frac{1}{e^x} \Longrightarrow e^{-x^2} \leqslant e^{-x}.$$

Учитывая аддитивность интеграла, можно записать

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Первый интеграл не является несобственным, он, очевидно, не превосходит 1. Второй интеграл является несобственным, но он сходится, поскольку, как это было показано выше, сходится интеграл от большей функции — e^{-x} (рис. 16). Заключаем, что исследуемый интеграл сходится. Заметим, что вопрос о его значении (крайне важный в теории вероятности и математической статистике) остался открытым.

Для эффективного применения теорем сравнения нужно иметь набор «эталонных» интегралов, сходимость или расходимость которых известна. Наиболее важными являются интегралы от степенных функций:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

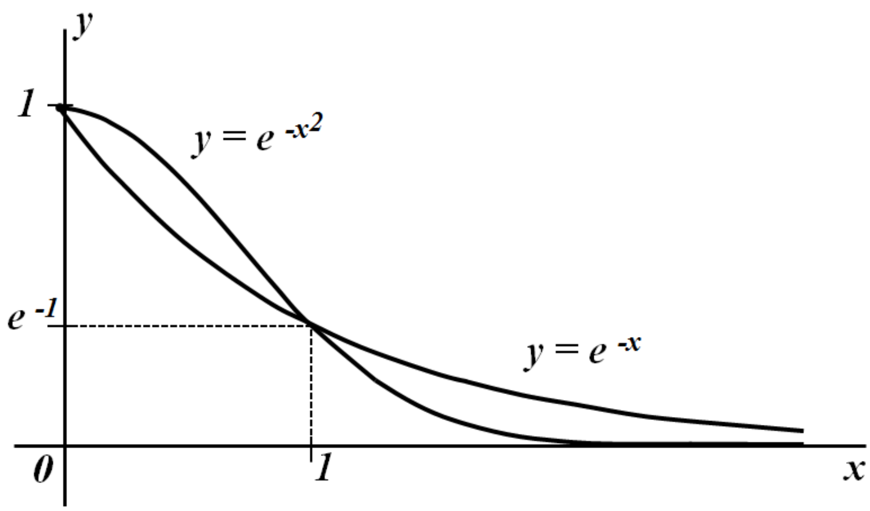

Рисунок 16: Теорема сравнения для несобственных интегралов

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$. Истинность этих утверждений легко устанавливается прямым вычислением.

4.4 Примеры вычисления несобственных интегралов

Пример 18.

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Первый способ. Сделаем замену переменной, чтобы избавиться от иррациональности:

$$z = \sqrt{1+x^2}, \quad x^2 = z^2 - 1 \Longrightarrow d\left(x^2\right) = d\left(z^2-1\right) \Longrightarrow 2xdx = 2zdz \Longrightarrow$$

$$xdx = zdz \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{xdx}{x^2} = \frac{zdz}{z^2-1}.$$

$$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{zdz}{z\left(z^2-1\right)} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{R} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \; \Bigg|_{\sqrt{2}}^{R} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{R\to+\infty}\ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right|-\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{R\to+\infty}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{R}}{1+\frac{1}{R}}\right|-\ln\left|\frac{2-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right|\right)=\frac{1}{2}\left(0+2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=$$

$$=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Второй способ. Применим тригонометрическую подстановку:

$$x=\operatorname{tg}t,\quad \sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}=\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{1}{|\cos t|},\quad dx=\frac{dx}{\cos^2 t}.$$

Заметим, что бесконечному интервалу интегрирования по x соответствует конечный интервал интегрирования по t, например, $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$.

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t d\,t}{\operatorname{tg}t\cdot\cos^2 t}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,t}{\sin t}=.\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t d\,t}{\sin^2 t}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-d\,(\cos t)}{1-\cos^2 t}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}\frac{dy}{1-y^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\bigg|_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}-0=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Третий способ. Сделаем замену, приводящую бесконечный интервал интегрирования в конечный:

$$w=\frac{1}{x},\quad dw=-\frac{dx}{x^2},\quad x=1\mapsto w=1,\quad w\to 0\quad\text{при}\quad x\to+\infty.$$

Имеем:

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dw}{\sqrt{w^2+1}}=\ln\left(w+\sqrt{w^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Пример 19.

