ББК 22.11
Ч 84

Чудесенко В. Ф.

Ч 84 Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты: Учебное пособие. 4-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2007. — 192 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0661-6

Сборник содержит индивидуальные задания (31 вариант каждой задачи) по специальным разделам курса высшей математики: теории функций комплексного переменного и операционное исчисление, теория вероятностей и элементы математической статистики, уравнения математической физики. Каждый раздел сборника содержит теоретические вопросы, теоретические упражнения и расчетную часть.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению «Математика».

ББК 22.11

Рецензент
канд. физ.-мат. наук *А. С. ПОСПЕЛОВ*

Обложка
С. ШАПИРО, А. ЛАПШИН

ПРЕДИСЛОВИЕ

Активная самостоятельная работа студентов — залог успешного овладения изучаемым курсом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР). Применение системы ТР рекомендовано действующей программой по высшей математике для инженерно-технических специальностей вузов.

Основой системы ТР является индивидуализация заданий. Задачи — расчетные задания входящие в настоящий сборник представлены каждая 31 вариантом, что позволяет предложить каждому студенту учебной группы индивидуальное задание. Помимо задач типовые расчеты содержат теоретические вопросы и теоретические упражнения, общие для всех студентов. Расчетные задания сопровождаются ссылками на справочный материал, в котором содержатся необходимые теоретические сведения и примеры решения некоторых задач.

Система ТР не исключает традиционных текущих заданий. Поскольку не все разделы спецкурсов отражены в книге в равной мере, важно, чтобы ТР и текущие домашние задания дополняли друг друга.

Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на аудиторных занятиях. Теоретические упражнения и задачи решаются студентами самостоятельно и сдаются на проверку в указанные преподавателем сроки. Решение каждой задачи приводится на отдельном листе стандартного формата. Неверно решенные примеры возвращаются

2.11. Закон больших чисел

Теорема Чебышева. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ попарно независимы и $D\xi_i \le c$, $i = 1, 2, \ldots$, где c — некоторая постоянная. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad (13)$$

Теорема Маркова. *Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяют условию $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение* (13).

Теорема Бернулли. *Пусть m — число успехов в n независимых испытаниях, p — вероятность успеха в каждом испытании. Тогда при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{P\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство этих теорем основано на *неравенстве Чебышева* $P\{|\xi - M\xi| \ge \varepsilon\} \le D\xi/\varepsilon^2$, справедливом при любом $\varepsilon > 0$ для любой случайной величины ξ, имеющей конечное математическое ожидание $M\xi$ и конечную дисперсию $D\xi$.

2.12. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных слагаемых. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие математические ожидания $M\xi_i = a$ и дисперсии $D\xi_i = \sigma^2$. Тогда при $n \to \infty$ функция распределения нормированной суммы $\eta_n = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)/\sigma\sqrt{n}$ сходится к функции распределения нормальной случайной величины с параметрами (0, 1), т. е. при любом x

$$P\{\eta_n < x\} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Отсюда получается приближенная формула

$$P\{x_1 < \eta_n < x_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

справедливая при достаточно больших n. Она выражает вероятность выполнения неравенства $x_1 < \eta_n < x_2$ через интеграл вероятности (4) (см. табл. II в приложении).

2.13. Точечные оценки параметров распределения. *Выборкой называется n-мерная случайная величина, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ с независимыми одинаково распределенными компонентами X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Число n называется объемом выборки.*

Любая функция $h = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ выборочных значений называется статистикой.

Пусть α — неизвестный параметр распределения случайной величины ξ. Статистика

$$\alpha^* = \alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad (14)$$

используемая в приближенном равенстве $\alpha \approx \alpha^*$, называется оценкой (точечной оценкой) неизвестного параметра по выборке.

Классификация оценок

Желательно, чтобы оценка (14) не давала систематического завышения или занижения результатов, т. е. чтобы $M\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \alpha$.

Оценка α^*, обладающая указанным свойством, называется несмещенной. В противном случае она называется смещенной.