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Первый способ. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь, разложим её в сумму простейших. Формально разложение следует искать в виде:

$$\frac{1}{x^4+x^2}=\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

однако, если заметить, что в выражении присутствуют только чётные степени переменной, вычисления можно упростить. Полагая $y=x^2$ (не путать с заменой переменной в интеграле!), получим

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{1}{y(1+y)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y+1}=\frac{Ay+A+By}{y(y+1)}.$$

Найдём неопределенные коэффициенты:

$$(A+B)y+A\equiv 1\Longrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} A+B & = & 0, \\ A & = & 1. \end{array}\right. \Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} A=1 \\ B=-1. \end{array}\right.$$

$$I=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)\,dx=\lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_1^R=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{R}-\operatorname{arctg}R+1+\operatorname{arctg}1\right)=0-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

Второй способ. Заменой переменной сведём интеграл к интегралу по конечному отрезку:

$$w=\frac{1}{x},\quad dw=-\frac{dx}{x^2},\quad x=1\mapsto w=1,\quad w\to 0\quad\text{при}\quad x\to+\infty.$$

$$I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\cdot\frac{dx}{x^2}=\int\limits_0^1\frac{w^2dw}{w^2+1}=\int\limits_0^1\frac{w^2+1-1}{w^2+1}\cdot dw=$$

$$=\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{w^2+1}\right)\,dw=1-\left(\operatorname{arctg}w\Bigg|_0^1\right)=1-\frac{\pi}{4}.$$

Пример 20.

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+1}.$$

Первый способ. Разложим правильную рациональную дробь, стоящую под знаком интеграла на сумму простейших, используя метод неопределённых коэффициентов.

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)} =$$

$$= \frac{x^2\,(A+B) + x\,(-A+B+C) + (A+C)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}.$$

Коэффициенты найдём, решая систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A & +B & & = 0, \\ -A & +B & +C & = 1, \\ A & & +C & = 0. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и третье:

$$\begin{cases} A & +B & & = 0, \\ -3A & +0 & +0 & = 1, \\ A & & +C & = 0. \end{cases} \Longrightarrow A = -\frac{1}{3} \Longrightarrow B = C = \frac{1}{3}.$$

Вынося множитель $\dfrac{1}{3}$ за знак интеграла, получаем

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-x+1}\right)\,dx.$$

Найдём первообразную для второго слагаемого, для этого учтём, что

$$d(x^2-x+1) = (2x-1)dx.$$

$$J = \int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)2}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно получаем, что

$$J = \ln\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$I = \frac{1}{3}\lim_{R\to+\infty}\left(-\ln(x+1) + \ln\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{R\to+\infty}\left(\ln\frac{\sqrt{R^2-R+1}}{R+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \ln 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

Учитывая, что при $R \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{R^2-R+1}}{R+1} = \frac{R\cdot\sqrt{1-\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}}{R\left(1+\frac{1}{R}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}}}{1+\frac{1}{R}} \to 1,$$

$$\mathrm{arctg}\,\frac{2R-1}{\sqrt{3}} \to \frac{\pi}{2},$$

получаем

$$I = \frac{1}{3}\left(0 + \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\pi = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Второй способ. Произведём замену переменной:

$$w = \frac{1}{x},\quad dw = -\frac{dx}{x^2},\quad w\to+\infty \quad \text{при} \quad x\to 0{+}0,\quad w\to 0 \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int\limits_{+\infty}^{0}\frac{dw}{1+w^3}.$$

Учитывая, что переменная интегрирования может быть обозначена любой буквой, получаем

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}.$$

Хотя замена переменной не привела к существенному упрощению подынтегральной функции, теперь появляется возможность упростить вычисления, сложив между собой два представления интеграла:

$$I + I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}\,dx + \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^3+1}\,dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Выделяя полный квадрат в квадратичном трёхчлене, стоящем в знаменателе, завершаем вычисления:

$$I = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \frac{dx}{x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{R\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^R = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\lim_{R\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{2R-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Пример 21.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Первый способ.