Если при $n \to \infty$ оценка α^* сходится по вероятности к истинному значению параметра α:

$$\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{по вер.}}{\to}} \alpha,$$

то оценка α^* называется состоятельной.

Состоятельность означает, что с ростом объема выборки качество оценки улучшается.

Если оценки α_1^* и α_2^* удовлетворяют неравенству $M(\alpha_1^* - \alpha)^2 < M(\alpha_2^* - \alpha)^2$, *то оценка α_1^* называется более эффективной, чем α_2^*. Если существует оценка α^* более эффективная, чем любая другая, то она называется эффективной.*

Методы получения оценок

1. Метод моментов. Пусть ξ — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x,\alpha)$, зависящей от одномерного неизвестного параметра α. Тогда математическое ожидание $M\xi$ является функцией α:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)\,dx = \mu_1(\alpha).$$

Выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ принимает значение, близкое к $M\xi$. Это позволяет записать уравнение для определения неизвестного параметра α:

$$\mu_1(\alpha) = \overline{X}.$$

Метод моментов аналогичным образом применяется к дискретным случайным величинам.

2. Метод максимального правдоподобия. Пусть ξ — дискретная случайная величина с распределением

$$P(\xi = a_i) = p_i(\alpha), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

где a_i — возможные значения случайной величины ξ, $p_i(\alpha)$ — соответствующие вероятности, зависящие от неизвестного параметра α, причем $\sum_{i=1}^{k} p_i(\alpha) = 1$ при любом допустимом значении α. Множество значений a_i случайной величины ξ может быть не только конечным, но и счетным.

Если среди наблюдаемых выборочных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ число a_i встречается n_i раз ($i = 1, 2, \ldots, k$), то

для вероятности $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)$ получения данной выборки имеем выражение

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = p_1^{n_1}(\alpha)\, p_2^{n_2}(\alpha) \ldots p_k^{n_k}(\alpha). \qquad (15)$$

Функция (15) параметра α называется *функцией правдоподобия*, а величина α^*, при которой функция $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)$ достигает максимума, — *оценкой максимального правдоподобия* неизвестного параметра α.

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $p(x,\alpha)$, зависящей от неизвестного параметра α, метод максимального правдоподобия остается в силе. Отличие состоит в том, что теперь функция правдоподобия $L(x_1, x_2, \ldots, X_n; \alpha) = p(x_1, \alpha)\, p(x_2, \alpha) \ldots p(x_n, \alpha)$ выражается не через вероятность получения данной выборки, а через плотность распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_a)$, зависящую от параметра α. При этом α служит аргументом, значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ считаются фиксированными.

2.14. Доверительные интервалы. Кроме точечных оценок используются так называемые доверительные интервалы: указывается не толька точка $\alpha^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, а интервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, к которому с заданной вероятностью принадлежит истинное значение параметра α,

$$P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \mathcal{P}. \qquad (16)$$

Число $\mathcal{P}$, $0 < \mathcal{P} < 1$ называется *доверительной вероятностью* и характеризует надежность полученной оценки: чем ближе $\mathcal{P}$ к единице, тем надежнее оценка (обычно выбирают $\mathcal{P} = 0{,}9$; $0{,}95$ или $0{,}99$).

Величины $\underline{\alpha}$ и $\overline{\alpha}$ называются *доверительными границами*. Они являются функциями выборочных значений $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и, следовательно, являются случайными величинами.

Интервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ со случайными границами $\alpha = \underline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, которые при любом допустимом значении $\overline{\alpha}$ удовлетворяют соотношению (16), *называется доверительным интервалом для неизвестного параметра α.*

Примеры доверительных интервалов

1. Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при известной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\overline{X} - u_{\mathcal{P}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + u_{\mathcal{P}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Здесь $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, величина $u_{\mathcal{P}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ с помощью табл. V (см. приложение).

2. Доверительный интервал для математического ожидания a нормальной случайной величины при неизвестной дисперсии σ^2 имеет вид

$$\overline{X} - t_{\mathcal{P}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_{\mathcal{P}} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}},$$

где оценка σ^* вычисляется по формуле

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}, \qquad (17)$$

а величина $t_{\mathcal{P}}$ определяется по заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ и объему выборки n с помощью табл. VI (см. приложение).

3. Доверительный интервал для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины имеет вид

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_{(1)}},$$

где n — объем выборки; σ^* — оценка величины σ, определяемая формулой (17); $\chi^2_{(1)}$ и $\chi^2_{(2)}$ — корни уравнений

$$\int_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\mathcal{P}}{2}, \quad \int_{\chi^2_{(2)}}^{+\infty} p_{n-1}(x)\,dx = \frac{1-\mathcal{P}}{2}, \qquad (18)$$

в которых подынтегральная функция $p_{n-1}(x)$ представляет собой плотность распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

Уравнения (18) при заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ решаются с помощью табл. VII (см. приложение). При определении $\chi^2_{(1)}$ входами этой таблицы служат $\nu = n-1$ и $\alpha = \frac{1+\mathcal{P}}{2}$, при определении $\chi^2_{(2)}$ — $\nu = n-1$; $\alpha = \frac{1-\mathcal{P}}{2}$.

4. Пусть n — число независимых испытаний, m — число наступлений события A, p — вероятность наступления события A в каждом отдельном испытании. Рассмотрим случай, когда n достаточно велико, а значение p не слишком близко к нулю или к единице так, что можно воспользоваться асимптотикой Муавра–Лапласа (см. п. 2.6). При этом доверительный интервал для p имеет вид $p_1 < p < p_2$, где

$$p_{12} = \frac{n}{n+u^2}\left(p^* + \frac{u_{\mathcal{P}}^2}{2n} \mp \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \left(\frac{u_{\mathcal{P}}}{2n}\right)^2}\right), \quad p^* = \frac{m}{n},$$

$u_{\mathcal{P}}$ — определяется по заданной доверительной вероятности $\mathcal{P}$ с помощью табл. V (см. приложение).

Рассмотрим отдельно случай $m = 0$. При этом нижняя доверительная граница равна нулю, верхняя $1 - \sqrt[n]{1-\mathcal{P}}$. Аналогично, при $m = n$ нижняя и верхняя доверительные границы равны соответственно $\sqrt[n]{1-\mathcal{P}}$ и единице.

2.15. Статистическая проверка гипотез. *Случайная величина X, которая служит для статистической проверки гипотезы, называется критерием.* Иногда термином *критерий* обозначают не только случайную величину X, но и все правило проверки в целом. При этом X называют *статистикой критерия.*

Проверка гипотезы состоит в том, что если наблюдаемое значение критерия принадлежит некоторому определенному множеству S, т. е. наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается.

Множество S, такое, что при наступлении события $\{X \in S\}$ основная гипотеза H_0 отвергается, называется критическим множеством (для гипотезы H_0).

Событие $\{X \in S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, когда она является истинной, называется ошибкой первого рода. Событие $\{X \overline{\in} S\}$, состоящее в том, что основная гипотеза H_0 не отвергается, когда верна одна из альтернативных гипотез H_λ, называется ошибкой второго рода.

Вероятности P_{I} и P_{II} ошибок первого и второго рода вычисляются в предположениях о справедливости различных гипотез — основной H_0 и альтернативной H_λ соответственно:

$$P_{\text{I}} = P_{H_0}(X \in S), \quad P_{\text{II}} = P_{H_\lambda}(X \overline{\in} S).$$

Вероятность ошибки второго рода, а также вероятность

$$P_{H_\lambda}(X \in S) = 1 - P_{H_\lambda}(X \overline{\in} S) \tag{19}$$

противоположного события связаны с конкретной альтернативной гипотезой H_λ, т. е. могут зависеть от некоторого параметра λ.

Функция (19) параметра λ, равная вероятности отвергнуть гипотезу H_0, если верна гипотеза H_λ, называется функцией мощности критерия.

Правило статистической проверки гипотезы

1. Задаются малым числом $\alpha > 0$, называемым *уровнем значимости критерия*; обычно $\alpha = 0{,}05$; 0,01 или 0,001. Чем более опасными признаются ошибки первого рода, тем меньше значение α должно быть выбрано.