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \frac{1}{2}\cdot\frac{2xdx}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{R\to+\infty}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\bigg|_0^R = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\ln\left(R^2+\sqrt{R^4+1}\right) - 0 = +\infty.$$

Второй способ. Расходимость интеграла легко установить с помощью теоремы сравнения. При $x > 0$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x}{x^2\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}} \geqslant \frac{1}{x}.$$

Учитывая, что интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$$

расходится, разобьём исходный интеграл на два слагаемых

$$I = \int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}} + \int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Первое слагаемое является интегралом от ограниченной функции по конечному отрезку, а второе слагаемое расходится согласно теореме сравнения.

Пример 22. Установить сходимость или расходимость несобственного интеграла

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Заметим, что, поскольку интеграл является неберущимся, получить ответ прямым вычислением нельзя.

Первый способ. Произведём замену переменной:

$$t = e^{\sqrt{x}} - 1 \Longrightarrow \sqrt{x} = \ln(1+t) \Longrightarrow x = \ln^2(1+t) \Longrightarrow dx = \frac{2\ln(1+t)}{1+t}\, dt.$$

$$x = 0 \mapsto t = e^0 - 1 = 0, \quad x = 1 \mapsto t = e^1 - 1.$$

$$I = 2\int\limits_0^{e-1} \frac{\ln(1+t)\, dt}{(1+t)t}.$$

Знаменатель обращается в ноль в точках $t = -1$ и $t = 0$, но первая из них лежит вне отрезка интегрирования, а во второй функция ограничена, поскольку имеет конечный предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{(1+t)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{1+t} = 1 \cdot 1 = 1,$$

т.к. первый сомножитель представляет собой «замечательный» предел. Поскольку подынтегральная функция ограничена, а отрезок интегрирования конечен, преобразованный интеграл не является несобственным, а, следовательно, исходный интеграл был сходящимся.

Второй способ. Воспользуемся теоремой сравнения. Знаменатель в точке $x = 0$ является бесконечно малой величиной. Согласно таблице эквивалентных бесконечно малых, изучаемой в теме «Пределы», имеем

$$e^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x} \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

является сходящимся, что приводит к предположению о том, что исходный несобственный интеграл сходится.

Более аккуратное доказательство этого факта, может быть получено из неравенства

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \geqslant 1 + t.$$

Это неравенство вытекает из того, что прямая $y = 1 + t$ является касательной к графику функции $y = e^t$, а сама функция $y = e^t$ является выпуклой вниз и, следовательно, её график лежит выше касательной. Неравенство можно также доказать следующим образом. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = e^t - 1 - t, \quad \varphi'(t) = e^t - 1.$$

Т.к. производная меняет в точке $t = 0$ знак с «—» на «+», функция φ имеет в этой точке минимум. Поскольку $\varphi(0) = 0$, для остальных значений t функция принимает неотрицательные значения.

Применим доказанное выше неравенство для $t = \sqrt{x}$. При $x > 0$ имеем:

$$e^{\sqrt{x}} > \sqrt{x} + 1 \Longrightarrow e^{\sqrt{x}} - 1 > \sqrt{x} > 0 \Longrightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Поскольку интеграл от большей функции сходится, то, согласно теореме сравнения, сходится интеграл от меньшей функции. Более того, учитывая свойство монотонности интеграла, можно получить неравенство:

$$I \leqslant \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(2\sqrt{x} \,\Big|_\varepsilon^1 \right) = 2.$$

Отметим, что нами был установлен только факт сходимости интеграла, само значение осталось невычисленным, можно только утверждать, что оно заведомо не превосходит 2.