2. Определяют критическое множество S из условия выполнения неравенства

$$P_{\text{I}} = P_{H_0}(X \in S) \le \alpha. \tag{20}$$

3. Условием (20) критическое множество определяется неоднозначно. Выбирают ту из возможностей, которая обеспечивает минимум вероятности ошибки второго рода, или, что то же самое, максимум мощности критерия.

4. Производят опыт и получают наблюдаемое значение критерия. Если при этом наступает событие $\{X \in S\}$, то основная гипотеза H_0 отвергается. В противном случае считается, что H_0 не противоречит опытным данным. Результат проверки гипотезы выражается словами: гипотеза H_0 отвергается (не отвергается) на уровне значимости α.

2.16. Критерий согласия χ^2. Критерии, которые служат для проверки гипотезы о законе распределения случайной величины, называются *критериями согласия*. Пусть основная гипотеза H_0 состоит в том, что функция распределения случайной величины ξ есть вполне определенная функция $F(x)$.

Разобьем числовую ось на r промежутков (разрядов).

$$(-\infty = a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{r-1}, a_r = +\infty),$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$. При справедливой гипотезе H_0 i-му разряду $[a_{i-1}, a_i)$ соответствует вероятность

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Из n выборочных значений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайной величины ξ в i-й разряд $[a_{i-1}, a_i)$ попадает случайное число m_i значений $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n\right)$. Тогда отношение m_i/n представляет собой частоту попадания выборочных значений в i-й разряд. Близость частот m_i/n к вероятностям p_i свидетельствует в пользу основной гипотезы H_0, заметные различия отвергают гипотезу H_0.

Случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \tag{21}$$

характеризует согласованность гипотезы H_0 с опытными данными. Критерий χ^2 применяется в соответствии с общим правилом статистической проверки гипотез. При этом наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле (21), критическое множество выбирается в виде полубесконечного интервала $(\chi^2_\alpha, +\infty)$, где величина χ^2_α находится с помощью табл. VII (см. приложение). Входами таблицы служат величины $\nu = r - 1$ и уровень значимости α.

Если выполняется соотношение $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то говорят, что гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α. В противном случае она не противоречит опытным данным.

Замечание 1. Число выборочных значений m_i, $i = 1, 2, ..., r$ в каждом разряде должно быть не менее 5—10. Если это условие не выполняется, рекомендуется объединять разряды.

Замечание 2. Критерий согласия χ^2 применим не только в случае, когда гипотетическая функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ полностью определена. Если она зависит от l неизвестных параметров, т. е. имеет вид $F(x; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l)$, и параметры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ оцениваются по выборке методом максимального правдоподобия (см. п. 2.13), то критерий согласия остается в силе, только входом в табл. VII служит величина $\nu = r - l - 1$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. События. Правила действий над событиями.
2. Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности. Аксиомы Колмогорова.
3. Теорема сложения вероятностей.
4. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей. Попарная независимость событий и независимость в совокупности.
5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
6. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли.
7. Локальная теорема Муавра—Лапласа (без доказательства).
8. Формула Пуассона как асимптотическая для формулы Бернулли.

9. Случайная величина. Функция распределения одномерной случайной величины, ее свойства.
10. Дискретные и непрерывные случайные величины. Числовые характеристики.
11. Понятие многомерной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины. Свойства.
12. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Коэффициент корреляции.
13. Свойства математического ожидания и дисперсии.
14. Характеристическая функция случайной величины. Свойства.
15. Функциональное преобразование случайных величин.
16. Композиция законов распределения случайных величин.
17. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных слагаемых.
18. Закон больших чисел. Теоремы Чебышева, Маркова, Бернулли.
19. Точечные оценки параметров распределения. Свойства оценок. Методы получения оценок.
20. Доверительная вероятность. Доверительный интервал. Примеры построения доверительных интервалов.
21. Статистическая проверка гипотез. Критерии согласия.