5 Примеры вычисления определённых интегралов

Пример 23.

$$I = \int\limits_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x + 1}}.$$

Первый способ. От иррациональности можно избавиться заменой переменной:

$$t = \sqrt{x+1}, \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2tdt,$$

$$x = 3 \mapsto t = \sqrt{3+1} = 2,\ x = 8 \mapsto t = \sqrt{8+1} = 3.$$

$$I = \int\limits_2^3 \frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t} = 2\int\limits_2^3 \left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 2\left((9-3) - \left(\frac{8}{3} - 2\right)\right) = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 16\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Второй способ. Применим интегрирование по частям, чтобы избавиться от x в числителе:

$$\left\| \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}} & v = 2\sqrt{x+1} \end{array} \right\|$$

$$I = 2x\sqrt{x+1}\,\Big|_3^8 - 2\int\limits_3^8 \sqrt{x+1}\,d(x+1) = 16\cdot 3 - 6\cdot 2 - 2\cdot\frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_3^8 =$$

$$= 48 - 12 + \frac{4}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = 36 + \frac{4}{3}\cdot 19 = \frac{108-76}{3} = \frac{32}{3}.$$

Третий способ. Элементарными тождественными преобразованиями интеграл преобразуется в сумму двух табличных:

$$I = \int\limits_3^8 \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\limits_3^8 \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\,d(x+1) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\Big|_3^8 - 2\sqrt{x+1}\,\Big|_3^8 = \frac{2}{3}\,(27-8) - 2\,(3-2) = \frac{38}{3} - 2 = \frac{32}{3}.$$

Пример 24.

$$I = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x}.$$

Первый способ. Применим тригонометрическую подстановку

$$x = \frac{1}{\cos t}, \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = |\operatorname{tg} t|,$$

$$dx = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot (-\sin t) dt = \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t}, \quad \cos t = \frac{1}{x}, \quad t = \arccos \frac{1}{x},$$

$$x = 1 \mapsto t = \arccos 1 = 0, \quad x = 2 \mapsto t = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t \operatorname{tg} t \sin t\, dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t\, dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 t\, dt}{\cos^2 t} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt =$$

$$= (\operatorname{tg} t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Второй способ. Возьмем корень за новую переменную:

$$z = \sqrt{x^2 - 1}, \quad z^2 + 1 = x^2 \Longrightarrow d\left(z^2 + 1\right) = d\left(x^2\right) \Longrightarrow$$

$$2zdz = 2xdx \Longrightarrow xdx = zdz.$$

$$x = 1 \mapsto z = \sqrt{1 - 1} = 0, \quad x = 2 \mapsto z = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}.$$

$$I = \int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}\, xdx}{x^2} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{z \cdot zdz}{z^2 + 1} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{z^2 + 1 - 1}{z^2 + 1}\, dz =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz = \sqrt{3} - \operatorname{arctg} z \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Пример 25.

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Первый способ. Интегрирование по частям (возвратное интегрирование).

$$I = \left\| \begin{array}{l|l} u = \sqrt{1 - x^2} & du = \dfrac{-xdx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\| = x\sqrt{1 - x^2} \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Заметим, что в результате выполнения подстановки внеинтегральный член исчезает. В числителе подынтегрального выражения добавим и отнимем единицу:

$$I = -\int\limits_0^1 \frac{1 - x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\int\limits_0^1 \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Сокращая дробь в первом интеграле и, учитывая, что второй интеграл является табличным, получаем:

$$I = -\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \arcsin x\,\Big|_0^1 \Longrightarrow I = -I + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right),$$

откуда окончательно: $2I = \dfrac{\pi}{2}$ и $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Второй способ. Тригонометрическая подстановка.

$$x = \sin t; \quad dx = \cos t\,dt.$$

Выбор отрезка интегрирования по переменной t является неоднозначным, но удобнее всего взять

$$t_1 = \arcsin 0 = 0, \quad t_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = +\cos t,$$

т.к. t пробегает значения из первой четверти. В результате имеем

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\sin 2t}{2}\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Третий способ. На первый взгляд, чтобы избавиться от корня, следует сделать замену $t = \sqrt{1-x^2}$, однако, как не трудно убедиться, эта замена не избавляет от иррациональности. Подынтегральная функция является частным случаем т. н. «дифференциального бинома». В данном случае замене переменной должно предшествовать вынесение x^2 из под корня:

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\cdot x dx.$$

Замена:

$$z = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2} = z^2 + 1 \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{z^2+1}.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$$d\left(x^2\right) = d\left(\frac{1}{z^2+1}\right) \Longrightarrow 2xdx = -\frac{2zdz}{(z^2+1)^2} \Longrightarrow xdx = -\frac{zdz}{(z^2+1)^2}.$$

Найдём новые пределы интегрирования:

$$x = 1 \leftrightarrow z = \sqrt{1-1} = 0; \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} = +\infty.$$

Получаем:

$$I = -\int\limits_{+\infty}^{0} z\cdot\frac{zdz}{(z^2+1)^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} z\cdot\frac{zdz}{(z^2+1)^2} = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{0}^{R} z\cdot\frac{zdz}{(z^2+1)^2}.$$

Применим интегрирование по частям:

$$I = \left\| \begin{array}{l|l} u = z & du = dz \\ dv = \dfrac{zdz}{(z^2+1)^2} & v = \int \dfrac{zdz}{(z^2+1)^2} = \\ & = \frac{1}{2}\cdot\int (z^2+1)^{-2} d(z^2+1) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z^2+1} + C \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}\Bigg|_0^R + \frac{1}{2}\int\limits_0^R \frac{dz}{z^2+1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{R}{R^2+1} + \operatorname{arctg} z\Bigg|_0^R\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R+\frac{1}{R}} + \operatorname{arctg} R\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Четвертый способ. Заметим, что $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, график подынтегральной функции представляет собой дугу единичной окружности. Вычисляемый интеграл соответствует площади части единичного круга, находящейся в первой четверти. Учитывая, что площадь круга равна π, находим $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Пример 26.

$$I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x^3+x}.$$

Первый способ. Разложим правильную рациональную дробь в сумму простейших:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^2+1} \Longrightarrow$$

$$(A+B)x^2+Cx+A\equiv 1 \Longrightarrow \begin{cases} A \quad +B \qquad\quad = 0,\\ \qquad\qquad\quad C \;= 0,\\ A \qquad\qquad\quad\;\; = 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1,\\ B=-1,\\ C=0. \end{cases}$$

Воспользуемся полученным разложением:

$$I=\int\limits_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ \ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\cdot\int\limits_1^2\frac{2xdx}{x^2+1}=\ln 2-\ln 1-\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Второй способ. Разложение дроби на простейшие можно немного упростить, заметив, что в знаменателе стоят только нечётные степени x. Произведём замену $x^2=t$, $dt=2xdx$, $x=1\mapsto t=1$, $x=2\mapsto t=4$:

$$I=\int\limits_1^2\frac{dx}{x^3+x}=\int\limits_1^2\frac{xdx}{x^4+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{2xdx}{x^4+x^2}=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\frac{dt}{t^2+t}.$$

$$\frac{1}{t^2+t}=\frac{1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{At+A+Bt}{t(t+1)}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases} A+\quad B \;=1,\\ A \qquad\;\; =1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=1,\\ B=-1. \end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln t-\ln(t+1)\right)\Big|_1^4=\frac{1}{2}\left(\ln 4-\ln 5-\ln 1+\ln 2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Третий способ. Произведем замену

$$w=\frac{1}{x},\quad dw=-\frac{dx}{x^2},\quad x=1\mapsto w=1,\quad x=2\mapsto w=\frac{1}{2}.$$

$$I=\int\limits_1^2\frac{dx}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)x^3}=\int\limits_1^2\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x}\cdot\frac{dx}{x^2}=-\int\limits_1^{\frac{1}{2}}\frac{tdt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{2tdt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\ln\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}\ .$$

Литература

1 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 / Г.М. Фихтенгольц.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 662 с.

2 Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. Т.1 / Л.Д. Кудрявцев.— М.: изд-во «Дрофа», 2004. — 720 с.

3 Бутузов, В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 480 с.

4 Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. — СПб.: «Лань», 2010. — 464 с.

Кафедра высшей математики

Методические указания

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Алексей Андреевич Груздков

Отпечатано с оригинал-макета. Формат $60 \times 90$1/16
Печ. л. 4. Тираж 200 экз.

Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(Технический университет)

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

Типография изд. СПбГТИ(ТУ), тел.: 4949365